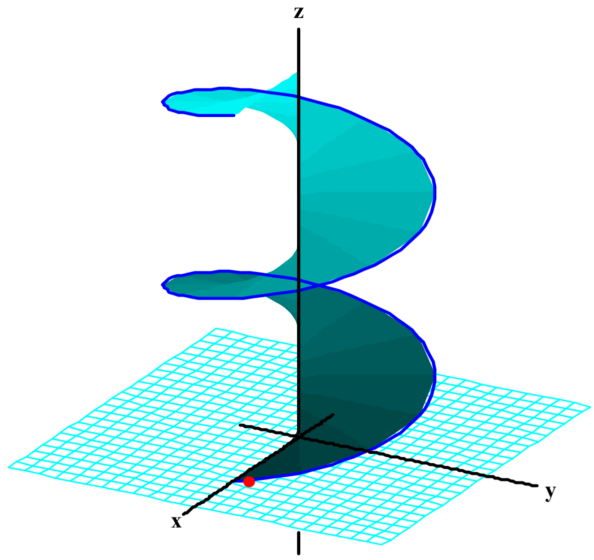
II BIENAL DA SBM
25A 29 DE OUTUBRO DE 2004

Animação de Curvas e Superfícies Utilizando Software Livre



Adelmo Ribeiro de Jesus
Eliana Prates Soares
Miriam Fernandes Mascarenhas

INTRODUÇÃO

Este curso visa trazer aos professores e alunos de cursos de Matemática algumas atividades de Geometria Analítica Plana e Espacial, especialmente no que se refere a animação de curvas e superfícies. Abordaremos dois tipos básicos de animação: O primeiro deles, mais simples, trata de apresentar uma família de curvas, a um parâmetro pré-definido. Melhor dizendo, escolhida uma função $y = f(x)$, considerar famílias a 1-parâmetro $y = f(x) + c$, $y = cf(x)$, ou então famílias do tipo $y = f(cx)$. Como exemplos citamos as curvas $y = sen(x) + c$, $y = c\, sen(x)$ e $y = sen(cx)$

No segundo tipo trabalharemos com a construção de curvas ou superfícies utilizando um parâmetro para sua construção, ou seja, dada uma curva $y = f(x)$ (ou uma superfície $z = f(x, y)$) trataremos de visualizar seu gráfico continuamente, através de uma animação com 1 parâmetro. Para obter esse efeito será necessário utilizar as equações paramétricas dessa curva ou superfície. Em alguns casos faremos uma animação " discreta" , com o parâmetro percorrendo uma família de pontos $0 \leq a \leq 100$, por exemplo

As atividades que aqui são apresentadas podem servir de base para outras animações, que ser poderão ser utilizadas em cursos de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo, e Geometria Diferencial.

Agradecemos aos alunos e professores pela compreensão com os possíveis defeitos e agradecemos pelas sugestões.

Salvador, Bahia, outubro de 2004

Adelmo R. de Jesus/Eliana P. Soares/Miriam Mascarenhas

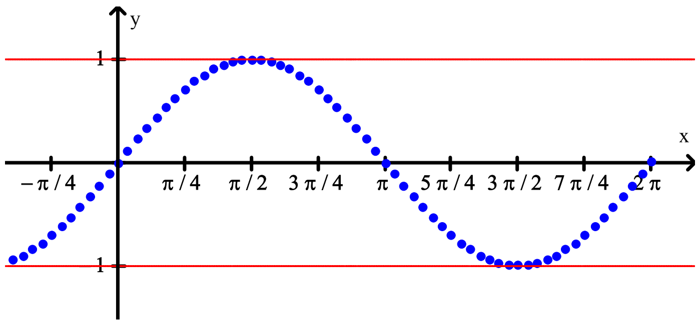
PARTE I: DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa Winplot possui uma interface simples, com inúmeros recursos. A versão em português (sempre atualizada) pode ser encontrada em http://math.exeter.edu/rparris , com diversos arquivos de Ajuda que podem facilitar bastante a tarefa do usuário. Além disso, é possível obter material suplementar sobre a utilização deste programa, escrevendo para adelmo@ufba.br .

PARTE II: ANIMAÇÃO DE CURVAS NO PLANO

A) Animação de curvas, tipo f(x) +c, f(x+c), f(cx)

A animação ao lado mostra uma família de pontos gerando a curva y=sen(x) . Devido a limitações de tempo e espaço não abordaremos nesta conferência este tipo de animação



B) Construção/Animação de Curvas Utilizando a Forma Paramétrica

Nesta 2ª parte trabalharemos essencialmente com equações na forma paramétrica. Estas equações permitem escreve funções y = f(x) , por exemplo, em uma forma x = t, y = f(t), com a vantagem que poderemos controlar a ação de "t" mediante um novo parâmetro, chamado "parâmetro de animação" . Dividiremos esta tarefa em duas sub-partes:

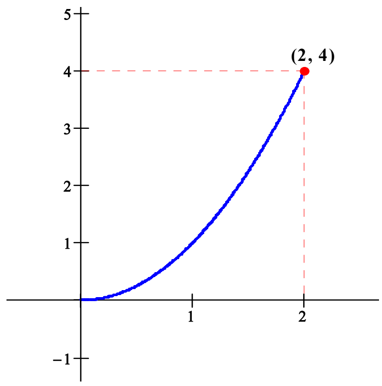
B_1) Curvas que iniciam na origem dos eixos coordenados

Dada uma função y = f(x), a ≤ x ≤ b, podemos inserir um parâmetro k de animação para visualizar o seu traço. Para isso, devemos utilizar suas equações na forma paramétrica. Fazendo x = t , temos y = f(x) = f(t). Logo, as equações paramétricas dessa curva ficam

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} , \quad a \le t \le b$$

O caso mais simples ocorre quando queremos animar uma curva y = f(x), **iniciando a animação na origem O=(0, 0) . Isto corresponde a iniciar a animação em t = 0**

Exemplo 1: $y = x^2$, $0 \le x \le 2$



Equações paramétricas: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$, $0 < t < 2$

Animação no Winplot:

a) No menu Equação Paramétrica, digite $\begin{cases} x(t) = kt \\ y(t) = (kt)^2 \end{cases}$, e escolha o intervalo $0 < t < 2$

b) No menu Anim, selecione o parâmetro "K" e ajuste-o para variar de 0 (def L) até 1 (def R)

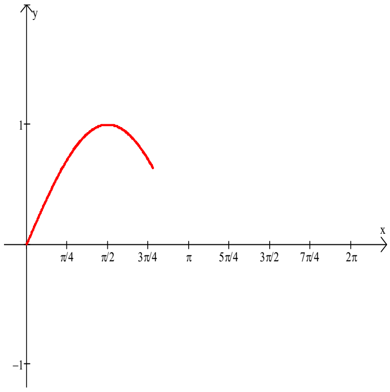
Exemplo 2: $y = \text{sen } x$, $0 \le x \le 2\pi$

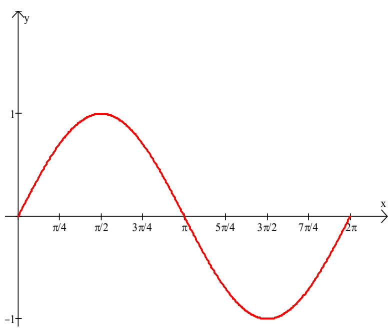
Equações paramétricas: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$

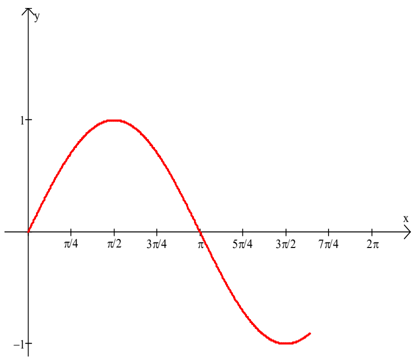
Animação no Winplot:

$\begin{cases} x(t) = kt \\ y(t) = \sin(kt) \end{cases}$, fazendo $0 < t < 2pi$

Não esqueça de ajustar o parâmetro "K" para variar entre 0 e 1



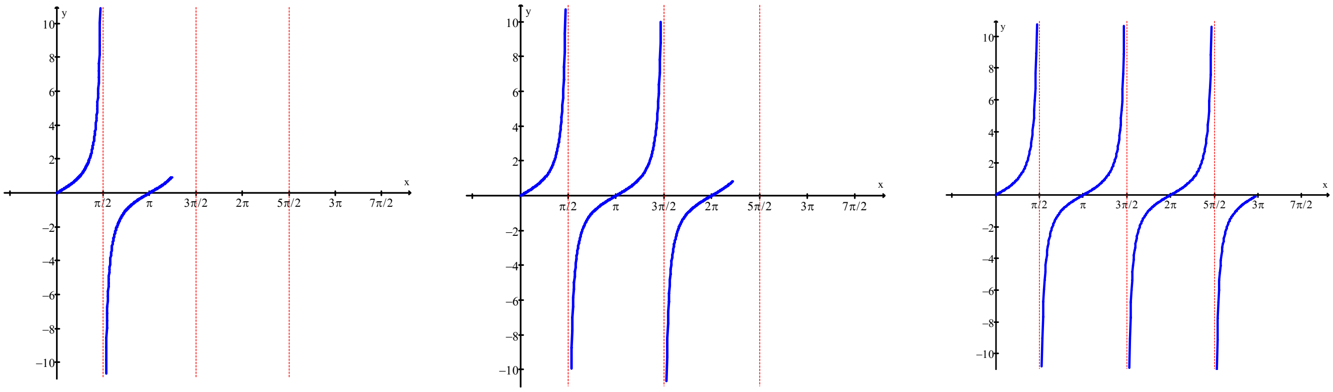




Exemplo 3: A função tangente $y = tg(x)$, $0 \leq x \leq 3\pi$

Equações paramétricas: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = tg(t) \end{cases}$, $0 < t < 3\pi$

Animação no Winplot: Digite $\begin{cases} x(t) = kt \\ y(t) = tan(kt) \end{cases}$, $0 < t < 3pi$



B₂) Curvas que iniciam em um ponto qualquer do plano

Quando a animação <u>não começa</u> no ponto (0, 0) a parametrização é um pouco mais complicada. Explicaremos brevemente a lógica dessa escolha. Antes, apresentaremos alguns exemplos

Exemplo 1: Segmento que liga os pontos P = (-2, 4) a Q = (3, 9)

Lembremos que as equações paramétricas de uma reta que passa por um ponto P= (x_o, y_o) são dadas por $\begin{cases} x(t) = x_o + a\,t \\ y(t) = y_o + b\,t \end{cases}$, com $t \in R$ onde v = (a,b) é um vetor direção desta reta.

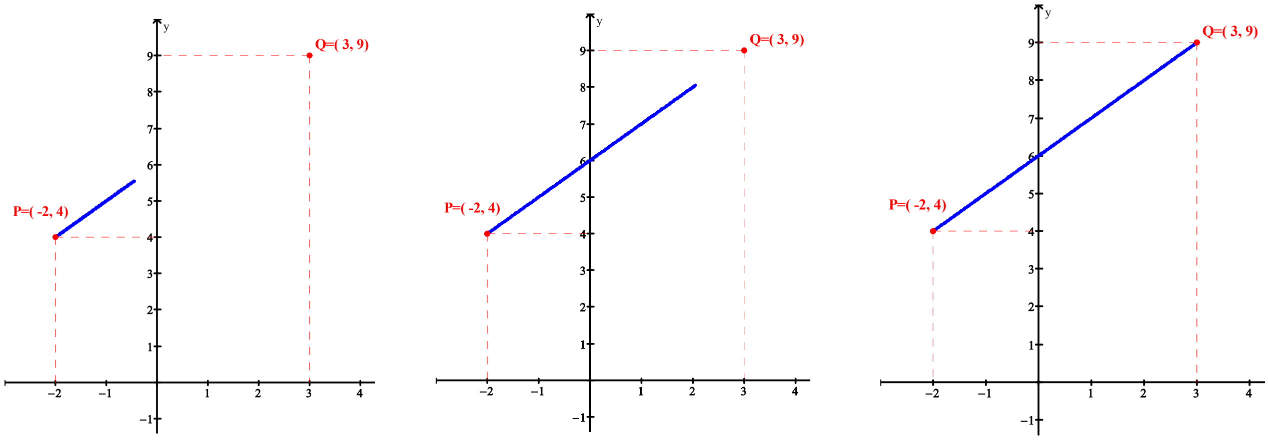
Assim, para ligarmos os pontos P= (x_o, y_o) , Q = (x_1, y_1) de uma reta, basta tomarmos

$\begin{cases} x(t) = x_o + a\,t \\ y(t) = y_o + b\,t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$, onde o vetor direção é v = Q-P = ($x_1 - x_o, y_1 - y_o$)

Resumindo, as equações do segmento são: $\begin{cases} x(t) = x_o + (x_1 - x_o)\,t \\ y(t) = y_o + (y_1 - y_o)\,t \end{cases}$, e $0 \leq t \leq 1$

Daí temos a equação do segmento que liga os pontos P = (-2, 4) a Q = (3, 9) :

$$\begin{cases} x(t) = -2 + 5t \\ y(t) = \ 4 + 5t \quad , \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

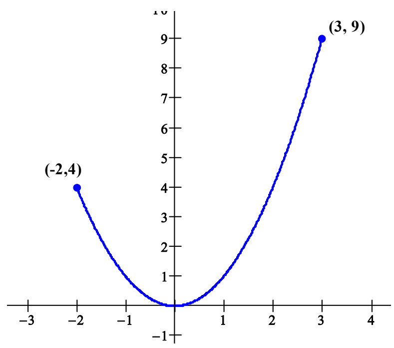


Exemplo 2: Construir a animação do gráfico $y = x^2$, $-2 \le x \le 3$

Suponhamos agora que queiramos ligar os pontos P = (-2, 4) a Q = (3, 9) através da parábola $y = x^2$. Como fazer?

As equações paramétricas dessa parábola são : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad , \ -2 \le t \le 3$

Animação: $\begin{cases} x(t) = -2 + k\,(t+2) \\ y(t) = (-2 + k\,(t+2)\,)^2 \end{cases} \quad , \ -2 \le t \le 3$



A lógica dessa animação é a seguinte:

- quando k=0 temos x(t) = -2 e y(t) = 4 . Conseqüentemente, o programa só exibe o ponto P =(-2, 4).
- Quando k = 1 teremos x(t) = -2 + (t+2) , ou seja, x(t) = t .

  Também, temos y(t) = = (-2 + (t+2))^2 , ou seja, y(t) = t^2 , que é a curva $y=x^2$ inteira.
- Os passos intermediários 0 < k < 1 nos dão as várias "gradações" da curva $y=x^2$

Podemos enfim enunciar um princípio geral para animação de curvas, que ligam dois pontos do plano.

Reparametrizar para construir a animação

<u>**Teorema:**</u> Se $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \quad , \ a \le t \le b \end{cases}$ é uma curva plana que liga os pontos P = (f(a), g(a)) a Q = (f(b), g(b)), a reparametrização $\begin{cases} x(t) = f(a + k(t-a)) \\ y(t) = g(a + k(t-a)) \quad , \ a \le t \le b \end{cases}$, $0 \le k \le 1$, fornece a animação da curva desde o ponto inicial P até Q.

Argumento: O <u>novo parâmetro</u> τ = a + k (t-a) , é tal que:

- Quando k = 0, temos τ = a . Logo, $\begin{cases} x(t) = f(a) \\ y(t) = g(a) \end{cases}$, o que representa o ponto P.
- Quando τ = b , temos τ = a + 1(t-a) = a + (t-a) = t , o que nos dá toda a curva.
- Os passos intermediarios 0 < k < 1 nos darão τ = a + k(t-a). Quando t varia entre a e b, o parâmetro τ varia entre a e a+k(b-a) =(1-k)a + kb, gerando as "curvas intermediarias " $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \quad , \ a \le t \le a + k(b-a) \end{cases}$

Exemplo 3: Construir a animação simultânea do segmento e da parábola $y = x^2$, no intervalo $-2 \le x \le 3$

Solução: As equações paramétricas do segmento e da parábola são, respectivamente:

Segmento: $\begin{cases} x(t) = -2 + 5t \\ y(t) = 4 + 5t \quad , \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$ Parábola: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \quad , \ -2 \le t \le 3 \end{cases}$

No caso do segmento, temos a = 0 . Logo, o novo parâmetro é τ = 0 + k(t-0), ou seja, τ = kt

No caso da parábola temos a =-2 . Logo, τ = -2 + k(t-(-2)), ou seja, τ = -2 + k(t+2)

Dessa forma, teremos:

a) Animação do segmento: $\begin{cases} x(t) = -2 + 5kt \\ y(t) = 4 + 5kt \quad , \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$

b) Animação da parábola : $\begin{cases} x(t) = -2 + k\,(t + 2) \\ y(t) = (-2 + k\,(t + 2)\,)^2 \quad , \ -2 \le t \le 3 \end{cases}$

Fazendo agora o parâmetro k variar entre 0 e 1 temos a seguinte animação.

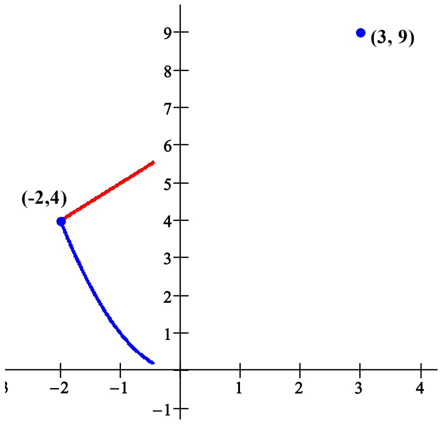


Fig. 1

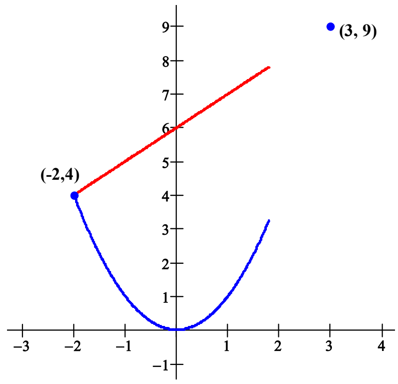


Fig. 2

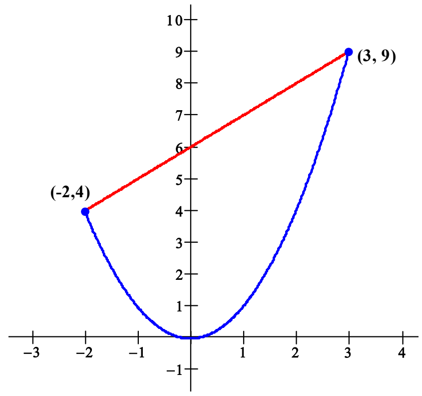


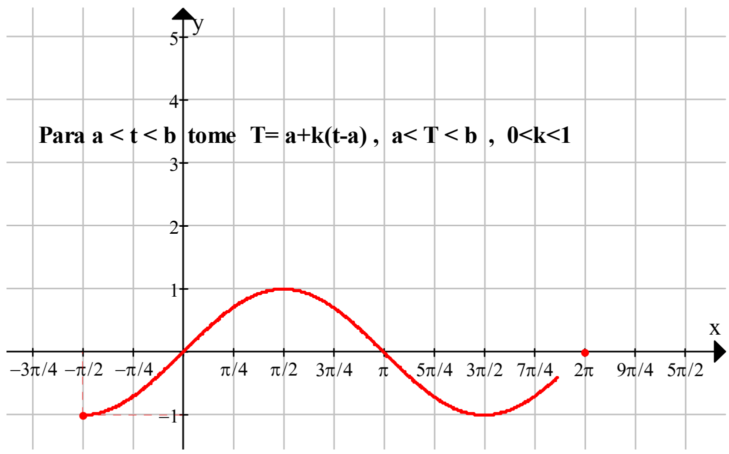
Fig. 3

Exemplo 4: $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

Solução: As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sin(t) \quad , \ -\frac{\pi}{2} < t < 2\pi \end{cases}$$

Neste caso $a = -\frac{\pi}{2}$, $f(t) = t$, $g(t) = \sin(t)$.



O parâmetro τ fica então $\tau = -\frac{\pi}{2} + k(t - (-\frac{\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2} + k(t + \frac{\pi}{2})$

A animação fica então:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\pi}{2} + k(t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin(-\frac{\pi}{2} + k(t + \frac{\pi}{2})) \quad , \ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Exercícios:

1. Animar o segmento de reta que liga o ponto P = (0,0) a Q = (2, 3)

2. Animar o segmento de reta que liga o ponto P = (0,0) a Q = (3, 4)

3. Animar o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$, $0 \leq x \leq 3$

4. Animar o gráfico da cúbica $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$

****

5. Animar o segmento de reta que liga o ponto P = (-1,1) a Q = (3, 3)

6. Animar o segmento de reta que liga o ponto P = (-1, 1) a Q = (3, 6)

7. Animar o gráfico da parábola $y = x^2$, $-1 \le x \le 2$

8. Animar o gráfico da parábola $y = x^2$, $-3 \le x \le 4$

9. Animar o gráfico da parábola $y = x^2 - 4$, $-3 \le x \le 3$

10. Animar o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$, $-2 \le x \le 3$

11. Animar o gráfico da cúbica $y = x^3$, $-1 \le x \le 2$

12. Animar o gráfico da parábola $y = x^2 - 9x + 18$, de x = 2 até x = 8

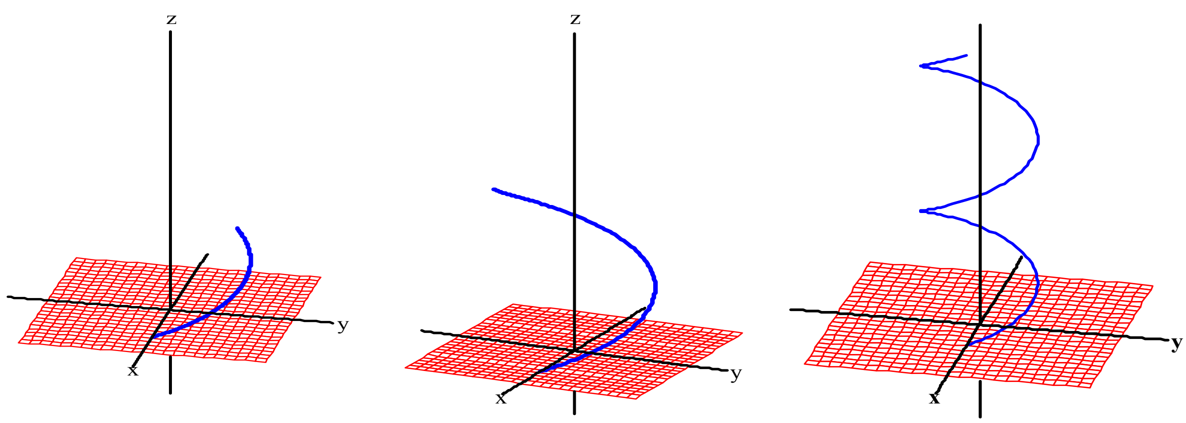
PARTE III: ANIMAÇÃO DE CURVAS E SUPERFÍCIES NO ESPAÇO

O processo para animar uma curva ou superfície no espaço é análogo ao de curvas no plano. O parâmetro "K" de animação deve sempre variar de 0 até 1.

Exemplo 1: Animação de uma hélice no espaço

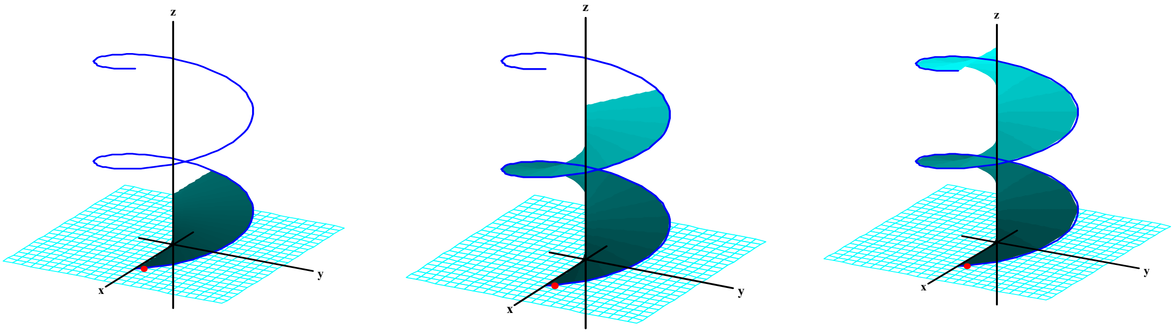
Equações paramétricas: $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \\ z(t) = t \quad , 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ é uma hélice "inscrita" no cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Animação: $\begin{cases} x(t) = 2\cos(kt) \\ y(t) = 2\sin(kt) \\ z(t) = kt \quad\quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$, $0 \le k \le 1$



Exemplo 2: Animação de um helicóide no espaço(caso contínuo)

$$\begin{cases} x(t,u) = t\cos(k2u) \\ y(t) = t\sin(k2u) \\ z(t) = ku \qquad 0 \le t \le 2,\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$



Exemplo 3: Construção do helicóide como uma superfície regrada (caso discreto)

A grosso modo uma hélice é uma curva no espaço descrita pelo movimento de um ponto em redor do eixo Oz, ao mesmo tempo que ele se eleva. Neste caso, suas equações paramétricas são

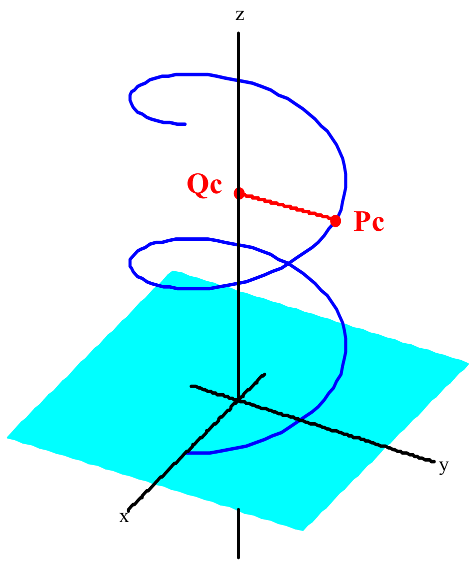
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\sin(t) \\ z(t) = bt \end{cases}$$, onde a, b são parâmetros fixos. O parâmetro "a" dá o raio do circulo no plano e "b" dá o chamado "passo" da hélice.

No caso da figura ao lado tomamos a=2, b=0.5 para melhor visualização, e $0 \le t \le 4\pi$

O helicóide é a superfície obtida pela união das semiretas que passam por um ponto P da hélice e são perpendiculares ao eixo Oz.

Para efeito de visualização, traçamos um segmento gerador do helicóide ligando os pontos genéricos $P_c = (2\cos(c), 2\sin(c), 0.5c)$ da hélice e $Q_c = (0,0, 0.5c)$ do eixo Oz.

Observe que como Pc e Qc têm a mesma altura, o "vetor direção" da reta suporte é v = (2cos(c) , 2sin(c) , 0) , que é perpendicular ao eixo Oz

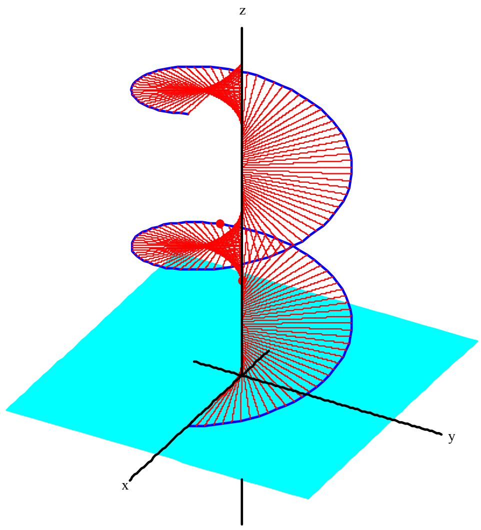


A equação vetorial do segmento é dada por

$(x(t), y(t), z(t)) = Q_c + t\,(P_c - Q_c)$. Na forma paramétrica, temos

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(c)\,t \\ y(t) = 2\sin(c)t \\ z(t) = 0.5c \end{cases}$$

Finalmente, tomando uma "família" de segmentos no Winplot, vemos a seguinte superfície regrada, chamada helicóide.



Contatos:

adelmo@ufba.br

elianaps@ufba.br

mfm@ufba.br