# A Inexistência de Soluções Inteiras $(n, m, k)$ para $3^{2n} - 2 \cdot 3^m + 1 = k^2$ com $m > n > 0$

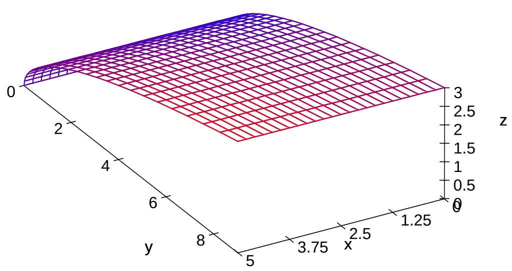
Gervasio G. Bastos

**Resumo**

Mostramos que a equação exponencial $3^{2n} - 2 \cdot 3^m + 1 = k^2$ não admite soluções inteiras $(n, m, k)$ no setor $m > n > 0$.

## 1 Colocação do Problema

Queremos mostrar que a superfície dada pela equação $3^{2x} - 2 \cdot 3^y + 1 = z^2$, cujo gráfico em coordenadas cartesianas se vê abaixo,




não possui nenhum ponto de coordenadas inteiras $(x, y, z)$ no setor dado por $y > x > 0$. Notemos que para $x = y$, temos $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = (3^x - 1)^2$ ou seja sobre a bissetriz $y = x$, os pontos $(x, y, z)$ sobre a superfície, com $x$ inteiro tem cota inteira. Usando o computador, pudemos encontrar vários pontos com coordenadas inteiras sobre a superfície, mas nenhum deles no setor $y > x > 0$. Seria interessante a colocação do presente exemplo dentro de uma classe mais geral de equações exponenciais diofantinas.

A tentativa de resolver um outro problema sobre equações desse tipo produziu o nosso problema e sua solução. Fixado um número inteiro positivo $h$, consideremos a equação $x^2 + h = 3^{2m}$ $(\mathrm{G}_h)$ em duas variáveis inteiras positivas $x$ e $m$. Suponhamos que existam inteiros positivos $x, y, m, n$ tais que $x^2 + h = 3^{2n}$ e $y^2 + h = 3^{2m}$. Afirmamos que $m = n$ e, conseqüentemente, $x = y$. Em outras palavras, $(\mathrm{G}_h)$ tem, no máximo, uma solução $(x, m)$ com $x, y$ inteiros positivos. Em primeiro lugar, é conveniente observar que se $(x, m), (y, m)$ são soluções desse problema, então:
$(3^m + x)(3^m - x) = 3^{2m} - x^2 = k = 3^{2n} - y = (3^n + y)(3^n - y)$.

## 2 Solução de $(\mathrm{G}_h)$

**Teorema 1** *Seja $h$ um número inteiro positivo, fixado. Então, a equação $x^2 + h = 3^{2m}$ admite, no máximo, uma solução $(x, m)$ com $x, m$ inteiros positivos.*

**Prova (F. A. Germano).** Observemos de ínicio que se $(\mathrm{G}_h)$ admite uma solução $(x, m)$ com $x$ divisível por 3, então podemos extrair a potência de 3 contida em $x$ (que certamente está contida também em $h$) e, assim, podemos supor sem perda de generalidade que $x$ não é múltiplo de 3. Temos $h = (3^m - x)(3^m + x) = r(2 \cdot 3^m - r)$, onde $0 < r = 3^m - x < 3^m$. Assim, se $(x, m)$ é solução de $(\mathrm{G}_h)$, então obtemos $0 < r < 3^m$ tal que $h = r(2 \cdot 3^m - r)$. Do mesmo modo, para a solução $(y, n)$ de $(\mathrm{G}_h)$, obtemos $0 < s = 3^n - y < 3^n$ tal que $h = s(2 \cdot 3^n - s)$. Afirmamos que $m = n$. Senão, podemos supor $n > m$, implicando $h = s(2 \cdot 3^n - s) = r(2 \cdot 3^m - r)$, e, portanto, $0 < s < r < 3^m$ ou $0 < r < s < 3^n$. No primeiro caso, tomando congruência $(\bmod 3^m)$, obtemos $s^2 \equiv r^2 (\bmod 3^m)$, i.e. $(r - s)(s + r)$ é divisível por $3^m$. Agora, notemos que $r - s$ e $r + s$ não podem ser ambos múltiplos de 3, pois, neste caso, teríamos ambos $r$ e $s$ também múltiplos de 3, o que implicaria $3 \mid x$, o que está excluído desde o início. Segue-se que $r \equiv \pm s (\bmod 3^m) \Rightarrow r = g \cdot 3^m + s$ ou $r = g \cdot 3^m - s$, com $g$ inteiro positivo, o que contraria a condição $r, s < 3^m$. O segundo caso é semelhante. Logo, $m = n$, e daí $x = y$, como queríamos. ■

**Corolário 2** *A equação $3^{2n} - 2 \cdot 3^m + 1 = k^2$ não possui soluções inteiras com $m > n > 0$.*

**Prova.** Denotemos $\Delta_{m,n} = 3^{2n} - 2 \cdot 3^m + 1$, e suponhamos que existam inteiros positivos $k$, $m > n$ tais que $\Delta_{m,n} = k^2$. Então, $p = 3^n + \sqrt{\Delta_{m,n}}$ e $q = 3^n - \sqrt{\Delta_{m,n}}$ são inteiros ímpares tais que $p > q \geq 1$, $p + q = 2 \cdot 3^n$ e $2 \cdot 3^m = pq + 1$. Agora, definamos $x = 3^m - 1$ e $y = 3^n - q$. Temos, portanto: $x = 3^m - 1 = pq - 3^m$ e $y = 3^n - q = p - 3^n$. Segue-se daí que

$(3^m + x)(3^m - x) = pq = (3^n + y)(3^n - y) \Leftrightarrow 3^{2m} - x^2 = pq = 3^{2n} - y^2$. Finalmente, tomando $h = pq$, temos que $h$ é um inteiro positivo para o qual existem inteiros $m > n$ tais que $x^2 + h = 3^{2n}$ e $y^2 + h = 3^{2m}$, o que contraria o teorema 1. ■

Observemos que numa passada d'olhos na aritmética usada acima, nos convencemos da validade de resultados semelhantes, tomando-se um primo ímpar em lugar de 3 em $(\mathrm{G}_h)$ e na equação exponencial do título deste artigo. É interessante notar que enquanto $(\mathrm{G}_h)$ pode admitir solução, a nossa equação não tem nenhuma solução no setor indicado. Propomos a questão da determinação dos inteiros $h$ tais que $(\mathrm{G}_h)$ admite solução (única).

**Agradecimento:** Agradeço ao Prof. Francisco Alcides Germano, professor do Departamento de Física da UFC, interessado também em Teoria dos Números, por me ter comunicado o problema $(\mathrm{G}_h)$. Após alguns casos que tratei, conforme o comunicara através de e-mails, ele mesmo me enviou sua bela solução para $(\mathrm{G}_h)$, exposta acima.

*Gervasio Gurgel Bastos*
*UFC*
*ggbastos@ufc.br*