REVISITANDO UMA VELHA CONHECIDA

João Bosco Pitombeira
Departamento de Matemática
PUC-Rio
pitcar@usa.net

INTRODUÇÃO

A resolução de uma equação do 2º grau nos parece hoje bem simples. Ao ensiná-la, limitamo-nos em geral a mostrar que a conhecida fórmula para as soluções de $ax^2+bx+c=0$, chamada em muitos livros didáticos de "fórmula de Báskara"[1],

$$\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

pode ser obtida pelo processo bem conhecido de "completar os quadrados". Por vezes, se mostra também como justificar geometricamente isso, o que já era conhecido pelos matemáticos árabes, como al- Khowarizmi[2], em torno de 825 d.C. No entanto, a maioria de nossos alunos fica surpresa quando lhes contamos que a equação do 2^0 grau tem uma longa história e que muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, se preocuparam em achar suas soluções, contribuindo desta maneira para a história que resumiremos agora e que se estende por mais de quatro mil anos!

Convém lembrar inicialmente que a notação algébrica simbólica manejada automaticamente por nós, hoje, é criação recente dos matemáticos, começando com François Viète (1540-1603) e colocada praticamente na forma atual por René Descartes (1596-1650). Assim, os processos (algoritmos) para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV e do início do século XVI eram formulados com palavras (às vezes, por exemplo na Índia, mesmo em versos!).

Neste trabalho, de finalidade didática, interpretamos os procedimentos usados no passado para trabalhar com equações do 2º utilizando nosso simbolismo algébrico. Num estudo mais profundo, a fim de tentar apreender a maneira de pensar que levou à criação desses procedimentos, seria essencial apresentá-los e estudá-los exatamente como eram descritos na época. É grave erro de metodologia da História da Matemática interpretar os resultados de outras épocas sob nossa ótica moderna.

---

[1] A denominação "fórmula de Báskara" para a fórmula de resolução da equação do 2º grau parece ser exclusiva do Brasil, como mostrado convincentemente em [MACHADO, 2003].

[2] Matemático árabe que viveu de 780 a 850 d.C. Trabalhou em Bagdá. A palavra algorismo vem de seu nome. Seu livro de álgebra teve papel importante na difusão das idéias matemáticas árabes na Europa. A palavra álgebra vem do título de seu livro.

Um levantamento muito completo da história da equação do 2º grau encontra-se em [TRÖPFKE, 1934, a] e [TRÖPFKE, 1934, b].

OS EGÍPCIOS

No Médio Império, os textos conhecidos só lidam com equações do segundo grau bem simples. Por exemplo, no papiro de Moscou, que data de aproximadamente 1850 a.C[3]. é pedido para calcular a base de um retângulo cuja altura ℓ é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base e cuja área é igual a 12. Este problema, em linguagem moderna, se escreve

$$\frac{3}{4}\ell^2=12.$$

Em outro papiro, encontramos dois problemas em que são dadas a área S, a diagonal d de um retângulo e se procuram seus lados x e y:

$$xy = S, \qquad x^2 + y^2 = d^2.$$

Como feito pelos babilônios, da maneira que veremos mais tarde neste trabalho, os egípcios calculavam inicialmente $x+y$ e $x-y$, para daí achar x e y.

OS BABILÔNIOS

É bem conhecido que os babilônios escreviam em tabletes de argila, com um estilete, usando a chamada escrita cuneiforme, e tinham um sistema de numeração posicional bem desenvolvido, com base 60.

No fim do século XIX e na primeira metade do século XX, as pesquisas dos arqueólogos e dos historiadores da Matemática modificaram totalmente nossa avaliação da qualidade da Matemática praticada na Mesopotâmia, mostrando que ela era claramente mais desenvolvida do que a Matemática egípcia.

Entre os inúmeros tabletes que se encontram nos museus da Europa, Oriente Próximo, Oriente Médio e Estados Unidos, existem alguns que tratam de equações do 2º grau. Um tablete típico que nos chegou traz o seguinte problema, aqui formulado em nosso sistema de numeração decimal, para simplificar os cálculos:

Achar o lado de um quadrado se sua área menos seu lado é igual a 870.

[3] Os dois documentos mais importantes de que dispomos para o estudo da Matemática egípcia são o papiro Rhind e o papiro de Moscou, este último de autoria desconhecida.

Designando o lado por *x,* este problema se traduz, hoje, utilizando a linguagem simbólica algébrica, na equação $x^2 - x = 870$.

A equação $x^2 - px = q$, com *p* e *q* positivos, tem uma raiz positiva, dada por

$\frac{p}{q}$

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \qquad \text{(A)}$$

Os babilônios não dispunham desta fórmula algébrica, mas o processo que seguiam é inteiramente equivalente a aplicá-la. Com efeito, a solução registrada no tablete é a seguinte:

Tome a unidade: 1

Divida a unidade em duas partes: ½

Cruze (multiplique) ½ por ½: ¼

Some ¼ a 870: 3481/4

[Isso] é o quadrado de 59/2

Some ½, que você multiplicou, com 59: o lado do quadrado é 30/2.

O leitor poderá facilmente observar que isso é exatamente aplicar a fórmula (A). Mais uma vez, a formulação do problema pelos babilônios mostra a completa ausência de simbolismo algébrico em sua matemática.

Outro problema é o seguinte:

Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes a superfície: 25/4.

Chamando o lado do quadrado de *x,* este problema seria escrito hoje, em notação algébrica moderna, como

$$11x^2 + 7x = 25/4, \quad \text{(B)}$$

Sabemos que a solução da equação

$$\mathrm{ax}^2 + bx - c = 0,$$

com *c* positivo, é dada por

$$\frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} + ac} - \frac{b}{2}\right) \qquad \text{(C)}$$

No nosso caso, b=7 e a=11[4].

O procedimento indicado pelo escriba é:

Escreva 7 e 11. Multiplique 11 por 25/4: 275/4

Divida 7 em duas partes:7/2

Multiplique 7/2 por 7/2: 49/4

Some 49/4 a 275/4: 324/4

Isso é o quadrado de 9

Subtraia 7/2 de 9: escreva 11/2

O que devemos fazer com 11 que nos fornece 11/2 ? ½, seu quociente. O lado do quadrado é ½.

Em outro tablete, uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$ é multiplicada por *a*, obtendo $(ax)^2 + abx = ac$. Esta equação na incógnita $y = ax$ é então resolvida. Este é seguramente um dos primeiros casos registrado de uma mudança de variáveis!

Em muitos tabletes, uma equação da forma $x^2 + q = px$, com *p* e *q* positivos, é dada sob a forma do sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

Hoje passaríamos diretamente deste sistema para a equação $x^2 + q = px$, utilizando as relações entre os coeficientes da equação e suas raízes. Os babilônios procediam sistematicamente como segue:

Em primeiro lugar,

$$\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2},$$

de que obtemos imediatamente

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Assim

[4] Estamos mais uma vez usando nosso sistema de numeração decimal, para simplicar os cálculos.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Como

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2+y^2+2xy-4xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4}$$

segue-se que

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = \frac{(x-y)}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

e portanto

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Assim, obtemos facilmente que

$$x = \left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$y = \left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Repetimos que os babilônios não dispunham do simbolismo algébrico para escrever estas equações. Mas os procedimentos indicados nos tabletes para resolver os modelos de equações aqui apresentados correspondem à aplicação dessas fórmulas

Nos textos matemáticos babilônios que nos chegaram, a maioria dos problemas relativos a equações do 2º grau são dados nas formas que seriam escritas atualmente como

$$x + y = b, \qquad x \bullet y = a$$

ou

$$x - y = b, \qquad x \bullet y = a$$

ou podem ser transformados para obtê-las. Elas são conhecidas como formas normais das equações do 2º grau babilônias.

A relação básica usada para a solução de tais sistemas é

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{(x-y)^2}{4}$$

Vejamos outra maneira usada pelos babilônios para resolver o sistema $x+y=b, \quad xy=a.$

Fazendo $\frac{x-y}{2}=s,$ obtemos imediatamente que

$$x=\frac{b}{2}+s, \qquad y=\frac{b}{2}-s.$$

Para calcular *s* procederemos como segue.

É fácil ver que $xy=\left(\frac{b}{2}\right)^2 - s^2 = a$,

e podemos calcular facilmente *s* desta igualdade: $s^2=\left(\frac{b}{2}\right)-a.$

Uma vez conhecido s, obtemos facilmente $x-y$ e, como $x+y$ é dado, é fácil calcular *x* e *y*.

Como os babilônios chegaram a seus procedimentos para resolver equações do 2º grau?

Segundo Katz [KATZ, 1990, p. 32] o fato de que muitos problemas que conduzem a equações do 2º serem dados sob a forma do sistema

$$x+y=a, \qquad x \bullet y = b$$

sugere que os escribas babilônios investigavam a relação entre o perímetro e a área de uma superfície retangular:

> Parece que antigamente muitos acreditavam, por exemplo, que a área de um terreno dependia somente de seu perímetro. Há várias histórias que indicam que os que sabiam que isso não era verdade se aproveitavam dos que nisso acreditavam. É assim plausível que os escribas babilônios, a fim de demonstrarem que retângulos de perímetros iguais podiam ter áreas diferentes, construíram tabelas de áreas *b* relacionando-as com o perímetro constante 2*a*, usando valores diferentes para a base *x* e a altura *y*.

Como poderiam os babilônios ter procedido?

Fazendo $x=\frac{a}{2}+z, \quad y=\frac{a}{2}-z$, vemos que a área *b* é igual a

$$b = (\frac{a}{2} + z)(\frac{a}{2} - z) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2,$$

e portanto

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Desse valor para z obtemos x e y:

$$x = \frac{a}{2} + z = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$y = \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Pesquisas recentes e minuciosas sobre a matemática babilônia sugerem que os escribas babilônios chegaram a este resultado usando raciocínios geométricos, como no exemplo a seguir.

Consideremos o sistema $x + y = a, \quad x \bullet y = b$. Construa o quadrado de lado $\frac{a}{2}$.

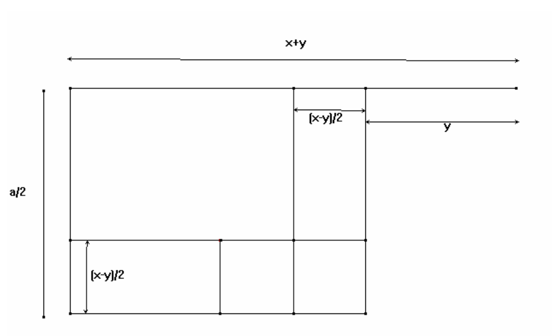

FIGURA 1

Como

$$\frac{a}{2} = x - \frac{x-y}{2},$$
$$\frac{a}{2} = y + \frac{x-y}{2}$$

o quadrado de lado $\frac{a}{2}$ excede o retângulo de lados x e y pelo quadrado de lado $\frac{x-y}{2}$.

O lado deste último quadrado mede $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$. Somando este comprimento com $\frac{a}{2}$, achamos *x*. Em seguida, é fácil achar y.

Interpretações geométricas semelhantes permitem reconstruir um caminho possível para a solução babilônia do sistema $x - y = a,\ \ x^2 + y^2 = b$.

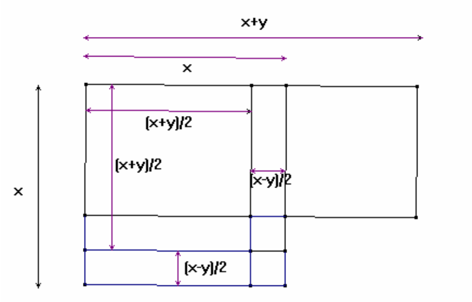

FIGURA 2

A figura 2 mostra que

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \left\{\frac{x+y}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{x-y}{2}\right\}^2$$

Então,

$$\frac{b}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Assim,

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{b}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Designando $\frac{x+y}{2}$ por *z,* temos então que

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = z + \frac{a}{2}$$
$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = z - \frac{a}{2}$$

Uma outra equação resolvida pelos babilônios é apresentada pelo sistema $x^2 + y^2 = b,\quad x + y = a.$

O método usado para resolvê-la é o seguinte. Seja *c* definido por

$$c=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{x^2+y^2+2xy}{4}}=\frac{x-y}{2}.$$

Então achamos *x* e *y* facilmente:

$$x=\frac{a}{2}+c,\qquad y=\frac{a}{2}-c$$

Para resolver equações do tipo $x^2+y^2=b,\quad xy=S,$ os babilônios usavam a identidade fácil de verificar:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Resumindo o que sabemos hoje, os babilônios podiam resolver qualquer uma das equações dadas a seguir em linguagem moderna, com nosso simbolismo algébrico:

- Equações com uma incógnita:

$$\begin{aligned}
&ax=b\\
&x^2=a\\
&x^2+ax=b\\
&x^2-ax=b\\
&x^3=a\\
&x^2(x+1)=a
\end{aligned}$$

- Sistemas de duas equações com com duas incógnitas (que dão origem a uma equação do segundo grau):

$$\begin{aligned}
&x+y=a, &&xy=b\\
&x-y=a, &&xy=b\\
&x+y=a, &&x^2+y^2=b\\
&x-y=a, &&x^2+y^2=b\\
&xy=s, &&x^2+y^2=b
\end{aligned}$$

OS GREGOS E AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

O caráter da Matemática grega é completamente diferente daquele da Matemática babilônia. Embora os próprios gregos reconhecessem que muito deviam à Matemática egípcia e babilônia, eles transformaram os conhecimentos destas duas civilizações em um corpo de resultados bem estruturado e no qual a argumentação é feita com um tipo bem específico de discurso, a demonstração matemática.

Por razões que não discutiremos aqui, e que possivelmente estão associadas à descoberta da existência de grandezas incomensuráveis, a maneira de os matemáticos gregos apresentarem seus resultados é geométrica, como nos *Elementos* de Euclides, escritos um pouco antes do ano 300 a. C. Assim, para entendermos como os gregos resolviam equações do 2º grau, teremos que fazer uma digressão geométrica examinando alguns teoremas dos *Elementos* de Euclides.

A ferramenta geométrica que permite resolver equações do 2º grau é a *aplicação de áreas*, que ocupa um lugar importante na Geometria grega.

1- Uma aplicação *de áreas parabólica* consiste na construção de um retângulo de área dada sobre um segmento de comprimento dado (que será um dos lados do retângulo).

A tradução algébrica moderna desta situação é a seguinte. Se *a* é o lado do retângulo e b^2 é a área dada, o problema se traduz na equação: $ax = b^2$.

Para resolvê-la, seja *ABCD* um quadrado de lado b. Prolonguemos *AB* até *E*, de maneira que o comprimento de *BE* seja *a*. Completemos a figura como indicado, para obtermos o retângulo *DGLF*, no qual a diagonal *FG* passa por *B*. Seja *x* o comprimento de *BH*. É imediato ver, comparando áreas, que a área do quadrado *ABCD* é igual à área do retângulo *BELH*, de que *BE* é um dos lados, e assim $ax = b^2$.

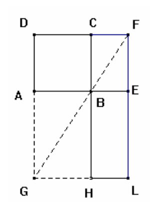

FIGURA 3

2- Uma *aplicação de áreas elíptica* consiste em dar a área do retângulo a ser construído e um segmento *AB* cujo comprimento deve ser igual à soma do comprimento da base e da altura do retângulo. A Figura 4 mostra a situação. Como *CB* é a altura do retângulo, vemos que *CDFB* é um quadrado. Como ao aplicar o retângulo *ACDE* sobre *AB* obtemos o quadrado *CBFD*, que é o que falta para completar o retângulo *AEFB*, temos uma aplicação com *falta*, ou elíptica.

Seja c^2 a área dada, *b=AB*, a soma das duas dimensões, e *x=CB* uma delas. Então a outra dimensão é igual a b-x e podemos escrever a equação $(b-x)x = bx - x^2 = c^2$

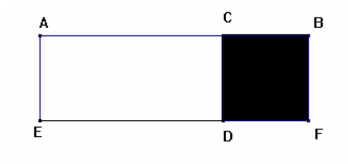

FIGURA 4.

3- Em uma aplicação de áreas hiperbólica, é dada a área do retângulo a ser construído e o segmento *AB* dado deve ser igual à diferença entre a base e a altura do retângulo. Se *AC* é a base do retângulo a construir, sua altura *CE* deverá ser igual a *BC*. Como ao aplicar o retângulo *ACEF* sobre *AB* obtemos o quadrado *CBDE* em excesso, temos uma aplicação com excesso ou hiperbólica.

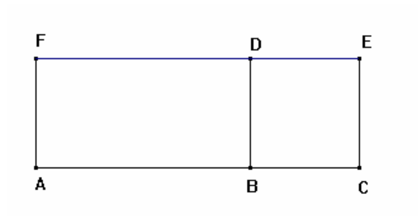

FIGURA 5

Mais uma vez, seja c^2 a área dada, *b* a diferença das duas dimensões e *x* a dimensão menor. Então a outra dimensão é igual a *b+x* e podemos escrever $(b+x)x = bx + x^2 = c^2$.

Se *x* for a dimensão maior, então a outra dimensão é *(x-b)* e temos a equação $x(x-b) = x^2 - bx = c^2$.

Vemos assim que obtemos três tipos de equações. Um deles, (D), para aplicações elípticas e dois outros, (E) e (F), para aplicações hiperbólicas:

$$(b-x)x = bx - x^2 = c^2 \quad \text{(D)}$$

$$(b+x)x = bx + x^2 = c^2 \quad \text{(E)}$$

$$x(x-b) = x^2 - bx = c^2 \quad \text{(F)}$$

Mas como resolver essas equações?

Para isso, veremos inicialmente duas proposições do Livro II dos *Elementos* de Euclides.

Proposição II.5 -- *Se uma reta for dividida em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais*, *juntamente com o quadrado sobre a reta entre os pontos de divisão*, *é igual ao quadrado sobre metade da reta*[5].

O exame da figura 6 torna o enunciado do teorema mais claro.

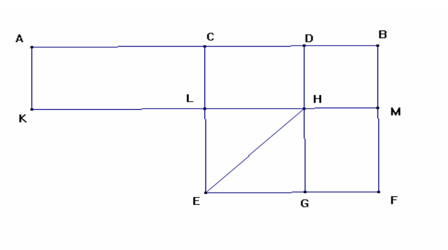

FIGURA 6

Para compreendermos o que Euclides quer demonstrar, lembre-se, em primeiro lugar, que os matemáticos gregos chamavam de reta o que nós hoje chamamos de segmento de reta.

Seja *C* o ponto médio do segmento de reta *AB* e *D* um ponto qualquer sobre *AB*. *O* que Euclides diz, em seu enunciado, é que a área do retângulo de base *AD* e altura *DB* somada à área do quadrado de lado *CD* é igual à área do quadrado de lado *CB*.

Com efeito, construa o quadrado *CEFB* e considere a diagonal *BE*. Pelo ponto *D*, trace a paralela *DG* a *CE*, a qual corta a diagonal *BE* no ponto *H*. Seja *KM* a paralela a *AB* e que passa por *H*. Seja *AK* o segmento de reta perpendicular a *AB* e que liga *A* a *K*. Como as áreas dos retângulos *CDHL* e *HMFE* são iguais, adicione a cada uma dessas áreas a área do quadrado *DBHM*. Então, as áreas dos retângulos *CLMB* e *DEFB* são iguais.

Mas as áreas dos retângulos *CLMB* e *AKMB* são iguais. Como as áreas dos retângulos *AKLC* e *CLMB* são iguais, por terem bases e alturas respectivamente iguais, segue-se que as áreas dos retângulos *AKLC* e *DGFB* também são iguais.

Adicione a cada uma dessas áreas a área do retângulo *CLHD*.

Então, a área do retângulo *AKHD* é igual à soma das áreas dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM*.

Mas os retângulos *AKLG* e *CLMB* têm áreas iguais.

[5] Repetimos aqui o enunciado desta proposição na primeira edição de Euclides em Português [SIMSON, 1773]: Se uma reta for dividida em duas partes iguais e em outras duas desiguais; será o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, igual ao quadrado da metade da linha proposta.

Como os retângulos *ACLK* e *CBLM* têm áreas iguais, segue-se que as áreas dos retângulos *AKLC* e *DGFB* também são iguais.

Adicionemos a cada uma dessas áreas a área do retângulo *CLHD*. Com isso, a área do retângulo *AKHD* é igual à soma das áreas dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM*.

Mas a área do retângulo *AKHD* é igual à área do retângulo de base *AD* e altura *DB*, pois *DH* é igual a *DB*.

Assim, a área dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM* é também igual à área do retângulo de base *AD* e altura *DB*.

Adicione a área do quadrado *LEGH*, que é igual à área do quadrado de lado *CD*, a ambas as áreas.

Segue-se então que a soma das áreas dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM* com a soma das áreas dos retângulos *LEGH* e *DHMB* é igual à soma das áreas do retângulo *AKHD* e do quadrado *LEGH*.

Mas a soma das áreas dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM* com a soma das áreas de *LEGH* e *DHMB* é igual à área do quadrado *CEFB*, construído sobre *CB*.

Assim, a soma das áreas do retângulo de base *AD* e altura *DB* e do quadrado *LEGH* (que é igual ao quadrado de lado *CD*) é igual à área do quadrado de lado *CB*, o que queríamos demonstrar.

Demonstramos esta proposição, em vez de simplesmente enunciá-la, porque acreditamos que nossos alunos devem, pelo menos uma vez na vida, ver uma demonstração dos *Elementos* de Euclides. Como estão muito habituados a reformulações das proposições de Euclides em linguagem algébrica, talvez tenham dificuldades em seguir o raciocínio implacável de Euclides, baseado totalmente em conceitos geométricos e talvez precisem de orientação para compreenderem bem a demonstração acima.

Qual a relação deste teorema com a resolução de equações do 2º grau?[6]

Em primeiro lugar, fazendo $AD=x$ e $DB=y$, este teorema pode ser traduzido, algebricamente, pela identidade:

[6] Não entraremos aqui na discussão sobre a chamada "álgebra geométrica grega" Esse termo é exemplo da tentação de reformular resultados antigos usando nossa linguagem algébrica moderna e de interpretar esses resultados sob nossos pontos de vista e maneiras de pensar, algébricos e analíticos.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

ou seja, se conhecemos $x+y$ (respectivamente $x-y$) e xy podemos achar $x-y$ (respectivamente $x+y$).

Suponha agora que, na figura 6, *AB=a* e *DB=x*. Então, $ax-x^2$ é igual à área do retângulo *AKHD,* a qual é por sua vez igual à soma das áreas dos retângulos *CLHD*, *DHMB* e *HGFM*. Se chamarmos a soma das áreas de *CLHD*, *DHMB* e *HGFM* de b^2, então, o problema de resolver a equação $ax-x^2=b^2$ se transforma, em linguagem geométrica, em construir sobre um segmento de reta de comprimento *a* um retângulo cuja área menos a área de um quadrado seja igual à área de um quadrado dado (b^2). Vemos assim que temos um problema de aplicação de áreas elíptico.

Mas como achar *x*, a raiz da equação $ax-x^2=b$?

Apresentamos a seguir a solução proposta pelo matemático escocês Robert Simson[7].

Seja $c=\sqrt{b}$. A equação se escreve então como $ax-x^2=c^2$.

Assim, interpretado geometricamente, nosso problema é aplicar um retângulo, igual a um quadrado (c^2) a um segmento (*a*) de tal maneira que haja falta de um quadrado, x^2.

Para fazer isso procedemos da seguinte maneira.

Dado *AB*, seja *C* seu ponto médio. Por *C*, levante um segmento *CO* perpendicular a *AB* e de comprimento *c*. Prolongue *OC* até o ponto *N*, tal que $ON = CB = \frac{1}{2}a$. Com centro em *O* e raio *ON* descreva uma circunferência que corta *AB* em *D*. Afirmamos que *DB=x*.

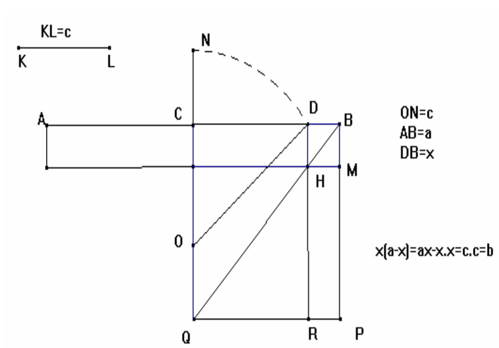

FIGURA 7

[7] Robert Simson viveu de 1687 a 1768. Publicou uma edição dos Elementos de Euclides muito conhecida, que teve mais de 70 edições em várias línguas, inclusive o português [SIMSON, 1773].

Com efeito, a soma das áreas do retângulo de lados *AD* e *DH* e do quadrado de lado *CD* é igual à área do quadrado de lado *CB*, que é igual à área do quadrado de lado *OD*, a qual, pelo teorema de Pitágoras, é igual à soma das áreas dos quadrados de lados *OC* e *CD*. Então, o retângulo de base *AD* e altura DB é igual ao quadrado de lado *OC*, ou seja, se $x=DB$, $ax-x^2=b^2$.

Assim, acabamos de resolver geometricamente um tipo de equação do 2º grau, mais precisamente o tipo $ax-x^2=b^2$, que corresponde às aplicações de áreas elípticas.

Analogamente ao que foi feito na Proposição II.5, Euclides mostra que

Proposição II.6 -- *Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada é igual, se lhe for adicionado o quadrado sobre a metade da reta, ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada*[8].

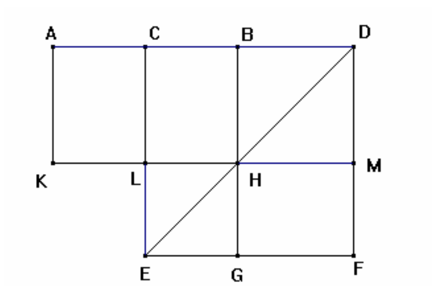

FIGURA 8

Neste caso, o retângulo de lados *AD* e *DB* é um retângulo aplicado a um segmento dado (*AB*) mas que o excede por um quadrado (cujo lado é igual a *BD*). O problema sugerido por este teorema é o de achar um retângulo deste tipo que seja igual a uma área dada, que suporemos ser um quadrado. Na linguagem geométrica das aplicações de áreas dos gregos, trata-se de aplicar a um segmento um retângulo igual a um quadrado dado e que excede o segmento por um quadrado dado[9].

Fazendo $AB=a$, $DB=x$, e supondo que o quadrado dado tem área b^2 , obtemos, como é fácil de ver, $ax+x^2=b^2$, um dos tipos associados às aplicações de áreas hiperbólicas.

Simson também apresenta uma solução para este problema em sua edição dos *Elementos* de Euclides, publicada em 1756, a qual foi traduzida um pouco depois para o português, por ordem do Marquês de Pombal [SIMSON, 1773].

[8] Na tradução de [SIMSON, 1773]: Se uma reta for dividida em duas partes iguais e em direitura com ela se puser outra reta; será o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta juntamente com o quadrado da metade da primeira reta, igual ao quadrado da reta que se compõe da mesma metade e da outra reta adjunta.

[9] Compare com HEATH, volume 2, pp. 385-387.

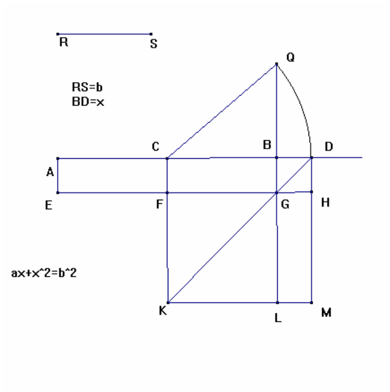

FIGURA 9

Para acharmos as soluções da equação $ax^2 + bx = b^2$, seja *AB*=*a* e trace *BQ* perpendicular a *AB* e de comprimento igual a *b*. Trace a reta *CQ*. Com centro *C* e raio *CQ*, trace uma circunferência que corta o prolongamento de *AB* em *D*. Afirmamos que *BD* é igual a *x*, o que procurávamos.

De fato, pela Proposição II, 6 dos *Elementos*, o retângulo de lados *AD* e *DB* mais o quadrado de lado *CB* é igual ao quadrado de lado *CD*, ou seja, ao quadrado de lado *CQ*, ou ainda aos quadrados de lados *CB* e *BQ* respectivamente. Assim, o retângulo de lados *AD* e *DB* é igual ao quadrado de lado *BQ*, ou seja,

$$ax + x^2 = b^2$$

Observe que este procedimento de Simson também funciona para resolver a equação

$$x^2 - ax = b^2$$

Para isso, é suficiente supor que *AB*=*a* e *AD*=*x*. Então, x^2-ax= área do retângulo de diagonal *CQ* + área do quadrado de diagonal *QD* + área do retângulo de lados *QH* e *HM*.

Para resolver esta equação, conhecemos b^2, CB^2 ou $[½(a)]^2$, que diferem da área procurada por CD^2. Assim podemos encontrar *D*, e portando *AD* ou *x*, pela construção já dada.

Agora, após termos visto como os gregos sabiam resolver geometricamente equações do 2º grau, voltemo-nos para os resultados de Diofanto[10] sobre o assunto. Ele resolve o problema, já atacado pelos babilônios, de achar dois números de maneira que seu produto e sua soma sejam iguais, respectivamente, a dois números dados, ou seja, achar *x* e *y* tais que $x + y = b, \quad xy = a$. Sua solução é exatamente a dos babilônios.

[10] Matemático grego que viveu, segundo alguns autores, em torno de 250 d.C. Foi "um estranho no ninho" na Matemática grega. Dedicou-se ao estudo das equações e da teoria dos números. Enquanto os matemáticos gregos clássicos seguiam modelos de argumentação rigorosos, geométricos, Diofanto foge a este padrão da matemática grega, mostrando procedimentos para a resolução de sistemas de equações.

Diofanto faz $\frac{x-y}{2}=s$, donde $x=\frac{b}{2}+s$ e $y=\frac{b}{2}-s$.

Para calcular s, temos que $xy=\left(\frac{b}{2}\right)^2-s^2=a$, uma equação do 2º grau bem simples.

Além disso, Diofanto mostra como resolver

$$x^2-y^2=a, \quad x+y=b,$$
$$xy=a, \quad x-y=b,$$
$$\frac{x}{y}=p=3, \quad \frac{x^2+y^2}{x+y}=q=5.$$

No último caso, ele faz *s=y.* A solução deste sistema é achada como segue:

$$\frac{x}{y}=p, \qquad \frac{x^2+y^2}{x+y}=q, \qquad x=ps.$$

Então

$$\frac{x}{y}=p, \qquad \frac{x^2+y^2}{x+y}=q, \qquad x=ps.$$

$$\frac{p^2s^2+s^2}{ps+s}=q \quad \Rightarrow \quad \mathrm{s^2(p^2+1)=qs(p+1).}$$

$$\mathrm{s=\frac{q(p+1)}{p^2+1}}$$

Então,

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{p^2s^2+s^2}{ps+s}=q \quad \Rightarrow \quad \mathrm{s^2(p^2+1)=qs(p+1).}$$

E obtemos imediatamente que

$$\mathrm{s=\frac{q(p+1)}{p^2+1}}$$

o que nos permite calcular *x* e *y*.

Conhecendo *x+y* e *x-y* calculam-se facilmente, mais uma vez, *x* e *y*.

Outras civilizações também estudaram a equação do 2º grau. Assim, na China, no *Nove capítulos da arte matemática*[11], encontramos um exemplo que em linguagem moderna seria escrito como $x - y = d, \quad x^2 + y^2 = s^2$. Não nos deteremos aqui nas contribuições chinesas para a solução da equação do 2º grau.

[11] Texto matemático chinês, de data incerta, escrito provavelmente em torno de 200 a.C. Nele se encontram resultados que sabemos serem mais antigos, por se encontrarem em textos incompletos anteriores.

OS HINDUS E A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Vejamos agora as contribuições dos matemáticos hindus para o estudo da equação do 2º grau.

O período clássico da matemática hindu se dá entre 400 e 1200 depois de Cristo. Após isso, até 1600, a Matemática declinou no norte do sub-continente indiano e temos trabalhos sobre séries infinitas e sobre análise em Kerala, região situada na extremidade sul do sub-continente indiano.

Os primeiros registros de matemática na Índia se encontram nos vários *Sulvasutras*[1], escritos provavelmente entre 800 a.C. e 500 a.C. e que se transmitiram oralmente durante muito tempo. Eles registram conhecimentos matemáticos de idade desconhecida, mas certamente bem anteriores. Devemos mencionar também o *manuscrito Bakshali*[2], fonte importante para o conhecimento da Matemática hindu.

As equações do 2º grau surgem pela primeira vez na matemática hindu nos *sulvasutras*, sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem que sejam apresentadas soluções. Mais tarde, no manuscrito Bakshali, é descrito um procedimento de solução que corresponde à fórmula moderna

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}$$

para a equação $ax^2 + bx - c = 0$.

Ariabata I[3], em torno de 500 d.C., chega a uma equação do 2º grau a partir de um problema de progressões aritméticas.

Sejam *a* o primeiro termo e *d* a razão da progressão aritmética, respectivamente. Consideremos os termos de (*p*+1) até (*p*+*n*). Se *m* é o termo médio, temos:

$$m = a + \left(\frac{n-1}{2} + p\right)d$$

Então a soma desses termos é $S = a_{p+1} + ... + a_{p+n} = nm$.

Se *p*=0, podemos obter *n* em função de *a*, *d* e *S*:

---

[1] Os *sulvasutras* tratam dos conhecimentos teóricos necessários para a construção de altares. Eles são escritos em versos, e parecem terem sido escritos em torno de 600 a.C.

[2] Manuscrito matemático, encontrado em 1881, em péssimo estado, próximo a uma aldeia indiana chamada Bakshali. Supõe-se que ele data do século VII d.C.

[3] Matemático hindu que viveu em torno de 476 d.C. Escreveu o *Ariabatia* (490 d.C.). Não confundir com o matemático conhecido com Ariabata II, que viveu entre 950 e 110, e do qual trataremos mais tarde.

$$S = n\times\left(a+\frac{n-1}{2}\right)d$$
$$2S = (2an+n^2-n)d = n^2d+n(ad-d)$$
$$n^2d+n(ad-d)-2S=0$$
$$n=\frac{-(a-1)+\sqrt{d^2(a-1)^2+4S^2}}{2d}$$

Mais uma vez, frisamos que nosso simbolismo algébrico não estava disponível na época. Mas os procedimentos de cálculo descritos por Ariabata correspondem exatamente a esta fórmula.

Ariabata I mostra também como achar *x* e *y* conhecendo *xy* e *x-y*: A expressão $\frac{\sqrt{4xy+(x-y)^2}\pm(x-y)}{2}$ nos dá *x* e *y* respectivamente.

Bramagupta, que nasceu em 598 e morreu após 665, também ensina como resolver a equação $ax^2+bx=c$, com *a*, *b* e *c* positivos. Seu procedimento corresponde exatamente à fórmula

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

ou

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}.$$

O matemático hindu Báskara II também mostra como resolver a equação $ax^2+bx=c$. Para isso, em um de seus trabalho ele multiplica ambos os membros da equação por *a*:

$$(ax)^2+(ab)x=ac$$

Em seguida, “completa os quadrados” explicitamente:

$$(ax)^2+(ab)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

É interessante observar que, já nessa época, havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 ou 2. Bramagupta afirma que “o quadrado de negativo e de positivo é positivo e de 0 é 0”.

Báskara II afirma que

> O quadrado de uma grandeza positiva ou de uma grandeza negativa é positivo: e a raiz [quadrada] de uma grandeza positiva é dupla, positiva e negativa. Não há raiz quadrada de uma grandeza negativa, pois ela não é uma grandeza.

Como exemplo de uma equação que tem duas raízes positivas, Báskara II propõe o seguinte problema:

> A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca em um bosque. Além disso, 12 macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual o total de macacos?

Este problema pode ser traduzido, em linguagem algébrica, como

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x,$$

cujas soluções são *x*=48 e *x*=16.

Báskara II propõe também o seguinte problema

> A quarta parte de um bando de macacos menos 3, elevada ao quadrado se refugiou em uma caverna. Era possível ver ainda um macaco.

A tradução algébrica desta problema é

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$$

cujas soluções são 50 e 5. A solução *x*=5 é descartada porque $\left(\frac{x}{5} - 3\right)$ seria então negativo.

Bramagupta e Báskara II mostram também como calcular os comprimentos *p* e *q* determinados sobre a hipotenusa pela altura *h* do triângulo retângulo *ABC*:

$$p^2 + h^2 = a^2$$
$$q^2 + h^2 = b^2.$$

Assim, $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$.

Como *p+q=c*, temos

$$p-q=\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$$
$$p=\frac{1}{2}\left[c+\frac{(a+b)(a-b)}{c}\right]$$
$$q=\frac{1}{2}\left[c-\frac{(a+b)(a-b)}{c}\right]$$

Se *a*=17, *b*=10 e *c*=9, temos *p*=15, *q*=-6 e Báskara afirma que "isso é negativo, ou seja, na direção oposta".

A primeira descrição da regra geral para achar as raízes da equação do 2º grau parece ser encontrada em um trabalho de Sridhara[4], que não foi preservado. Báskara II e outros o citam, como segue:

> Multiplique ambos os lados [da equação] por uma quantidade conhecida igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então [extraia] a raiz quadrada.

OS ÁRABES E A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Já mostramos como os babilônios, gregos e hindus resolviam equações do 2º grau. Continuaremos agora nossa viagem examinando métodos de resolução da equação do 2º grau pelos árabes.

Os árabes assimilaram a Matemática dos gregos e fizeram progressos em várias áreas, como, por exemplo, em trigonometria, nas equações algébricas e em pesquisas sobre o quinto postulado de Euclides. Veremos inicialmente as contribuições de al-Khowarizmi para a solução das equações do 2º grau.

Pouco se conhece da vida de Muhammad ben Musa al-Khowarizmi (780-850). Segundo um de seus biógrafos árabes, al-Khowarizmi foi o primeiro matemático muçulmano a escrever sobre a "solução de problemas usando al-jabr e al-muqabala".

O significado usual de *jabr* é adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, a fim de eliminar termos negativos. Um outro significado menos freqüente é multiplicar ambos os lados de uma equação pelo mesmo número a fim de eliminar frações.

[4] Viveu entre 850 e 950 d. C. Não são conhecidas as datas exatas de seu nascimento e de sua morte.

Muqabala significa a redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação. No entanto, o matemático al-Karaji usa esta palavra no sentido de igualar. O significado literal da palavra significa comparar.

Em seu livro *Al-jabr we'l muqabala, cujo* título completo é *O livro compendioso dos cálculos com al-jabr e al-muqabala,* al-Khowarizmi dá dadas regras para as resoluções de equações do primeiro e do segundo graus. Sua álgebra é retórica, ao contrário dos progressos iniciais anteriormente feitos por Diofanto no sentido de uma álgebra simbólica.

Inicialmente al-Khowarizmi ensina como resolver as equações $x^2=5x$, $\frac{x^2}{3}=4x$ e $5x^2=10x$. Outros capítulos tratam, respectivamente, de equações de um dos seguintes tipos, $ax^2+bx=c^2$, $ax^2+c=bx$ e $bx+c=ax^2$, nas quais os coeficientes são todos positivos. Em sua obra são consideradas apenas raízes positivas.

O primeiro dos três casos acima é exemplificado, no Capítulo IV, com as equações $x^2+10x=39$, $2x^2+10x=48$ e $\frac{1}{2}x^2+5x=28$.

Al-Khowarizmi apresenta a equação $x^2+10x=39$ e sua solução como segue:

> Por exemplo: um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares; ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez de suas próprias raízes, é equivalente a trinta e nove?
>
> A solução é: tome a metade do número de raízes, o que neste exemplo é igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes, que é quatro. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove.

Isso é equivalente a usar a fórmula bem conhecida

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2}$$

Essa solução é justificada geometricamente da seguinte maneira: Seja *AB=x* o lado do quadrado *ABCD.* Prolonguemos *BA* e *AD* para obtermos *AE=DF*=5 e construa o quadrado *EBGL*. O polígono *EHDFGB* tem área igual a x^2+10x, ou seja, 39. Somando a esta área a área do quadrado *HDFL*, que é igual a 25, obtem-se o quadrado *EBGL*, cuja área é igual a 64. O lado deste quadrado é 8. Subtraindo disso 5, obtemos a raiz 3.

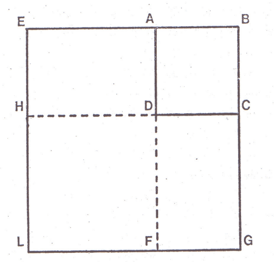

FIGURA 10

No Capítulo V é tratado somente um exemplo, o da equação $x^2 + 21 = 10x$. As duas raízes positivas, 7 e 3 são consideradas. Esta equação é do tipo $x^2 + q = px$ e al Khowarizmi afirma que quando $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, o "exercício é fútil" e que se $x = \frac{p}{2}$, existe então somente uma solução, que é $x = \frac{p}{2}$. Isso é uma conseqüência imediata do fato de que esta equação tem soluções (reais) se e somente se $p^2 - 4q \geq 0$, ou seja, se $q \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

As ilustrações abaixo (FIGURAS 11-A e 11-B) justificam a solução da equação $x^2 + q = px$, exemplificada com $x^2 + 21 = 10x$. A primeira figura ilustra geometricamente como encontrar a solução $x < \frac{p}{2}$.

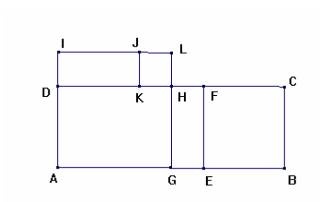

FIGURA 11-A

O quadrado *EBCF* tem lado *x*, e portanto no retângulo *ABCD* temos que *AD*=*x*.

Seja *G* o ponto médio de *AB*, cujo comprimento mede 10. Vemos assim que *GE*=5-*x*.

Coloquemos o retângulo *GEFH* sobre *DC*, como mostrado na figura, de maneira que *GE*=*DI*=5-*x* e *DK*=*x*. Assim, *AI*=*AD*+*DI*=*x*+5-*x*=5.

De $x^2 + 21 = 10x$ vemos que $A_{ADFE} = A_{ADHG} + A_{DKJI} = 21$. No retângulo *KHLJ*, *KH*=5-*x*, logo o retângulo é um quadrado. Mas a área do quadrado *AGLI* é igual a 25, logo a área do quadrado

KHJL é 25-21=4, ou seja, $(5-x)^2=4,\ \ (5-x)=2,\ \ x=3.$ Isso equivale a utilizar nossa fórmula bem conhecida

$$x=\frac{p}{2}-s=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

A FIGURA 11-B ilustra a solução no caso em que $x>\frac{p}{2}$.

Na figura, *AD*=10, *AB*=*BD*=5 e *AK*=*x*. Seja *AK*=*AC*=*x*. Assim, *BC*=*x*-5 e *CD*=10-*x.*

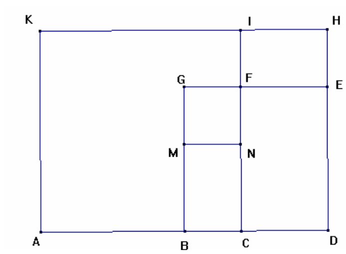

FIGURA 11-B

Construa o quadrado *BDEG*, cujo lado será 5. Marque, sobre *BG*, o ponto *M* tal que *BM*=10-*x*. Então, *GM*=*BC*=*x*-5 e *MNFG* é um quadrado.

Observe então que *FE*=*BM* e *IF*=*MN*.

Lembrando que $x^2+21=10x$, vemos que $A_{CDHI}=(10-x)(x)=10x-x^2=21$.

Ora, como *IFEH* e *BCMN* são congruentes, vemos imediatamente que

$$10x=A_{ADHK}=A_{ACIK}+A_{CDHI}=x^2+21$$

Mas, além disso,

$$\begin{aligned}25=5^2=A_{BDEG}&=A_{BCNM}+A_{MNFG}+A_{CDEF}=\\=A_{FEHI}&+A_{CDEF}+A_{MNFG}=21+(x-5)^2\end{aligned}$$

Assim, temos enfim que $4=(x-5)^2$ e portanto *x*=7.

O caso das equações do tipo $px+q=x^2$, exemplificado por $3x+4=x^2$, é resolvido no Capítulo VI e a solução é justificada pelas seguintes ilustrações

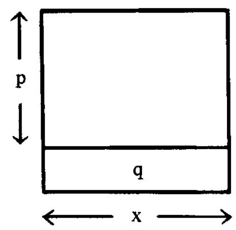

FIGURA 12-A

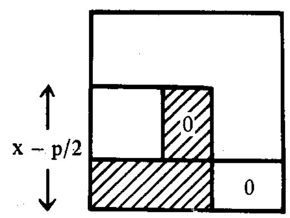

FIGURA 12-B

Divide-se o comprimento *p* ao meio e traçam-se os quadrados de lados $\frac{p}{2}$ e $s = x - \frac{p}{2}$ respectivamente. Devido à congruência dos retângulos designados por *O*, a figura hachurada tem área *q*, e assim

$$s^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$x = s + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

Os tipos de equações discutidos por al-Khowarizmi serão tratados por matemáticos árabes posteriores, até Baha al-Din (1547- 1622) exatamente desta maneira ou de maneiras semelhantes. Por vezes os mesmos exemplos numéricos são usados. As demonstrações geométricas apresentadas refletem a influência de Euclides.

Além das contribuições de al-Khowarizmi, citemos também os trabalhos de Tabit ben Qurra, que viveu de 836 a 901 e foi um grande cientista árabe, com contribuições importantes em vários campos. Ele escreveu um pequeno tratado sobre a verificação de problemas de álgebra por demonstrações geométricas, em que mostra como resolver as equações $x^2 + mx = n$, $x^2 + b = ax$ e $x^2 = ax + b$.

O matemático Al-Karagi[5] fornece, além das provas geométricas, uma *solução do* tipo *de Diofanto* para cada caso apresentado. Ele procura sempre completar os quadrados. No caso de $x^2 + 10x = 39$ isso não apresenta dificuldades. No entanto, ao tratar de $x^2 + 21 = 10x$, como os árabes não trabalhavam com números negativos, é necessário proceder como abaixo:

$$x^2 + 21 + 25 = 10x + 25$$
$$x^2 + 21 + 25 - 21 = 10x + 25 - 21$$
$$x^2 + 25 = 10x + 4$$
$$x^2 + 25 - 10x = 4$$

Assim, temos que

$$(x-5)^2 = 4$$
$$x - 5 = 2, \quad x = 7$$
$$5 - x = 2, \quad x = 3$$

CONTRIBUIÇÕES POSTERIORES

No século XII, o livro de álgebra de al-Khowarizmi foi traduzido para o latim por Gerard de Cremona (1114-1187) e por Robert de Chester (1145). Além disso, os conhecimentos árabes sobre a equação do 2º grau foram também introduzidos na Europa pelo livro *Líber embadorum* de Abraão bar Hija, conhecido no ocidente por Savasorda, matemático judeu falecido em 1136 e que trabalhou em Barcelona. Seu trabalho foi traduzido pelo matemático italiano Platão de Tívoli, que viveu de 1134 a 1145 em Barcelona e traduziu para o latim obras do árabe e do hebraico. Como feito por al-Khowarizmi, as fórmulas de solução são simplesmente dadas e justificadas por ilustrações. Sua percepção de que algumas equações de graus superiores podem ser transformadas em equações do 2º grau tornou-se conhecida, em particular por Luca Paccioli.

Embora não tenha feito contribuições originais e importantes sobre nosso assunto, Leonardo de Pisa, conhecido também como Fibonacci, que viveu aproximadamente de 1170 a 1240, destaca-se por ter dado pessoalmente contribuições importantes em Matemática e difundido a Matemática árabe no ocidente.

Quando Fibonacci viveu, o nível da Matemática na Europa era muito baixo. Então, os matemáticos árabes eram de longe melhores do que os matemáticos do Ocidente. É com ele que a matemática ocidental começa a progredir, superando os árabes. Em seu livro *Líber*

[5] Matemático árabe que viveu do fim do século X ao princípio do século XI em Bagdá.

Abbaci, escrito em 1202, citando “Maumeth”, ou seja, Maomé, querendo referir-se a al-Khowarizmi, apresenta a resolução das seguintes equações:

$$ax^2 = bc$$
$$ax^2 = c$$
$$bx = c$$
$$ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 + c = bx$$
$$ax^2 = bx + c$$

Neste livro, ele resolve uma das equações que al-Khowarizmi já tinha tratado, $x^2 + 10x = 39$ e justifica geometricamente sua solução, de maneira semelhante à de al-Khowarizmi. Na época, a incógnita *x* era chamada de *radix* (raiz), seu quadrado *quadratus* ou *census*, e o termo constante *numerus*. Assim, essa equação era escrita *Census et decem radicis equantur* 39.

Um matemático do século 15 muito pouco conhecido, Benedetto de Florença, publicou em 1463 sua obra mais importante, *Trattato di praticha d’arismetica*, no qual mostra como resolver as equações

$$x^2 = px$$
$$x^2 + px = q$$
$$x^2 = q$$
$$x^2 + q = px$$
$$px = q$$
$$x^2 = px + q$$

As resoluções apresentadas são exatamente as de al-Khowarizmi.

Benedetto de Florença não fez muitas contribuições originais para o estudo das equações do 2º grau, mas ele é importante por divulgar no Ocidente as técnicas algébricas dos árabes. No entanto, ele acrescentou os seguintes tipos de equações aos já estudados por al-Khowarizmi

$$x^3 + px^2 = qx$$
$$x^4 = px$$
$$x^4 + px^2 = q$$
$$x^4 + q = px^2$$
$$x^4 = px^2 + q$$
$$x^4 + x^2 = 110$$

Em seu tratado, Benedetto apresenta uma lista de 140 problemas numéricos tirados de um *Trattato di praticha*, hoje perdido, escrito pelo florentino Master Biaggio, que morreu em torno de 1340. Vinte e oito destes problemas são de Matemática comercial. Os outros são resolvidos por equações dos tipos estudados anteriormente por Benedetto no mesmo livro. Um deles conduz à equação $\frac{1}{12}x + (2+\frac{1}{12})x + 12 = x$. Outro dá origem à equação $x^4 + x^2 = 110$.

Além dos matemáticos que citamos, vários outros italianos deram contribuições para o estudo das equações algébricas, entre elas a equação do 2º grau.

No Ocidente, foi reconhecido que permitir que os coeficientes de uma equação do 2º grau sejam negativos ou nulos tornava possível obter uma única forma padrão para todos os tipos de equações do 2º grau discutidos separadamente até então. Michael Stifel (matemático alemão que viveu de 1487 a 1567. Foi primeiramente monge Augustino e depois pároco luterano) afirma isso explicitamente e reduz todas as equações do 2º grau à forma $x^2 = \pm px \pm q$ O fato que Stifel afirma que $x^2 = px + q$ e $x^2 = -px + q$ só têm uma raiz, e que $x^2 = -px - q$ não é tratado, mostra que, para ele, os números negativos não tinham existência própria, eram somente termos a serem subtraídos de um dos membros da equação. No entanto, em outros locais de suas obras ele realmente considerou números negativos. Stifel dá uma regra geral para resolver uma equação do 2º grau, independentemente de os coeficientes serem positivos ou negativos:

> Comece com a quantidade das raízes [i.e., p], divida-o e substitua a raiz por sua metade, guardando essa metade até que toda a operação tenha sido completada (ou seja, substitua $(\pm)px$ por $(\pm)\frac{p}{2}$.
>
> Multiplique essa metade por ela mesma.
>
> Some ou subtraía, como pedido pelo sinal do membro (ou seja, forme $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q$).

Da soma ou da diferença, extraia a raiz quadrada (ou seja, calcule $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q}$).

Adicione ou subtraia o quadrado $[(\pm)\frac{p}{2}]$ como o sinal o exige ($\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q} \pm \frac{p}{2}$).

O matemático francês Viète (1540-1603) trata as equações do 2º grau aceitando os números negativos como quantidades que devem ser subtraídas, como Stifel. Somente com Stevin (matemático belga, 1548-1620) é que se aceitam coeficientes verdadeiramente negativos em uma equação do 2º grau, ou seja, números negativos considerados como tais.

Durante muito tempo, no Ocidente, os números negativos foram considerados *Numeri ficti*, números fictícios, como dizia Stifel. Cardano lhes deu o mesmo nome. Raízes negativas de equações do 2º grau foram reconhecidas somente aos poucos. Stevin as chama de soluções sonhadas (solutions songées) mas afirma que ela são úteis para achar soluções verdadeiras de outras equações. Viète e Harriot (matemático inglês que viveu de 1560 a 1621) não as aceitavam. Somente com o importante teorema de Girard[6] é que elas se impõem. Mas mesmo assim Descartes[7] as chama de *racines fausses* (raízes falsas).

Passemos agora a estudar a contribuição do matemático francês François Viète (1540-1603) para o estudo da resolução da equação do 2º grau.

Viète teve uma carreira bem sucedida como advogado e conselheiro real. Em 1591, ele publicou seu *In artem analyticem isagoge*, livro extremamente importante para a história da álgebra. Viète foi o primeiro matemático a usar letras não somente para representar incógnitas, mas também constantes. Ao contrário do que fazemos hoje, ele representava as incógnitas por vogais e as constantes por consoantes.

As equações $A^2 + AB = D^2$, $A^2 - AB = D^2$, $AB - A^2 = D^2$ são tratadas por Viète[8] em seu *Effectionum geometricarum canônica recensio*, que mostra como resolvê-las

[6] Albert Girard viveu de 1595 a 1632 e passou a maior parte de sua vida na Holanda, embora tenha nascido na França. Devemos a ele a primeira formulação do teorema fundamental da álgebra, sobre o número de raízes de uma equação polinomial.

[7] Filósofo e matemático francês (1596, 1650). Fez trabalhos fundamentais em filosofia e em matemática. Foi um dos criadores do que hoje se conhece como geometria analítica. Seu livro, La *Géométrie*, um dos apêndices ao seu *Discours de la Méthode*, revolucionou a matemática, mostrando como interrelacionar a álgebra e a geometria.

[8] Matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Desempenhou papel extremamente importante no desenvolvimento da álgebra. Entre outras contribuições, introduziu o uso de letras para representar números, em seu *In artem analyticem isagoge*, de 1591.

geometricamente Lembremos que, na notação de Viète, a incognita é *A* e que *B* e *D* são dados. As soluções geométricas das três equações estão mostradas nas figuras a seguir

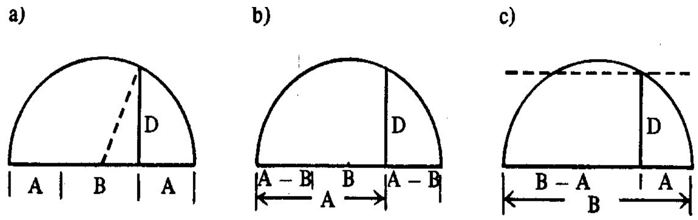

FIGURA 13

A fim de deduzir a fórmula de Báskara, Viète procedeu como segue.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, façamos $x = y + z$. Substituindo esse valor de *x* na equação, obtemos

$$a(y+z)^2 + b(y+z) = c = 0$$

$$ay^2 + (2az+b)y + az^2 + bz + c = 0$$

Achemos os valores de *z* para os quais esta equação em y não tenha o termo de primeiro grau, $(2az+b)y$:

$$2az + b = 0$$

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo este valor de *z* na equação, obtemos

$$ay^2 + a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = 0$$

$$4a^2y^2 = b^2 - 4ac$$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este resultado é exatamente a fórmula de Báskara.

Outra maneira, mais complicada, para resolver algebricamente a equação do 2º grau foi proposta pelo matemático italiano G.C. Fagnano[9] em 1735.

Façamos

$$x = \frac{z_1 - uz_2}{1-u}$$

Substituindo este valor de *x* na equação, obtemos

$$a\left(\frac{z_1 - uz_2}{1-u}\right)^2 + b\left(\frac{z_1 - uz_2}{1-u}\right) + c = 0$$

ou seja,

$$(az_2^2 + bz_2 + c)u^2 - 2\left[az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c\right]u + (az_1^2 + bz_1 + c) = 0\,.$$

Esta equação em *u* tem o termo de primeiro grau nulo quando

$$az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c = 0\,.$$

Fazendo $z_2 = 0$, temos

$$cu^2 = -az_1^2 - bz_1 - c$$

Agora, utilizando

$$az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c = 0$$

obtemos

$$z_1 = -\frac{2c}{b}\,.$$

Substituindo este valor, vemos que

[9] Giulio Cesare Fagnano (1682, 1766), conde de Fagnani, nasceu em família nobre. Deixou trabalhos importantes em geometria, particularmente a geometria do triângulo. Em álgebra, mostrou maneiras de resolver as equações do 2º, 3º e 4º grau.

$$cu^2 = -a\frac{4c^2}{b^2} + \frac{2bc}{b} - c$$

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{b^2}$$

$$u\pm = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{b^2}}$$

Como (lembre-se que fizemos $z_2 = 0$)

$$x = \frac{z_1 - uz_2}{1-u} = \frac{z_1}{1-u}$$

temos que

$$x = \frac{z_1}{1-u} = \frac{-\frac{2c}{b}}{1 \mp \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{b^2}}} = \frac{-2c}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

AS SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DE DESCARTES E DE STEINER

Apresentaremos, por fim, duas soluções geométricas para a equação do 2º grau, devidas respectivamente a Descartes e a Steiner.

Podemos supor que a equação do 2º grau é da forma $x^2 + ax + b = 0$.

Usando a regra dos sinais de Descartes, as equações do 2º grau que podemos garantir terem raízes reais positivas são:

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0$$
$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

A primeira e a segunda dessas equações têm sempre uma raiz real positiva. A terceira tem ambas as raízes reais se $\frac{a^2}{4} - b^2 \geq 0$. Como estamos tentando construir geometricamente as raízes dessas equações, suporemos que *a*, *x* e *b* representam comprimentos e escrevemos b^2 para garantir a homogeneidade dos vários termos da equação, como fazia Descartes.

No livro I de sua obra revolucionária *La Géométrie*, Descartes apresenta a seguinte solução para achar a raiz real positiva da primeira equação.

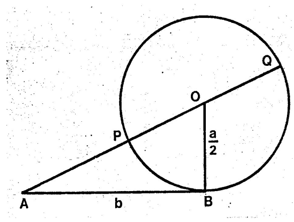

FIGURA 14

Em primeiro lugar, é necessário escolher um segmento unitário, ou seja, cuja medida será considerada como igual a 1. Todos os outros segmentos terão suas medidas comparadas com ele.

Considere um segmento *AB* de comprimento *b* e levante por *B* uma perpendicular a *AB* e escolha sobre ela um ponto *O* tal que *OB* tenha comprimento *a*/2. Com centro em *O*, descreva a circunferência com raio *OB*. Sejam *P* e *Q* os pontos em que a reta definida por *A* e *O* intercepta a circunferência.

Pela propriedade da potência de um ponto relativamente a uma circunferência, temos que $b^2 = AP \bullet AQ$. Fazendo $AP = x$, temos que $AQ = x + a$ e assim $b^2 = x(x+a) = x^2 + ax$, ou seja, $x^2 + ax - b^2 = 0$ e vemos que realmente construímos uma solução (real positiva) para a primeira das equações que apresentamos acima.

Para achar a solução real positiva da segunda das equações, é suficiente fazer *AQ=x.* Então, *AP=x-a* e vemos que $b^2 = x(x-a) = x^2 - ax$, ou seja, conseguimos achar a raiz procurada.

A fim de resolver a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, Descartes, na mesma obra, procedeu como segue.

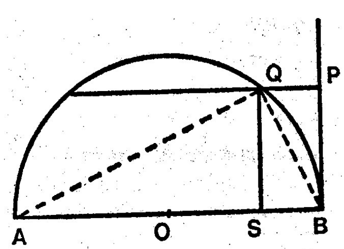

FIGURA 15

Trace um segmento *AB* de comprimento *a* e seja *O* seu ponto médio. Com centro em *O* e raio *AO* descreva uma semi-circunferência. Pelo ponto *B*, levante uma perpendicular a *AB* e escolha sobre ela o ponto *P*, tal que o segmento *BP* tenha comprimento igual a *b*. Por *P*, trace uma paralela a *AB*. Como $\frac{a}{2} \geq b$ (Por quê?), vemos que esta paralela intercepta a circunferência pelo menos em um ponto. Seja *Q* um dos pontos de intersecção e *S* o pé da perpendicular baixada de *Q* sobre *AB*. Denote por *x* o comprimento de *SB*.

Pelas propriedades métricas em um triângulo retângulo, temos que $QS^2 = AS \bullet SB$. Assim, $b^2 = x(a-x)$, ou seja, $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Jacob Steiner, matemático suiço que viveu de 1796 a 1863[10] e que nos deixou importantes trabalhos sobre Geometria, construiu geometricamente as soluções reais, positivas ou negativas, de uma equação do 2º grau da seguinte maneira.

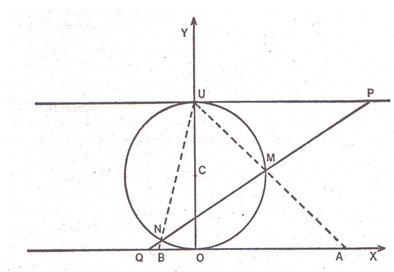

FIGURA 16

Consideremos a equação $x^2 + px + q = 0,$ com $p \neq 0$. Essa é a única restrição que impomos aos coeficientes *p* e *q*. Tome um sistema de eixos cartesianos ortogonais e sobre o eixo vertical, *OY*, escolha *U* tal que o comprimento *OU* seja igual a 1 e trace a circunferência de centro *O*, sobre *OY* e cujo diâmetro é *OU*. Por *U*, trace uma paralela ao eixo *OX* e tome sobre ela o ponto *P* tal que o comprimento orientado *UP* seja igual $-\frac{1}{p}$ e marque sobre *OX* o ponto *Q* cuja abcissa é igual a $-\frac{q}{p}$.

Sejam *M* e *N* os pontos de intersecção da reta definida por P e *Q* com a circunferência. A partir de *U*, projete *M* e *N* sobre *OX*, obtendo os pontos *A* e *B* respectivamente, cujas abcissas são, respectivamente, α e β.

Os triângulos semelhantes *UMP* e *AMQ* permitem escrever

$$UP : QA = UM : MA$$

Além disso, o triângulo retângulo *UAO* nos permite escrever

[10] Steiner fez contribuições importantes em geometria, particularmente geometria projetiva. Explorou muito bem a projeção estereográfica do plano sobre a esfera.

$$UM : MA = OU^2 : OA^2$$

Estas duas proporções nos permitem escrever

$$-\frac{1}{p} : (\frac{q}{p} + \alpha) = 1 : \alpha^2$$

Ou seja,

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 .$$

Analogamente, poderíamos obter

$$\beta^2 + p\beta + q = 0.$$

E assim achamos as raízes da equação.

É fácil ver que a reta *PQ* intercepta necessariamente a circunferência ou lhe é tangente. Com efeito, a equação da reta, como se pode verificar facilmente, é $px + 1 + (1-q)(y-1) = 0$.

Se denotarmos por μ a distância do centro C da circunferência à reta, temos

$$\mu^2 = \frac{(q+1)^2}{4[p^2 + (q-1)^2]} = \frac{(q+1)^2}{4[p^2 - 4q + (q+1)^2]}$$

Se $p^2 - 4ac \geq 0$, segue-se que $\mu^2 \leq \frac{1}{4}$, e assim a reta intercepta a circunferência em pelo menos um ponto, ou seja, a equação admite pelo menos uma raiz real.

Outro método para achar as soluções da equação do 2º grau é o seguinte, apresentado primeiramente por Bézout[11] e Euler[12] e depois por Sylvester[13] e Hesse[14].

Consideremos a equação $x^2 + px + q = 0$ e façamos $x = u + z$. Então

$$x^2 = (u+z)x ,$$

$$x^3 = (u+z)x^2 .$$

Podemos então escrever

[11] Étienne Bézout, francês, viveu de 1730 a 1783. Escreveu vários livros-texto muito difundidos e trabalhou, entre outros assuntos, em álgebra. Seu teorema sobre o número de intersecções de duas curvas algébricas é fundamental.

[12] Leonard Euler (1707-1783), suíço, foi um dos gigantes da Matemática no século XVIII, o qual é por alguns historiadores da Matemática denominado o século de Euler. Fez contribuições fundamentais em geometria, análise e teoria dos números.

[13] James Joseph Sylvester (1814-1897) foi um matemático inglês que deu importantes contribuições à álgebra. Devemos a ele a introdução das matrizes.

[14] Otto Hesse (1811-1874) nasceu em Königsberg, então Alemanha, e atualmente Kalingrad, na Rússia. Foi aluno de Jacobi e publicou pesquisas sobre funções algébricas e teoria dos invariantes.

$$
\begin{aligned}
x^3 + \quad px^2 + \quad qx \quad &= 0 \\
x^2 - (u+z)x \quad &= 0 \\
x^3 - (u+z)x^2 \quad &= 0
\end{aligned}
$$

Para que este sistema tenha solução, o seguinte determinante tem que ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & -(u+z) \\ 1 & -(u+z) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante obtemos

$$-p(u+z) - (u+z)^2 - q = 0$$

e portanto

$$u^2 + (2z+p)u + (z^2 + pz + q) = 0$$

Fazendo $2z + p = 0$, obtemos

$$u^2 = -(z^2 + pz + q) = -\left[-\frac{p^2}{2^2} + \frac{p^2}{2} + q\right]$$

e assim

$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

do que decorre

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

A história da equação do 2º grau nos mostra como um tema de Matemática é retomado varias vezes. Vimos como, ao longo dos séculos, as maneiras de resolver esta equação mudaram, até chegar à forma padrão que conhecemos hoje. Além disso, mesmo após ter deixado de ser um desafio, muitos matemáticos se ocuparam com ela, pelo simples prazer de procurar novas maneiras para chegar às suas soluções.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HEATH, Thomas L. – *The thirteen books of Euclid's elements*, vols I, 2 3. New York, Dover, 1956.

JOSEPH, George Gheverghese- *The crest of the peacock- non-european roots of mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.

KATZ, Victor J. – *A History of mathematics – an introduction*. New York: HarperCollins, 1993.

MACHADO, Fernanda e outros- “Por que Báskhara?”, in *História e Educação Matemática*, vol 2, no 2, jan/jun 2003, pp.119-166.

Roberto- *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de Frederico Comandino; adicionados e ilustrados por Roberto Simson, professor de Mathematica na Academia de Glasgow*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1773.

SMITH, David Eugene – *History of mathematics*, vol II- *Selected topics of elementary mathematics*. New York: Dover, 1958.

TRÖPFKE, Johannes – *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreeinhalb Jahrtausend*. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol 43, 1934, 98-107.

TRÖPFKE, Johannes – *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreeinhalb Jahrtausend*. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol 44, 1934, 26-47, 95-119.

TRÖPFKE, Johannes- *Geschichte der Elementarmathematik*. Band 1- *Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmut Gericke. Berlin: Walter de Gruyter: 1980, 4te Auflage.

van der Waerden, B. L. – *Science awakening* I. Gronigen, Holanda: Wolter Noordhoff, s/d.

van der Waerden, B. L. – *Geometery and algebra in ancient civilizations*. New York: Springer Verlag, 1983.

van der Waerden, B. L. – *A History of algebra*, *from al-Khowarizmi to Emmi Noether*. New York: Springer Verlag, 1985.