

Polinômios homogêneos no estudo de fluidos

Saulo P. Oliveira*

Resumo

Um polinômio $p(x, y)$ é homogêneo de grau k se $p(tx, ty) = t^k p(x, y)$. Além disso, $p(x, y)$ é harmônico se $\Delta p = 0$. Temos que uma função vetorial $\mathbf{f}(x, y) = (p_1(x, y), p_2(x, y))^t$ tal que $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ sejam harmônicos e homogêneos de grau $k \geq 2$ é uma função geratriz de soluções das equações de Stokes. Este trabalho também discute o uso destas funções na aproximação de problemas de valores de contorno envolvendo as equações de Stokes, que servem como um modelo para o escoamento de fluidos.

1 Introdução

As equações de Stokes são um dos sistemas de equações diferenciais lineares mais significativos no estudo da mecânica dos fluidos. Estas equações modelam o escoamento de fluidos lentos em regime permanente (ou seja, cuja variação no tempo é desprezível).

Este trabalho revê uma classe de soluções polinomiais das equações de Stokes proposta por Choe [2]. Estas soluções são geradas por polinômios *homogêneos*, cujas propriedades são revistas na próxima seção. Vamos construir tais soluções na Seção 3. Finalmente, veremos como aplicar os polinômios envolvidos no desenvolvimento de métodos numéricos estáveis para a solução das equações de Stokes (Seção 4). O restante desta seção é destinado a estabelecer as notações empregadas neste trabalho e introduzir as equações de Stokes.

Vamos escrever variáveis e funções escalares em itálico (x, y, p, ϕ), sendo os vetores e campos vetoriais escritos em itálico e negrito ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}$), a menos que suas componentes sejam escritas explicitamente ($\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t$). Representamos também o par ordenado (x, y) por \mathbf{x} .

Sejam $p = p(x, y)$ e $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))^t$. Definimos os seguintes operadores diferenciais:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x, y) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y)$$

*Departamento de Geofísica Nuclear, CPGG-UFBA, Campus Universitário da Federação, Salvador-BA, 40210-340. E-mail: saulopo@cpgg.ufba.br. Bolsista do programa PRODOC-CAPEs.

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x, y) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Dizemos que a função p é *harmônica* se $\Delta p = 0$. As funções \mathbf{u} e p satisfazem as *equações de Stokes* se

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

No contexto de mecânica dos fluidos, as incógnitas \mathbf{u} e p representam a velocidade e a pressão do fluido, respectivamente. Temos que μ é o coeficiente de viscosidade e \mathbf{f} representa as forças externas.

2 Polinômios homogêneos

Um polinômio $p(x, y)$ é *homogêneo* de grau m se

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i y^{m-i}.$$

Por exemplo, os polinômios homogêneos de grau ≤ 2 tais que α_i é sempre 1 são:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 1 \\ p(x, y) &= y + x \\ p(x, y) &= y^2 + xy + x^2 \end{aligned}$$

Note que os binômios de Newton também são polinômios homogêneos:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= (y + x)^2 = y^2 + 2xy + x^2 \\ p(x, y) &= (y + x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i y^{m-i} \end{aligned}$$

Temos que p satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $p(tx, ty) = t^m p(x, y)$
- (ii) $\mathbf{x} \cdot \nabla p(x, y) = mp(x, y)$
- (iii) cada componente de ∇p é homogêneo de grau $m - 1$
- (iv) Se $p_a(x, y)$ e $p_b(x, y)$ são homogêneos de grau m e $\mathbf{p}(x, y) = (p_a, p_b)^t$, então $\nabla \cdot \mathbf{p}$ é homogêneo de grau $m - 1$.

A propriedade (i) é uma definição alternativa de um polinômio homogêneo. Para verificá-la, note que

$$(tx)^i (ty)^{m-i} = t^i x^i t^{m-i} y^{m-i} = t^{i+m-i} x^i y^{m-i} = t^m x^i y^{m-i},$$

logo,

$$p(tx, ty) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (tx)^i (ty)^{m-i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^m x^i y^{m-i} = t^m p(x, y).$$

Vejam a propriedade (ii). Como

$$x \frac{\partial (x^i y^{m-i})}{\partial x} = x i x^{i-1} y^{m-i} = i x^i y^{m-i},$$

e analogamente,

$$y \frac{\partial (x^i y^{m-i})}{\partial y} = (m-i) x^i y^{m-i},$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \nabla p(x, y) &= x \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i (i) x^i y^{m-i} + \sum_{i=0}^m \alpha_i (m-i) x^i y^{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i (i + m - i) x^i y^{m-i} = mp(x, y) \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau $m-1$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_0 x^0 y^m + \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i y^{m-i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m i \alpha_i x^{i-1} y^{m-i} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (j+1) \alpha_{j+1} x^j y^{(m-1)-j} = \sum_{j=0}^{\tilde{m}} \tilde{\alpha}_j x^j y^{\tilde{m}-j}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{m} = m-1$ e $\tilde{\alpha}_j = (j+1)\alpha_{j+1}$. A conclusão é análoga para $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y)$, o que confirma a propriedade (iii). Os mesmos argumentos levam à propriedade (iv).

3 Função geratriz de soluções de Stokes

O resultado a seguir é baseado no Lema 2.2 de Choe [2], originalmente verificado em \mathbb{R}^n . Uma consequência deste lema é que qualquer polinômio harmônico e homogêneo de grau ≥ 2 pode ser usado para gerar soluções das equações de Stokes quando $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Lema: Seja $\phi(x, y)$ um campo vetorial cujas componentes $\phi_i(x, y)$ são polinômios harmônicos e homogêneos de grau $m \geq 2$. Então, o par

$$\mathbf{u}(x, y) = \phi(x, y) - \frac{1}{2(m-1)}(x^2 + y^2)\nabla(\nabla \cdot \phi(x, y)) , \quad (2)$$

$$p(x, y) = -2\mu\nabla \cdot \phi(x, y) \quad (3)$$

satisfaz as equações homogêneas de Stokes, ou seja:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = \mathbf{0} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $q = \nabla \cdot \phi$. Temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q - \frac{1}{2(m-1)}(\nabla(x^2 + y^2) \cdot \nabla q + (x^2 + y^2)\Delta q).$$

Como ϕ_i , $i = 1, 2$ são funções harmônicas,

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi_1 + \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi_2 = 0. \end{aligned}$$

Da propriedade (iv), q é homogêneo de grau $m - 1$. A propriedade (ii) implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q - \frac{1}{2(m-1)}(2(\mathbf{x} \cdot \nabla)q - 0) = q - \frac{1}{m-1}((m-1)q) = 0.$$

Defina $\mathbf{v} = \nabla q$, que é homogêneo de grau $m - 2$ de acordo com a propriedade (iii). Assim,

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= -\mu\Delta\phi + \frac{\mu}{2(m-1)}\nabla \cdot \nabla((x^2 + y^2)\mathbf{v}) - 2\mu\mathbf{v} \\ &= \frac{\mu}{2(m-1)}\nabla \cdot (2\mathbf{x}\mathbf{v} + (x^2 + y^2)\nabla\mathbf{v}) - 2\mu\mathbf{v} \\ &= \frac{\mu}{2(m-1)}(4\mathbf{v} + 2\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{v} + 2\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{v} + (x^2 + y^2)\Delta\mathbf{v}) - 2\mu\mathbf{v} \\ &= \frac{\mu}{2(m-1)}(4\mathbf{v} + 4(m-2)\mathbf{v} + (x^2 + y^2)\Delta\mathbf{v}) - 2\mu\mathbf{v} \\ &= \mu\frac{x^2 + y^2}{2(m-1)}\Delta\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \phi_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ ,\end{aligned}$$

temos que $-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0$, completando a prova. ■

3.1 Exemplos

Assuma que $\mu = 1$ e defina os seguintes polinômios harmônicos e homogêneos:

$$\phi_1(x, y) = \frac{y}{8} \left(\frac{y^2}{3} - x^2 \right) \ , \quad \phi_2(x, y) = \frac{x}{8} \left(\frac{x^2}{3} - y^2 \right) \ , \quad \phi_3(x, y) = xy. \quad (4)$$

Podemos agora definir a função geratriz ϕ por meio de diversas combinações de ϕ_i :

Exemplo 3.1 : Se $\phi = (\phi_1, \phi_2)^t$, então

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} y^3 \\ x^3 \end{pmatrix} \text{ e } p = xy.$$

Exemplo 3.2 : Se $\phi = (\phi_3, 0)^t$, então

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} xy \\ -(x^2 + y^2)/2 \end{pmatrix} \text{ e } p = y.$$

Exemplo 3.3 : Se $\phi = (0, \phi_3)^t$, então

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -(x^2 + y^2)/2 \\ xy \end{pmatrix} \text{ e } p = x.$$

Exemplo 3.4 : Se $\phi = (\phi_2, \phi_1)^t$, então $\mathbf{u} = \phi$ e $p = 0$.

4 Aplicação

Vamos usar os polinômios obtidos na seção anterior para estabilizar um método de elementos finitos para a solução numérica do problema de Stokes. Vamos inicialmente estabelecer duas formulações do problema de Stokes e a aproximação por elementos finitos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e limitado com fronteira suave Γ . O *problema de Stokes* que vamos considerar é o problema de valores contorno definido pelas equações de Stokes e por condições de contorno homogêneas sobre a velocidade:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (5)$$

A *formulação variacional* do problema (5), conforme descrita em [1], é a seguinte: encontrar $\mathbf{u} \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ e $p \in Q = \{p \in L^2(\Omega) ; \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0\}$ tais que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 & \forall q \in Q, \end{cases} \quad (6)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad b(q, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega,$$

sendo os espaços de funções $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ definidos conforme [1, 6]. Dados dois subespaços $V_h \subset V$ e $Q_h \subset Q$ de dimensão finita, podemos aproximar \mathbf{u} e p pela solução $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ do seguinte problema:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (7)$$

Esta forma de aproximação é conhecida como *método de Galerkin*. Um exemplo é o método de *elementos finitos* com aproximação bilinear por partes da velocidade e da pressão. Este método assume uma partição do domínio Ω em quadriláteros Ω^e , $1 \leq e \leq n_{el}$ (Figura 1). Associamos a cada quadrilátero (ou *elemento*) uma transformação bilinear $F_e : \Omega^e \rightarrow \hat{K}$, onde $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

O espaços V_h e Q_h são definidos por

$$V_h = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ; v_i \in C^0(\Omega), v_i|_{\Gamma} = 0 \text{ e } (v_i|_{\Omega^e}) \circ F_e^{-1} = a + bx + cy + dxy \right\} \quad (8)$$

$$Q_h = \left\{ q \in C^0(\Omega) ; \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \text{ e } (q_i|_{\Omega^e}) \circ F_e^{-1} = a + bx + cy + dxy \right\} \quad (9)$$

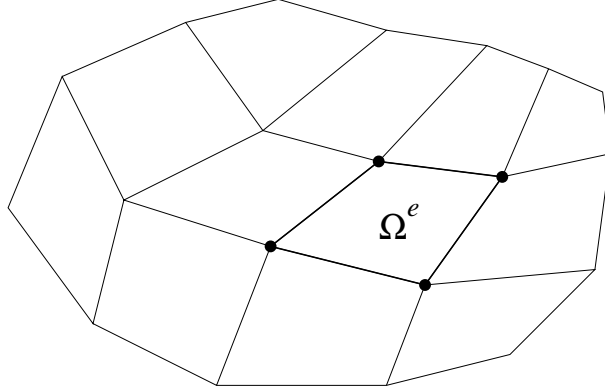


Figura 1: Partição de um domínio em quadriláteros.

Seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ uma base para V_h e $\{q_1, \dots, q_n\}$ uma base para Q_h . Substituindo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(x, y) &= \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{v}_j(x, y), & \mathbf{v}_h(x, y) &= \mathbf{v}_i(x, y) (1 \leq i \leq m), \\ p_h(x, y) &= \sum_{j=1}^n p_j q_j(x, y), & q_h(x, y) &= q_i(x, y) (1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

em (7), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

onde $A_{ij} = a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$, $B_{ij} = b(q_i, \mathbf{v}_j)$, $b_j = F(\mathbf{v}_j)$. Pode-se mostrar que a matriz A é positiva definida (isto é, $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$), de modo que o sistema linear (10) terá uma única solução se e somente se o posto da matriz B for igual a m [5]. Esta condição, quando imposta a qualquer partição do domínio Ω , corresponde à condição de *Babuška-Brezzi*:

$$\inf_{q_h \in Q_h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\| \|q_h\|} \geq \beta > 0.$$

O par $V_h \times Q_h$ definido acima não satisfaz a condição de Babuška-Brezzi, assim como alguns outros pares de espaços polinomiais com o mesmo grau de aproximação na velocidade e na pressão [1]. Porém, se considerarmos $\phi_i(x, y) (1 \leq i \leq 3)$ definidos em (4) e redefinirmos o espaço V_h como sendo

$$V_h = V_h \cup \prod_{e=1}^{nel} V^e, \quad V^e = \left\{ \mathbf{v} : \Omega^e \rightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \circ F_e^{-1}, \hat{\mathbf{v}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \phi_3 \right\}, \quad (11)$$

então o par $V_h \times Q_h$ passa a satisfazer a condição de Babuška-Brezzi (vide [3, 7]).

A importância da estabilização promovida em (11) é evidenciada se considerarmos a aproximação da solução do *problema de cavidade* pelo método de elementos finitos considerando os pares $V_h \times Q_h$ definidos por:

1. MEF1: equações (8) e (9);
2. MEF2: equações (11) e (9).

Consideramos no problema de cavidade $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\mu = 1$, $\Omega =]0, 1[^2$, e as condições de contorno indicadas na Figura 2. Este problema modela o escoamento laminar de um fluido em uma cavidade quadrada cuja extremidade superior encontra-se em movimento uniforme [4]. A partição de Ω é feita em 20×20 quadrados iguais.

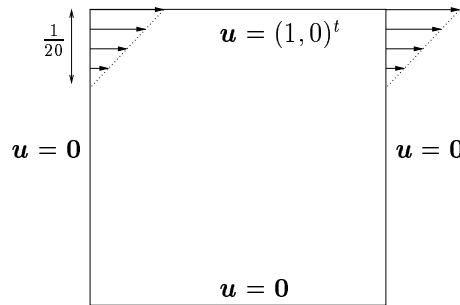


Figura 2: Condições de contorno do problema de cavidade.

Embora tanto MEF1 quanto MEF2 produzam uma boa aproximação da velocidade (Figura 3), apenas MEF2 consegue aproximar bem a pressão (Figura 4).

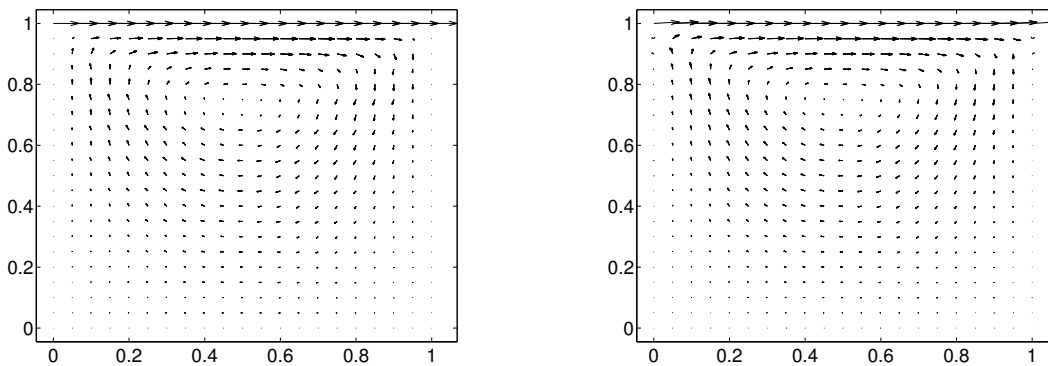


Figura 3: Aproximações da velocidade: MEF1 (esquerda) MEF2 (direita).

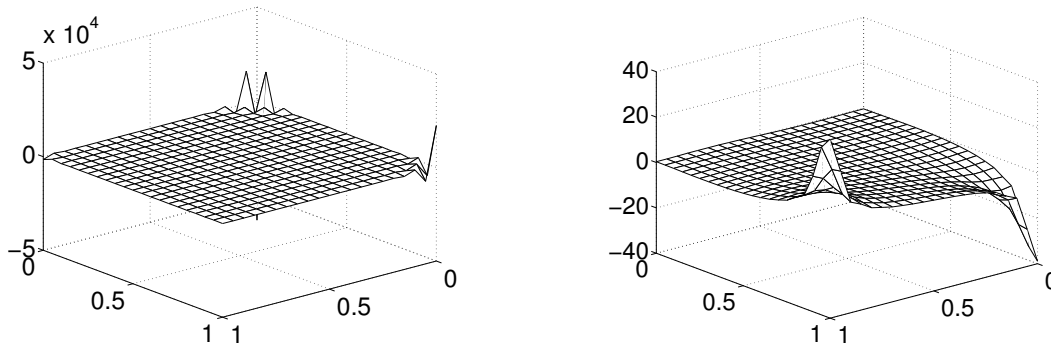


Figura 4: Aproximações da pressão: MEF1 (esquerda) MEF2 (direita).

Referências

- [1] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] H. J. Choe. On the fundamental solutions to Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, 153(2):313–337, 1999.
- [3] L. P. Franca, S. P. Oliveira, and M. Sarkis. Continuous Q1-Q1 Stokes elements stabilized with non-conforming null edge average velocity functions. *Numerische Mathematik*, submetido.
- [4] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- [5] M. D. Gunzburger. The inf-sup condition in mixed finite element methods with application to the stokes system. In D. Estep and S. Tavener, editors, *Collected Lectures on the Preservation of Stability Under Discretization*, pages 93–121. SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- [6] I.-S. Liu and M. Rincon. *Introdução ao Método de Elementos Finitos: Análise e Aplicação*. Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.
- [7] S. P. Oliveira. *Discontinuous Enrichment Methods for Computational Fluid Dynamics*. PhD thesis, University of Colorado at Denver, 2002.