RAYMUNDO J. S. TORRES

OPÇÕES E SUAS DERIVADAS ("GREGAS")

Modelo de Black/Scholes

Trabalho elaborado para suporte para curso de quatro horas, duas aulas, como atividade integrante da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática em Salvador.

Salvador, Bahia, Brasil

Setembro de 2004

APRESENTAÇÃO

O material contido neste trabalho foi concebido especificamente para ser utilizado em curso de quatro horas, duas aulas, levando-se em conta que os participantes poderiam ser pessoas com formação matemática, sem maiores conhecimentos na área financeira; financistas com bagagem quantitativa restrita ou, até, aqueles com amplo domínio desses campos do saber – Matemática e Finanças. Primou-se pela linguagem direta e foi buscado um texto "auto - sustentável", fazendo-se uso de expressão corriqueira em nossos dias, referindo-nos ao princípio do século.

Assumindo um tom mais pessoal, gostaria de agradecer o apoio das colegas Glória, Jodália e Leopoldina, do Instituto de Matemática da UFBa, mas totalmente inocentadas com respeito a qualquer falha que apareça neste trabalho.

Raymundo J. S. Torres

SUMÁRIO

1. ATIVOS FINANCEIROS

Chama-se **ativo financeiro** a títulos utilizados para obtenção de fundos, como ações, bônus, debêntures etc. Ação, por exemplo, é uma parte unitária do capital de uma sociedade anônima, podendo ser adquirida no **mercado primário** ou no **secundário**. O primeiro corresponde ao lançamento, apresentando preços determinados; o outro envolve compras e vendas realizadas pelos possuidores e interessados nos papéis. Os valores das ações são determinados por um conjunto de fatores interagentes que causam variações nos preços dos ativos, resultando em um movimento aleatório chamado **flutuação**. Tais papéis são designados de **ativos contingentes**.

O gráfico a seguir demonstra o comportamento aleatório dos valores de um ativo contingente, no decorrer do tempo. Os intervalos de tempo, quando ocorrem as mudanças, são considerados pequenos o que torna possível o tratamento desas variações como se fossem contínuas.

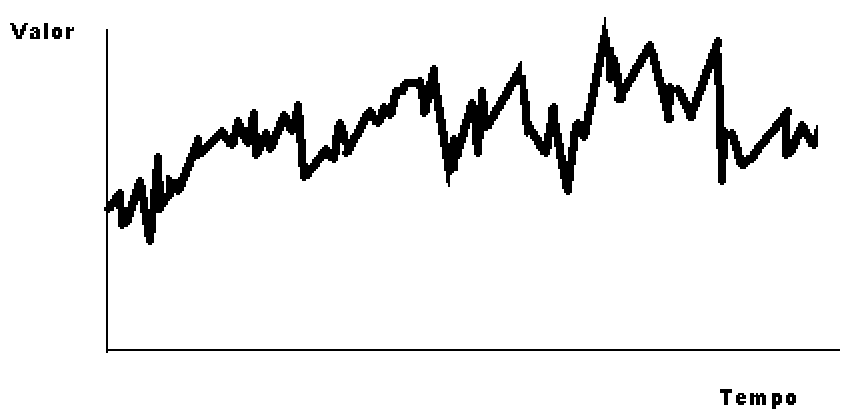

Figura 1 - Variação de Ativos Contingentes

2. MEDIDA DA FLUTUAÇÃO DOS ATIVOS FINANCEIROS

A flutuações dos ativos contingentes podem ser aferidas por dois procedimentos: **variação absoluta** e **variação relativa**. Sendo V_n o valor em um momento e V_{n+1} no momento posterior, as medidas das flutuações são definidas como a seguir:

- **Variação absoluta**: $\Delta V = V_{n+1} - V_n$

- **Variação relativa**: $\Delta R = \dfrac{V_{n+1} - V_n}{V_n}$

O mais usual no mercado, entretanto, é usar outra forma para a variação relativa:

$$R = Ln\,\frac{V_{n+1}}{V_n}$$

Justificativa: para valores pequenos de **x**, $Ln(1+x) \approx x$. Por outro lado

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 + \frac{V_{n+1} - V_n}{V_n}\text{, daí}$$

$$Ln\left(1 + \frac{V_{n+1} - V_n}{V_n}\right) \approx \frac{V_{n+1} - V_n}{V_n}$$

Exemplo 1:

Seqüência de valores observados de um ativo: 10,00; 10,08; 9,97 e 10,01.

Seqüência de variações absolutas: 0,08; – 0,09 e 0.04.

Seqüência de variações relativas:

a) Calculadas diretamente pela fórmula: 0,80%; – 1,091% e 0,40%.

b) Calculadas por meio do logaritmo: 0,80%; – 1,097% e 0,40%.

Observa-se uma pequena diferença na segunda variação relativa.

3. OPÇÕES

O valor que uma ação apresentará no futuro ou, mais diretamente, o seu **valor futuro** (**VF**) é imprevisível, dada à flutuação aleatória do mesmo. Assim, pode-se adquirir uma ação, hoje, esperando-se que, no futuro, venha apresentar um valor mais alto, portanto levando a um ganho líquido para o investidor. Mas, ocorrendo o inverso, um valor menor, o aplicador registrará um prejuízo.

Ao invés de comprar ou vender as ações, há como alternativa a possibilidade de celebrar um acordo para compra-las vende-las no futuro, se interessar ao investidor. Para melhor entendimento, sejam **S** o valor da ação no mercado, **K** o valor contratado para o futuro (**valor de exercício**) e **T** o tempo até o final do prazo do contrato. A partir daí, pode-se imaginar duas situações:

Primeira, o investidor compra o direito de adquirir uma ação no futuro pelo valor **K.** Ao final do prazo, em **T**, compara o valor contratado com aquele do mercado (**S**): Se o valor do mercado for maior, compra a ação pelo valor contratado e ganha a diferença; se o valor do mercado for menor, abandona o contrato.

Segunda, o investidor compra o direito de vender uma ação no futuro pelo valor **K**. Ao final do prazo, em **T**, compara o valor contratado com aquele do mercado (**S**): se o valor do mercado for menor, vende a ação pelo valor contratado e ganha a diferença; se o valor do mercado for maior abandona o contrato.

Contratos como esses são chamados de **opções**, pelo fato do comprador ter o direito – a opção – de exerce-los. O primeiro é chamado de **opção de compra** ou **call**, expressão inglesa; o segundo recebe a designação de **opção de venda** ou **put**, também expressão inglesa para esse tipo. Para equilibrar esses contratos, o adquirente deve pagar um **prêmio** (**P**) àquele que fica obrigado a realizar a venda ou a compra pelo valor contratado, como se fosse um seguro.

4. OPÇÃO DE COMPRA – CALL

Para o entendimento mais claro do funcionamento de um contrato de opção de compra, será formulado um exemplo e traçado o gráfico correspondente.

Exemplo 2: Dados do contrato: **K** = $ 10,00; **P** = $ 0,50 e **S** = (variável). Tabela:

S	K	S – K	P	Ganho/Perda
0,00	10,00	– 10,00	0,50	– 0,50
1,00	10,00	– 9,00	0.50	– 0,50
...	...	...	...	...
9,00	10,00	– 1,00	0,50	– 0,50
10,00	10,00	0,00	0,50	– 0,50
10,50	10,00	0,50	0,50	0,00
11,00	10.00	1,00	0,50	0,50
...	...	...	...	...

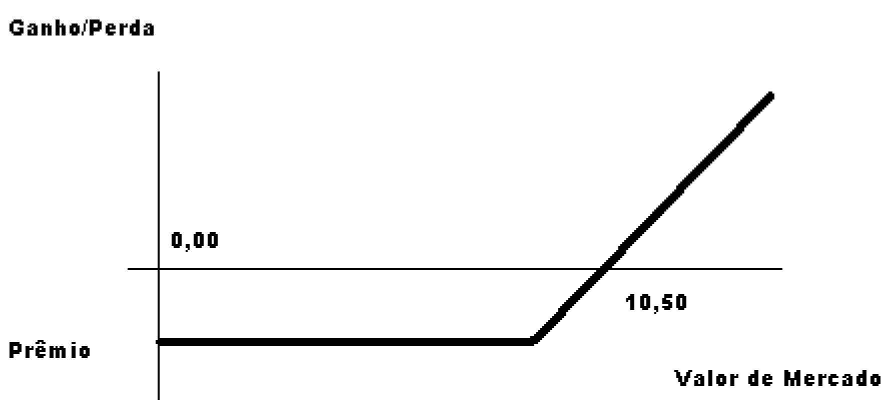

Figura 2 - Gráfico de Opção de Compra (call)

5. OPÇÃO DE VENDA – PUT

Para o entendimento mais claro do funcionamento de um contrato de opção de venda, será formulado um exemplo e traçado o gráfico correspondente.

Exemplo 3: Dados do contrato: **K** = $ 10,00; **P** = $ 0,50 e **S** = (variável). Tabela:

S	K	K – S	P	Ganho/Perda
0,00	10,00	10,00	0,50	9,50
1,00	10,00	9,00	0.50	8,50
...	...	...	...	...
9,00	10,00	1,00	0,50	0,50
9,50	10,00	0,50	0,50	0,00
10,00	10,00	0,00	0,50	– 0,50
11,00	10.00	– 1,00	0,50	– 0,50
...	...	...	...	...

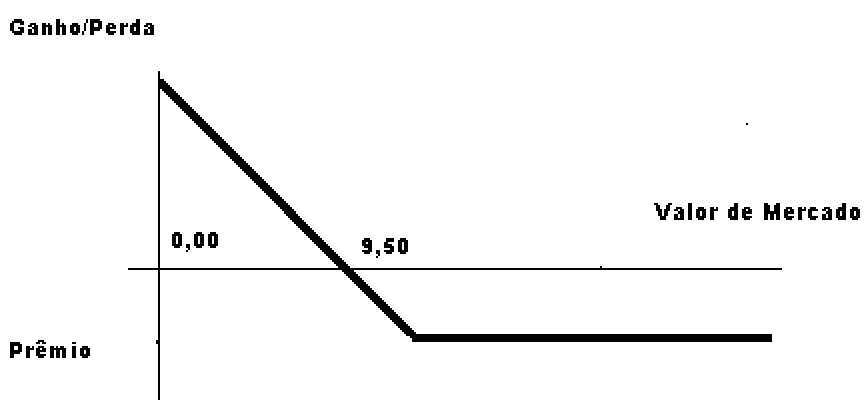

Figura 3 - Gráfico de Opção de Venda (put)

6. VALOR DE UMA OPÇÃO

O valor de uma opção pode ser representado da seguinte maneira:

Máximo [S – K; 0] para uma **call**; não exercendo, o investidor perde o prêmio.
Máximo [K – S; 0] para uma **put**; não exercendo, o investidor perde o prêmio.

A grande questão para os participantes do mercado é ter uma idéia se o valor do prêmio está acima ou abaixo de um certo preço considerado justo. Isto de forma antecipada. Designando-se **c** o valor do prêmio para uma opção de compra e **p** o respectivo para uma de opção de venda, são construídos os modelos abaixo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{SN(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2)} \text{ e}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{Ke^{-RT}N(-d_2) - SN(-d_1)}$$

Elementos novos elementos introduzidos nas duas fórmulas:

$\mathbf{e^{-RT}}$: fator de valor atual em capitalização instantânea ou contínua.
N(...) : valor da função de distribuição normal (valores tabelados).
$\mathbf{d_i}$: valor a ser determinado (tema vindouro).

Os próximos temas abordarão esses dois assuntos, mas torna-se oportuno apresentar as interpretações para as fórmulas de **c** e **p**:

A primeira pode ser entendida como a diferença entre um valor de mercado para o ativo multiplicado pela probabilidade acumulada de vir a ocorrer (até) este valor e o valor presente do valor de exercício, também multiplicado pela sua respectiva probabilidade acumulada de vir ocorrer (até) este valor. A segunda apresenta uma interpretação semelhante, com a ordem invertida dos fatores.

7. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

No tema dois foi estabelecida a fórmula $\mathbf{R} = \mathbf{Ln}\dfrac{\mathbf{V_{n+1}}}{\mathbf{V_n}}$. Isto corresponde a:

$$\frac{\mathbf{V_{n+1}}}{\mathbf{V_n}} = \mathbf{e^R} \text{ daí } \mathbf{V_{n+1}} = \mathbf{V_n e^R}$$

Supondo-se, agora, **T** períodos: $\mathbf{TR} = \mathbf{Ln}\dfrac{\mathbf{V_{n+1}}}{\mathbf{V_n}}$, de forma semelhante:

$$\frac{\mathbf{V_{n+1}}}{\mathbf{V_n}} = \mathbf{e^{RT}} \text{ daí } \mathbf{V_{n+1}} = \mathbf{V_n e^{RT}}$$

É comum usar-se tal fórmula com as convenções de **PV** e **FV**, ficando portanto:

$$\mathbf{FV} = \mathbf{PVe^{RT}}$$

O comportamento de variação do capital representado pelo modelo acima é denominado de **capitalização instantânea** ou **contínua**, mais usual. A partir da fórmula do **FV**, obtém-se a respectiva para o **PV**:

$$\mathbf{PV} = \mathbf{FVe^{-RT}}$$

A expressão $\mathbf{e^{-RT}}$ é o **fator de valor atual** para essa capitalização, usado na fórmula para aferição do prêmio de uma opção (tema 6).

Exemplo 4:

Para **PV** = \$ 1.000,00; **R** = 18,5% ao ano e **T** = 6 meses, **FV** = 1.000,00 $e^{(0,185)(0,5)}$, resultando em \$ 1.096,91.

Da mesma forma, sendo **FV** = \$ 1.096,91; **R** = 18,5% ao ano e **T** = 6 meses, o valor de **PV** será 1.096,91 $e^{-(0,185)(0,5)}$, ou seja, \$ 1.000.00.

8. A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE NORMAL

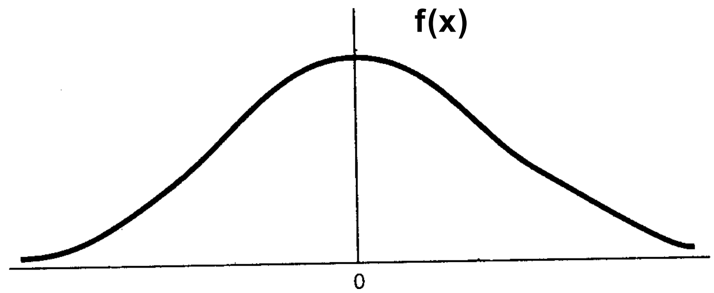

Figura 4 – Gráfico da Função de Densidade Normal

A **função densidade normal de probabilidade** é comumente usada no mercado financeiro para o estudo das flutuações dos valores dos ativos. Claro, há outras concepções, mas estudos empíricos mostram ser aceitável a aplicação da normal para a finalidade descrita. Fórmula geral para essa função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Na fórmula:

μ: média da distribuição e
σ: desvio padrão da distribuição.

Um caso especial da distribuição normal é a chamada **normal padronizada**, onde por meio de transformações, são obtidos os valores zero para a média e um para o desvio padrão. Assim, a fórmula se mostra mais prática para a utilização:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

9. A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE NORMAL

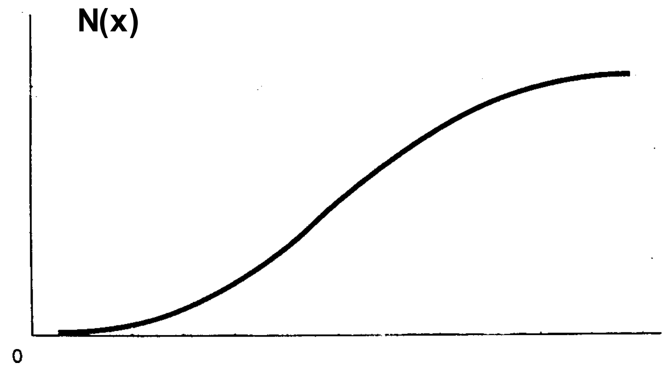

Figura 5 – Gráfico da Função de Distribuição Normal

Sendo dada uma função contínua de densidade normal de probabilidade $\mathbf{f(x)}$, define-se a **função de distribuição** $\mathbf{F(x)}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{f(S)dS}$$

No caso da distribuição normal:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{S^2}{2}} \mathbf{dS}$$

O valor obtido representa a probabilidade acumulada de uma variável aleatória **X** (como o valor de uma ação no futuro) atingir até um valor **x**:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$$

A integral apresentada não pode ser resolvida diretamente, mas os resultados obtidos por outros processos se encontram devidamente tabelados, sendo facilmente levantados. No caso, utiliza-se a representação $\mathbf{N(d_i)}$, como aparece nas fórmulas para os prêmios das opções. O problema, então, é achar os valores para $\mathbf{d_i}$ e. em seguida, consultar uma tabela. Será o próximo tema.

10. AS FÓRMULAS DE BLACK/SCHOLES

Ao final da década de 60 do século passado, coube a dois pesquisadores americanos – Black e Scholes – a idealização das fórmulas para avaliar os preços das opções de compra ou venda, ficando essas fórmulas conhecidas com os respectivos nomes. Voltando-se às fórmulas do tema 6:

$$\mathbf{c = SN(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2)} \text{ e}$$

$$\mathbf{p = Ke^{-RT}N(-d_2) - SN(-d_1)}$$

Para os valores $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ os citados pesquisadores propuseram as expressões:

$$\mathbf{d_1} = \frac{\mathbf{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}}{\sigma\sqrt{\mathbf{T}}} \text{ e}$$

$$\mathbf{d_2} = \frac{\mathbf{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}}{\sigma\sqrt{\mathbf{T}}}$$

Também pode ser escrito:

$$\mathbf{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}}$$

Os valores de **S**, **K**, **R** e **T** são verificados diretamente, mas a volatilidade (σ) deverá ser calculada, sendo usual realizar-se uma estimação tendo como base uma série de valores históricos das opções, assunto do próximo tema. Nas fórmulas, aparecem cálculos para valores negativos de $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ obtidos da seguinte maneira:

$$\mathbf{N(-d_1) = 1 - N(d_1)} \text{ e } \mathbf{N(-d_2) = 1 - N(d_2)}$$

11. VALOR DE UMA OPÇÃO DE COMPRA (c)

Será mostrado inicialmente o cálculo do valor do prêmio de uma opção de compra por intermédio da fórmula de Black/Scholes.

Exemplo 5:

Achar o do prêmio de uma opção de compra, dadas as condições do mercado:

S = \$18,00
K = \$15,00
R = 10% ao ano
T = 6 meses (0,5 ano)
σ = 15% ao ano

Cálculos de d_1 e d_2:

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{18}{15}\right) + \left(0{,}10 + \frac{1}{2}(0{,}15)^2\right)0{,}5}{0{,}15\sqrt{0{,}5}} \text{ ou } d_1 = 2{,}2433$$

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{18}{15}\right) + \left(0{,}10 - \frac{1}{2}(0{,}15)^2\right)0{,}5}{0{,}15\sqrt{0{,}5}} \text{ ou } d_2 = 2{,}1373$$

A partir desses valores e consultando uma tabela de distribuição normal:

$N(d_1) : N(2{,}2433) = 0{,}9876$ e $N(d_2) : N(2{,}1373) = 0{,}9884$.

Substituindo-se esses valores na fórmula do prêmio da opção de compra, acha-se o valor mais justo para o mesmo, segundo Black/Scholes:

$$c = SN(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2) :$$

$$c = (18{,}00)(0{,}9876) - (15{,}00)^{-(0{,}10)(0{,}5)}(0{,}9884)$$

$$c = \$3{,}75$$

12. VALOR DE UMA OPÇÃO DE VENDA (p)

Será mostrado agora o cálculo do valor do prêmio de uma opção de venda.

Exemplo 6:

Achar o do prêmio de uma opção de venda, dadas as condições do mercado:

S = \$18,00

K = \$15,00

R = 10% ao ano

T = 6 meses (0,5 ano)

σ = 15% ao ano

Cálculos de $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$:

$N(-d_1) = 1 - N(d_1)$, assim:

N(– 2,2433) = 1 – N(2,2433)

N(– 2,2433) = 1 – 0,9876 (calculado no exemplo 5)

N(– 2,2433) = 0,0124

$N(-d_2) = 1 - N(d_1)$, assim:

N(– 2,1373) = 1 – N(2,1373)

N(– 2,1373) = 1 – 0,9844 (calculado no exemplo 5)

N(– 2,2433) = 0,0156

Substituindo-se esses valores na fórmula do prêmio da opção de venda:

$$c = Ke^{-RT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$c = (15{,}00)^{-(0{,}10)(0{,}5)}(0{,}0156) - (18{,}00)(0{,}0124)$$

$$c = \$0{,}01$$

13. ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE

O valor da volatilidade para a fórmula de Black/Scholes pode ser obtido a partir de uma série histórica de registros, considerada como uma amostra. Sendo:

$\mathbf{S_i}$: valor do ativo no momento i;

$\mathbf{n+1}$: número de registros e

$\mathbf{R_i}$: rendimento calculado por meio da fórmula $\text{Ln}\,\dfrac{S_i}{S_{i-1}}$

A estimativa da volatilidade para o período é obtida por meio da fórmula

$$\mathbf{s} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n-1}}\right)\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{R_i} - \overline{\mathbf{R}})^{\mathbf{2}}}$$

Na fórmula **s** é o desvio padrão e $\overline{\mathbf{R}}$ a média. Para a referência anual:

$$\sigma = \mathbf{s}\sqrt{\mathbf{252}}$$

O valor 252 corresponde ao número de dias úteis, quando há funcionamento do mercado (convenção).

Exemplo 7:

Achar a volatilidade estimada com base nos valores diários registrados para uma ação: $10,10; $10,15; $10,04; $9.95; $10,00 e $10,70.

Variações respectivas: 0,0049; – 0,0109; – 0,0090; 0,0050 e 0,0067.

Aplicando-se a fórmula, encontra-se 0,0323 (3,23%) para o período. Para a referência anual obtêm-se:

$$\sigma = 0{,}0323\sqrt{252} \text{ ou } 0{,}5132 \text{ (51,32\% ao ano).}$$

14. AS GREGAS DAS OPÇÕES

As fórmulas para as opções dependem de cinco variáveis, ao mesmo tempo: **S**, **K**, **T**, **R** e σ. Assim, para acompanhar o efeito dessas variáveis na evolução dos preços das opções, lança-se mão das derivadas parciais, denominadas **gregas das opções**. O uso consagrou cinco derivadas, relacionadas no quadro a seguir:

NOME	OPÇÃO DE COMPRA	OPÇÃO DE VENDA
DELTA	$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$	$\frac{\partial p}{\partial S} = N(d_1) - 1$
GAMA	$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\left(N(d_1)\right)'$	$\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\left(N(d_1)\right)'$
THETA	$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{S\sigma\left(N(d_1)\right)'}{2\sqrt{T}} + RKe^{-RT}N(d_2)$	$\frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{S\sigma\left(N(d_1)\right)'}{2\sqrt{T}} + RKe^{-RT}N(-d_2)$
VEGA	$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\left(N(d_1)\right)'$	$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\left(N(d_1)\right)'$
RHO	$\frac{\partial c}{\partial R} = KTe^{-RT}\left(N(d_2)\right)'$	$\frac{\partial c}{\partial R} = -KTe^{-RT}\left(N(d_2)\right)'$

O cálculo dessas derivadas é relativamente trabalhoso por envolver multiplicação, divisão de variáveis, assim como composição de funções. Além disso, deve ser observada a relação entre a função de distribuição e a função densidade de probabilidade, quando se calcula a respectiva derivada:

$$\left(N(d_1)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} \quad \text{e} \quad \left(N(d_2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}$$

15. DERIVAÇÃO DAS "GREGAS"

Como exemplo, escolheu-se o cálculo da derivada parcial de **c: f(S, K, R,T,** σ **)**, representativa do prêmio de uma opção de compra com relação ao valor do ativo, pois leva a resultados úteis para as outras derivações:

Sendo $\mathbf{c} = \mathbf{SN(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2)}$;

$$\mathbf{d_1} = \frac{\mathbf{Ln}\left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{K}}\right) + \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sigma^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{T}}{\sigma\sqrt{\mathbf{T}}};$$

$$\mathbf{d_2} = \frac{\mathbf{Ln}\left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{K}}\right) + \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sigma^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{T}}{\sigma\sqrt{\mathbf{T}}} \quad \text{e}$$

$\mathbf{d_2} = \mathbf{d_1} - \sigma\sqrt{\mathbf{T}}$ obtêm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{SN(d_1)} + \mathbf{S}\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{N(d_1)} - \mathbf{Ke^{-RT}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{SN(d_2)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{N(d_1)} + \mathbf{S}\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\pi}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{d_1}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{N(d_1)} - \mathbf{Ke^{-RT}}\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\pi}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{d_2}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{N(d_2)}$$

Cálculos das derivadas de $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}}\mathbf{d_1} = \frac{\mathbf{1/S}}{\sigma\sqrt{\mathbf{T}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{S}\sigma\sqrt{\mathbf{T}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} d_2 = \frac{1/S}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Substituindo-as na expressão de $\frac{\partial c}{\partial S}$:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{d_1^2}{2}}\right)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - Ke^{-RT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\left(e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \left(e^{-\left(RT+\frac{d_2^2}{2}\right)}\right)\frac{K}{S}\right)$$

Fazendo-se:

$$\frac{K}{S} = \frac{1}{S/K} \quad \text{e} \quad \frac{1}{S/K} = e^{-Ln(S/K)}$$

Substituindo-se esta expressão em $\frac{\partial c}{\partial S}$:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\left(e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \left(e^{-\left(RT+\frac{d_2^2}{2}\right)}\right)\left(e^{-Ln\left(\frac{S}{K}\right)}\right)\right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\left(e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-\left(RT + Ln(S/K) + \frac{d_2^2}{2}\right)} \right)$$

Por outro lado

$$d_2^2 = d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T$$ ou

$$d_2^2 = d_1^2 - 2\left(\frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T$$

$$d_2^2 = d_1^2 - 2\left(Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right) + \sigma^2 T$$

$$d_2^2 = d_1^2 - 2Ln\left(\frac{S}{K}\right) - 2RT - \sigma^2 T + \sigma^2 T$$

Explicitando-se d_1^2:

$d_1^2 = 2RT + 2Ln\left(\frac{S}{K}\right) + d_2^2$. Sendo equivalente a $-\frac{d_1^2}{2} = -\left(RT + Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{d_2^2}{2}\right)$

Verifica-se portanto que:

$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\left(e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-\frac{d_1^2}{2}} \right)$. Portanto $\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$.

16. EXERCÍCIOS

Retomando-se os dados do exemplo 5, onde:

S = $18,00

K = $15,00

R = 10% ao ano

T = 6 meses (0,5 ano)

Б = 15% ao ano

Determinar:

1. Delta da opção de compra:

2. Delta da opção de venda:

3. Gama da opção de compra:

4. Gama da opção de venda:

5. Theta da opção de compra:

6. Theta da opção de venda:

7. Vega da opção de compra:

8. Vega da opção de venda:

9. Rho da oção de compra:

10. Rho da opção de venda:

BIBLIOGRAFIA

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro.** Ed. Quality, Rio.

Trata-se de um “best-seller”, devendo-se procurar a edição mais recente. É uma obra fundamental para o conhecimento do mercado, antes de um tratamento mais quantitativo.

LEMGRUBER, Eduardo Facó. **Avaliação de Contratos de Opções**. BM&F, São Paulo, 1995.

HIGHAM, Desmond, J. **Financial Option Valuation.** Ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

HULL, John. **Options, Futures and Other Derivatives**. Quinta edição. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002.

O livro de Hull é tratado como uma verdadeira “bíblia” no assunto. Para os leitores que prefiram o texto em português há uma versão disponível, entretanto de edição anterior.

KWOK, Y. K. **Mathematical Models of Finantial Derivatives**. Ed. Springer, Berlim, 1998.

Indicado para os leitores com facilidades em inglês e interessados em um texto ce conteúdo mais formal, do ponto de vista matemático.

NETO, Lauro de A. S., TAGLIAVINI, Massimo. **Opções – do Tradicional ao Exótico**. Ed. Atlas, São Paulo. 1994.