Breve História da Álgebra Abstrata

César Polcino Milies

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66.281
05311-970 - São Paulo - Brasil
polcino@ime.usp.br

Introdução

A álgebra, tal como apresentada hoje nos nossos cursos universitários, costuma resultar de difícil compreensão aos nossos estudantes, precisamente por seu carácter abstrato. Normalmente, uma estrutura é definida a partir dos axiomas que a caracterizam e, logo depois, uma sucessão aparentemente interminável de teoremas passa a ser deduzida destes axiomas. Muitas vezes, resulta difícil para o aluno compreender porque a área se desenvolveu na direção em que ela é apresentada e porque alguns resultados são mais relevantes do que outros.

Nesse sentido, um conhecimento da história do assunto pode tornar claro porque é natural considerar uma determinada estrutura e não outra, um determinado conjunto de axiomas e não outro; porque algumas perguntas são mais relevantes do que outras. Na verdade, a história mostrará que muitas vezes o desenvolvimento de um dado assunto não foi linear nem simples, que os matemáticos levaram muito tempo para compreender a importância de um conceito e, às vezes, até para admití-lo como válido.

A história que pretendemos contar nestas páginas é fascinante em mais de um sentido. Não somente diz como determinadas idéias foram sendo introduzidas gradativamente na matemática, como descreve também o longo processo que levou esta ciência na direção de uma abstração sempre crescente. Também nos mostra que muitas vezes, um determinado conceito foi se impondo por força das circustâncias, como resultado de um acúmulo de descobertas que apontavam na sua direção, mesmo apesar da resistência de um bom número de matemáticos, muitos destes de primeira qualidade.

A história da matemática está intimamente ligada com o desenvolvimento de todas as áreas da cultura humana e muitas vezes são motivações vindas de campos tão diversos como a física, a filosofia ou a arte, que determinam o progresso desta ciência. Algumas destas influências, se bem que não todas, resultarão aparentes nesta nossa história.

Este é um assunto que tem nos atraído de longa data, de modo que tratamos dele em outras oportunidades e alguns dos nossos escritos anteriores tiveram influência na redação deste, particularmente [20], [21], [22] e [24]. É claro que algumas referências clássicas de história da matemática tiveram também grande influência no nosso trabalho, como [2], [3], [13] e [31].

Ao longo destas notas fizemos referência também a uma séria de artigos sobre história da álgebra e alguns textos originais na esperança de indicar possíveis direções de estudo ao leitor interessado.

Sumário

Capítulo 1

Um panorama geral

1.1 Introdução

Durante muitíssimo tempo, a palavra *Álgebra* designava aquela parte da matemática que se ocupava de estudar as operações entre números e, principalmente, da resolução de equações. Nesse sentido, pode-se dizer que esta ciência é tão antiga quanto a própria história da humanidade, se levamos em conta que esta última se inicia a partir da descoberta da escrita.

De fato, tanto nas tabuletas de argila da suméria quanto nos papiros egípcios, encontramos problemas matemáticos que lidam com a resolução de equações. No Papiro Rhind, por exemplo, documento egípcio que data aproximadamente do ano 1650 a.C. e no qual o escriba conta que está copiando material que provém do ano 2000 a.C., encontramos problemas sobre distribuição de mercadorias que conduzem a equações relativamente simples. Surpreendentemente, descobrimos também que os antigos babilônios sabiam resolver completamente equações de segundo grau (veja, por exemplo o Capítulo III de [3]).

Desde os seus começos, a álgebra se preocupou sempre com a procura de métodos gerais e rigorosos. Assim por exemplo, R.J. Gillings [9, Appendix I] comentando os métodos que os egípcios usavam para lidar com a resolução de equações diz:

> *Os estudiosos da história e filosofia da ciência do século vinte, ao considerar as contribuições dos antigos Egípcios, se inclinam para atitude moderna de que um argumento ou prova lógica deve ser* simbólico *para ser considerado rigoroso, e que um ou dois exem-*

> *plos específicos usando números escolhidos não podem ser considerados cientificamente sólidos. Mas isto não é verdade! Um argumento ou demonstração não simbólico* pode *ser realmente rigoroso quando dado p[ara um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável seja* típico *e que uma conseqüente generalização para* qualquer *valor seja* imediata*. Em qualquer dos tópicos mencionados neste livro, onde o tratamento dado pelos escribas seguia estas linhas, ambos os requisitos eram satisfeitos de modo que os argumentos colocados pelos escribas são já* rigorosos*... o rigor está implícito no método.*

Quando finalmente se desenvolveu uma notação apropriada (empregando letras para reperesentar coeficientes e variáveis de uma equação), foi possível determinar "fórmulas gerais" de resolução de equações e discutir métodos de trabalho também "gerais". Porém, mesmo nestes casos, tratava-se de situações relativamente contcretas. As letras representavam sempre algum tipo de números (inteiros, racionais, reais ou complexos) e utilizavam-se as propriedades destes de forma mais ou menos intuitiva. Como veremos adiante, a formalização destes conceitos de modo preciso só aconteceria a partir do século XIX.

Foi precisamente nesse século que alargou-se consideravelmente o conceito de operação. Alguns autores da época não mais se restringem a estudar as operações clássicas entre números, mas dão ao termo um significado bem mais amplo e estudam operações entre *elementos*, sem se preocupar com a natureza destes, interessando-se apenas com as *propriedades* que estas operações verificam.

A passagem da álgebra clássica para a assim chamada *álgebra abstrata* foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-cietíficos da disciplina como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica - num certo sentido - uma mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreenção de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho.

J. Dieudonné disse, em [1, Capítulo III] que "*... em matemática, os grandes progressos estiveram sempre ligados a progressos na capacidade de elevar-se um pouco mais no campo da abstração*" e, na mesma obra, A. Lichnerowicz [1, Capítulo IV] observou que "*é uma característica da matemática repensar* *integralmente seus próprios conteúdos e nisso reside, inclusive, uma condição essencial para seu progresso*". A história da álgebra abstrata ilustra perfeitamente estes pontos de vista.

Pode-se dizer que há dois fatores que contribuiram fundamentalmente para o desenvolvimento da álgebra: de um lado, a tendência a aperfeiçoar as notações, de modo a permitir tornar o trabalho com as operações (e equações) cada vez mais simples, rápido e o mais geral possível e, por outro lado, a necessidade de introduzir novos conjuntos de números, com o consequente esforço para compreender sua natureza e sua adequada formalização.

1.2 O simbolismo algébrico

É bem sabido que o uso de uma notação adequada é fundamental para o bom desenvolvimento de uma área da matemática. Porém, a história nos ensina que nem sempre é fácil chegar a uma tal notação. Um bom exemplo vem dos próprios números naturais. A numeração indo-arábica que usamos ainda hoje começou a ser desenvolvida na Índia e a primeira referência ao princípio posicional aparece pela primeira vez na obra de **Aryabhata** chamada *Aryabatiya*, publicada em 499, onde encontramos a frase *de lugar para lugar, cada um vale dez vezes o precedente.* A primeira ocorrência de fato se dá num objeto do ano 595, onde a data 346 aparece em numeração posicional e o registro mais antigo do uso do número zero se acha numa inscrição indiana de 876 d.C.

A necessidade de uma notação mais sofisticada se manifestou pela primeira vez em relação à resolução de equações algébricas. Como já observamos, os egípcios resolviam equações de primeiro grau e algumas equações particulares do segundo grau, enquanto que os babilônios conheciam o método para resolver qualquer equação de segundo grau. Também os gregos resolviam este tipo de equações, por métodos geométricos mas, em todos os casos, não havia notações nem fórmulas gerais.

É no século IV d.C., na *Aritmética* de **Diophanto**, que encontramos pela primeira vez o uso de uma letra para representar a incógnita de uma equação, que o autor chamava *o número do problema.* Como os manuscritos originas de Diofanto não chegaram até nós, não sabemos com toda certeza quais os símbolos que ele usava, mas acredita-se que representava a incógnita pela letra ς, uma variante da letra σ quando aparece no fim de uma palavra (por exemplo, em ἀριθμός - *arithmos*). Esta escolha se deve provavelmente ao fato de que, no sistema grego de numeração, as letras representavam também números conforme sua posição no alfabeto, mas a letra ς não fazia parte do sistema e não correspondia, assim, a nenhum valor numérico particular.

Ele usava também nomes para designar as várias potências da incógnita, como quadrado, cubo, quadrado-quadrado (para a quarta potência), quadrado-cubo (para a quinta) e cubo-cubo (para a sexta). O uso de potências superiores a três é notável uma vez que, como os gregos se apoiavam em interpretações geométricas, tais potências não tinham um significado concreto. Porém, de um ponto de vista puramente aritmético, estas potências sim tem significado e esta era a postura adotada por Diofanto.

A partir de então, os métodos e notaçoes de Diofanto foram se aperfeiçoando muito lentamente. Mesmo os símbolos hoje tão comuns para representar as operações demoraram a ser introduzidos. Muitos algebristas usavam p e m para representar a adição e a subtração por serem as iniciais das palavras latinas *plus* e *minus*. O símbolo $=$ para representar a igualdade foi introduzido só em 1557 por Robert Recorde e não voltou a aparecer numa obra impressa até 1618. Autores como Kepler, Galileo, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Napier, Briggs e Fermat, entre outros, ainda usavam alguma forma retórica em vez de um símbolo, como as palavras *aequales, esgale, faciunt, gheljck* ou a abreviatura *aeq.* Para uma história detalhada da evolução do simbolismo algébrico, o leitor pode consultar a referência clássica de F. Cajori [4].

A notação de expoentes é usada por **Nicolas Chuquet** (1445?-1500?) na sua *Tripary*, onde escreve expressões como $12^3, 10^3$ e 120^3 para representar o que hoje escreveríamos como $12x^3, 10x^3$ e $120x^3$ e também 12^0 e 7^{1m} para $12x^0$ e $7x^{-1}$.

Os primeiros passos para a introdução do conceito de *polinômio* e seu uso para a formulação de problemas de resolução de equações foram dados por **Simon Stevin** (1548 - 1620). Nascido em Bruges, mudou para Leyden em 1582, foi tutor de Maurício de Nassau e serviu o exército holandês. Ele foi um defensor do sistema de Copérnico e o primeiro a discutir e sugerir o emprego de frações decimais (por oposição ao sistema sexagesimal defendido por outros), na sua obra mais conhecida *De Thiende*, publicada em Flamengo em 1585 e traduzida ao francês, sob o título *La Disme*, no mesmo ano.

Alí ele usou símbolos como ⓪, ①, ②, etc. para indicar as posições das unidades, dízimas, centésimas, respectivamente. Assim por exemplo, ele escreve $875,782$ como 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③. No restante do livro, ele estuda as operações entre dízimas e justifica as regras de cálculo empregadas. O leitor interessado pode ver uma tradução ao inglês de *De Tiende* em [28, pp. 20-34].

No seu livro seguinte, *"L' Arithmetique"*, publicado em 1585, ele introduz uma notação exponencial semelhante para denotar as várias potências de uma variável. As potências que nós escreveríamos com x, x^2 x^3 etc. são denotadas por ele como ⓪, ①, ②, e assim, por exemplo, o polinômio $2x^3 + 4x^2 + 2x + 5$ se escreveria, na sua notação como:

2 ③ + 4 ② + 2 ① + 5 ⓪

Ele denomina estas expressões de *multinômios* e mostra como operar com eles. Entre outras coisas, observa que as operações com multinômios tem muitas propriedades em comum com as operações entre "números aritméticos". Ainda, ele mostra que o algorítmo de Euclides pode ser usado para determinar o máximo divisor comum de dois "multinômios".

É interessante destacar aqui que nos encontramos frente a dois progressos notáveis na direção da abstração. De um lado temos a percepcão, cada vez mais clara, de que os métodos de resolução de equações dependem unicamente do grau da equação e não dos valores dos coeficientes numéricos (vale lembrar que autores como Tartaglia, Cardano e outros, que se utilizavam apenas de coeficientes positivos, consideravam como problemas diferentes, por exemplo, as equações da forma $X^3 = aX + b$ e $X^3 + aX = b$). Mais importante ainda, vemos que Stevin trata seus multinômios como novos objetos matemáticos e estuda as operações entre eles.

Mais interessante ainda é o trabalho de **François Viète** (1540 - 1603). Nascido em Fontenay-le Comte, teve formação de advogado e, nesta condição, serviu ao parlamento de Bretania em Rennes e foi banido de suas atividades, devido à oposição política, entre 1584 e 1589, quando foi chamado por Henri III para ser conselheiro do parlamento, em Tours. Nos anos em que esteve afastado da atividade política, dedicou-se ao estudo da matemática e, em particular, aos trabalhos de Diophanto, Cardano, Tartaglia, Bombelli e Stevin. Da leitura destes trabalhos ele teve a idéia de utilizar letras para representar quantidades. Isto já tinha sido feito no passado, até por autores como Euclides e Aristóteles, mas seu uso era pouco frequente.

Sua principal contribuição à Álgebra aparece no seu livro *In Artem Analyticam Isagoge* - Introdução à Arte Analítica - impresso em 1591, onde trata das equações algébricas de um novo ponto de vista. Ele fez importantes progressos na notação e seu verdadeiro mérito está em ter usado letras *não somente para representar a "incógnita", mas também para representar os coeficientes ou quantidades conhecidas.* Ele usava consonantes para representar quantidades conhecidas e reservava as vogais para representar as incógnitas. Deixamos Viète descrever a grande descoberta com suas próprias palavras[1]

> Este trabalho pode ser ajudado por um certo artifício. Magnitudes dadas serão distinguidas das desconhecidas e requeridas por um simbolismo, uniforme e sempre fácil de perceber, como é possível designando as quantidades requeridas pela letra A ou por outras letras vogais A,I,O,V,Y e as dadas pelas letras B,G,D ou outras consonantes.

Assim por exemplo, a equação que nós escreveríamos como $bx^2 + cx = d$ era representada por ele na forma:

B in A quadratum plus C plano in A aequalia D solido.

Como Viète pensava geometricamente, requeria, para suas equações, um *princípio de homogeneidade*, i.e., todos os termos de uma dada equação deveriam ter a mesma "dimensão"; assim por exemplo, todos os termos de uma equação quadrática, tal como a dada acima, deviam representar volumes. É por causa disso que o coeficiente da variável C é acompanhado do adjetivo *plano*, pois devia representar uma área. Da mesma forma, D é acompanhado do termo *sólido* para enfatizar que representa um volume.

Uma restrição à generalidade de sua notação é que ele representava por letras apenas números positivos e, como muitos dos seus predecessores, não utilizava coeficientes negativos. **John Hudde** (1633 - 1704) foi o primeiro a usar, em 1657, letras para representar coeficientes que podiam ser tanto positivos quanto negativos.

Viète chamava sua álgebra simbólica de *logística speciosa* por oposição à *logística numerosa*, que trata dos números. É importante observar que Viète tinha plena consciência de que seu emprego de letras lhe permitia trabalhar com *classes de equações*, por oposição ao emprego de números, que permite apenas trabalhar com um exemplo de cada vez. Com isso ele tornou explícita

[1] Viète, *Opera Mathematica* 1646, p. 8.

a diferença entre Álgebra e Artimética: para ele, a Álgebra - *logística speciosa* - era um método para operar com espécies ou formas de coisas e a Aritmética - *logística numerosa* - lidava apenas com números.

Também tentou "trabalhar algebricamente", provando, por exemplo, as identidades que os gregos tinham exibido por métodos geométricos. Assim, no seu *Zeteticorum Libri Quinque* - Cinco Livros de Análise[2] - publicado em 1593, ele utiliza o método de "completar quadrados" numa equação de segundo grau e também encontramos ali identidades gerais do tipo:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$

que ele escreve na forma:

$$a\ cubus + b\ in\ a\ quad.\ 3 + a\ in\ b\ quad.3 + b\ cubo\ aequalia\ \overline{a+b}\ cubo.$$

Após sua morte, seu amigo escocês Alexandre Anderson fez publicar, em 1615, num só volume, dois artigos de Viète escritos em torno de 1591, intitulados *De aequationem recognitione* e *De aequationem emendationem.* [3]

---

[2]Viète não usava o termo Álgebra que, por ser de origem árabe, não considerava adequado para a Europa cristã; no seu lugar empregava o termo Análise que, devido talvez a sua influência, foi adotado depois como sinônimo de "Álgebra Superior".

[3]Dois episódios ilustram muito bem o talento matemático de Viète e fama que chegou a desfrutar ainda durante sua vida Em 1593, o matemático belga Adriaen van Roomen (1561-1615) - ou Adrianus Romanus, na versão latinizada do seu nome - propôs "a todos os matemáticos" o problema de resolver uma determinada equação de grau 45, do tipo:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = K.$$

O embaixador dos Países Baixos na corte de França afirmou então que nenhum matemático francês seria capaz de resolver esta equação. O rei, Henrique IV, fez Viète saber deste desafio e ele notou que a equação proposta resultava de expressar a igualdade $K = sen(45.\theta)$ em termos de $x = sen\ \theta$ e conseguiu achar, nessa primeira audiência, uma raiz positiva. No dia seguinte, ele achou todas as 23 raízes positivas da equação. Van Roomen ficou tão impressionado que fez uma visita especial a Viète. Este publicou sua solução em 1595, num tratado intitulado *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum propusuit Adrianus Pomanus, responsum.*

Outro episódio que ilustra sua extraordinária capacidade é o seguinte. Durante a guerra com a Espanha, ainda a serviço de Henrique IV, ele pode decifrar o o código utilizado pelos espanhois a partir de cartas que foram interceptadas e, dali em diante, conhecer o conteúdo de novas cartas escritas nesse código. Os espanhois achavam seu código tão difícil de ser quebrado, que acusaram a França, perante o Papa, de usar feitiçaria.

O uso de letras para representar classes de números e assim tratar das equações de forma mais geral demorou a ser aceito. Um aperfeiçoamento desta notação foi devido a **René Descartes** (1596-1650) que, na sua obra intitulada utiliza pela primeira vez a prática hoje usual de utilizar as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas e as últimas, como *x,y z* para as incógnitas. É precisamente nesta obra que Descartes apresenta as idéias que deram orígem à Geometria Analítica, junto com as contribuições de Pierre de Fermat. Esse texto não foi apresentado como um livro independente mas como um apêndice da obra pela que seria mais conhecido, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciénces*, em 1637[4] A obra foi publicada em francês e não latim, que era a linguagem científica universal da época. **Frans Van Schooten** (1615-1660), um matemático holandês, publicou em 1649, em Leyden, uma tradução ao latim que incluia material suplementar e que foi ampliada a dois volumes em 1654-1661. Foi devido a esta publicação e a ação de Von Schooten e seus discípulos que a geometria cartesiana se desenvolveu rapidamente.

Tal como Viète, Descartes utilizava as letras para indicar apenas números positivos, embora não hesitasse em escrever diferenças de coeficientes literais. O uso de letras para representar tanto números positivos quanto negativos aparece pela primeira vez em 1637 numa obra de **John Huddle** (1633-1704) intitulada *De reducrione a equationenum*, que também fez parte da edição de Schooten da *Geometria* de Descartes de 1654-1661.

O progresso final, em relação ao uso da notação consistiu em usar uma letra também para representar o *grau* de uma equação. Nossa notação moderna que utiliza expoentes negativos e fracionários foi introduzida por **Isaac Newton** (1642-1727) numa carta dirigida a Oldenburg, então secretário da Royal Society, em 13 de junho de 1676, onde diz:

> Como os algebristas escrevem a^2, a^3, a^4, etc., para $aa, aaa, aaaa$, etc., também eu escrevo $a^{1/2}, a^{2/3}, a^{5/4}$ para $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^5}$; e escrevo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, etc., para $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$,etc.

Também sua fórmula para o binômio foi anunciada nesta carta, usando letras para representar inclusive expoentes racionais. Antes de Newton, já

[4]Neste livro ele descreve o uso da *dúvida metódica* como forma de tornar a idéias claras e precisas a partir das quais poderia-se chegar a conclusões válidas. Por esta e muitas outras contribuições, ele veio a ser considerado o 'pai da filosofia moderna'.

John Wallis (1616-1703) tinha usado expoentes literais, em 1657, em expressões tais como $AR^m \times AR^n = A^2R^{m+n}$ ao tratar de progressões geométricas.

O primeiro a usar o símbolo + tal como o conhecemos foi **Robert Recorde** (1510-1558), que em 1557 publicou o primeiro texto de álgebra da Inglaterra, chamado *The Whetstone of Witte*. Ali ele introduz o símbolo dizendo:

> I will sette as I doe often in woorke vse, a pair of paralleles or Gemowe [5]lines, of one length, thus :=, bicause no .2 thynges, can be moare equalle.
>
> (Usarei, como faço frequentemente no trabalho, um par de linhas paralelas, do mesmo comprimento assim :=, porque duas coisas não podem ser mais iguais).

Este símbolo não foi incorporado rápidamente; como vimos, Viète, usava ainda, em 1589, a expressão *aequalis* e, mais tarde, o símbolo $\sim$. Descartes, em 1637, usava $\propto$ que provavelemente deriva de *æ*, usado como abreviatura de aequalis.

Incidentalmente, vale a pena mencionar que os símbolos + e - hoje usados para denotar adição e subtração respectivamente aparecem impressos pela primeira vez num texto de **Johannes Widman**, professor da Universidade de Leipzig nascido em torno de 1460. O sinal + deriva, aparentemente da palavra latina *et*, usada em vários manuscritos para designar a adição e o sinal - da letra m que, como vimos, era usada para abreviar *minus*. Eles são usados numa aritmética comercial intitulada *Rechenung auff allen Kauffmanschafft* que publicou em 1489, mas estes sinais já aparecem em notas manuscritas de um aluno seu de 1486 que se conservam na biblioteca de Dresden (Codex Lips 1470).

Eles foram aceitos gradativamente e já **Boaventura Cavalieri**, um discípulo de Galileo, na sua *Exercitationes Geometricae Sex* de 1647 os usa como se fossem familiares ao leitor.

[5]Termo derivado de *gemellus*, gémeas, que ele já usara na sua *Pathemwaie to Knowledge* para designar as paralelas.

Capítulo 2

Os campos numéricos

2.1 Introdução

As orígens da noção de número ou operação são tão antigas quanto a própria cultura humana. Parece claro que os números naturais; i.e., os elementos da seqüência $0, 1, 2, 3, \ldots$ desenvolveram-se a partir da experiência cotidiana e os seu emprego foi generalizando-se gradativamente. Algo análogo aconteceu com os números racionais não negativos; i.e., os números da forma a/b, onde a e b são números naturais. Já encontramos o uso destes números no Egito, na Babilônia, e os gregos fizeram deles usos muito sofisticados.

Algo bem diferente aconteceu com os números negativos. O primeiro uso conhecido dos inteiros negativos encontra-se numa obra indiana, devida a Brahmagupta, de 628 d.C. aproximadamente, onde são interpretados como dívidas. Desde seu aparecimento, eles suscitaram dúvidas quanto a sua legitimidade. Assim por exemplo, Stifel em 1543 ainda os chama de *números absurdos* e Cardano, de quem nos ocuparemos adiante, os considerava *soluções falsas* de uma equação.

Uma coisa semelhante aconteceu com os números irracionais; isto é, aqueles que não podem ser escritos na forma a/b com a e b números inteiros; por exemplo, os números que hoje representamos como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$, etc. Já ná época dos pitagóricos, no século VI a.C. se sabia da existência de segmentos cuja medida não era um número racional: dado um quadrado de lado 1, pode-se provar facilmente que sua diagonal de ter medida igual a $\sqrt{2}$. Para autores como Pascal e Barrow, símbolos tais como $\sqrt{2}$ representavam apenas *magnitudes geométricas* que não tinham existência independente, e cuja medida apenas podia ser aproximada por números racionais. Tal é também o ponto de vista assumido por Newton na sua *Arithmeica Universalis*, publicada em 1707.

Quando a ciência européia ainda não tinha clara a validade do emprego dos números negativos ou dos irracionais, irromperam no mundo matemático os números que hoje chamamos de *complexos*.

O fato de que um número negativo não tem raiz quadrada parece ter sido sempre claro para os matemáticos que se depararam com a questão.

A rigor, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado apenas como uma indicação de que o problema originalmente proposto não tinha solução. Como veremos, foram só as equações de terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com estes números.

Vejamos inicialmente alguns antecedentes. Um primeiro exemplo desta atitude aparece na *Arithmetica* de Diophanto. Aproximadamente no ano de 275 d.c. ele considera o seguinte problema:

> Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.

Chamando x e y o comprimento dos catetos desse triângulo temos, na nossa notação atual:

$$\frac{1}{2}xy = 7 \quad ; \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Substituindo y em função de x obtemos a equação:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0,$$

cujas raízes são:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Neste ponto Diophanto observa que só poderia haver solução se $(\frac{172}{2})^2 \geq 24 \times 336$. Neste contexto, é claro que não há necessidade alguma de introduzir um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Na verdade, a primeira aparição escrita de um radical de um número negativo é um pouco anterior: ele aparece na *Estereometria* de Herón, matemático grego do período Alexandrino, publicada aproximadamente em 75 d.c.. Num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide aparece a necessidade de avaliar $\sqrt{81-144}$. A questão parece não causar nenhum problema simplesmente porque logo em seguida os números aparecem trocados como $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$ que é calculado aproximadamente como $7\frac{16}{16}$.

Novas referências à questão aparecem na matemática indiana. Aproximadamente no ano 850 d.c., o matemático indiano Mahavira afirma:

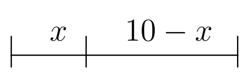
> ... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem portanto raiz quadrada.

Já no século XII o famoso matemático Bhascara (1114-1185 aprox.) escreve:

> O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.

Também na matemática européia aparecem observações desta natureza; Luca Paccioli, na sua *Summa di Arithmetica Geometria*, publicada em 1494, escreve que a equação $x^2+c=bx$ é solúvel somente se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$ e o matemático francês Nicolas Chuquet (1445-1500 aprox.) faz observações semelhantes sobre "soluções impossíveis" num manuscrito não publicado de 1484.

O próprio Cardano se deparou com este tipo de questões e, embora mantivesse a atitude dos seus contemporaneos, no sentido de entender que raízes de números negativos indicavam apenas a não existência de soluções de um determinado problema, pelos menos num caso ele deu um passo a mais. No Capítulo 37 do *Ars Magna* ele considera o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40.



Se chamamos de x o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10-x$ e a condição do problema se traduz na equação:

$$x(10-x)=40.$$

Isto leva a equação $x^2-10x+40=0$ cujas soluções são $x=5\pm\sqrt{-15}$. Ele reconhece que o problema dado não tem solução mas, talvez a título de curiosidade, ele observa que trabalhando com essas expressões como se fossem números, *deixando de lado as torturas mentais envolvidas e multiplicando* $5+\sqrt{-15}$ *por* $5-\sqrt{-15}$ *se obtém* $25-(-15)$ *que é* 40.

Em consequência, ele chama estas expressões de *raízes sofísticas* da equação e diz, a respeito delas, que *são tão sutis quanto inúteis.*

2.2 A necessidade dos números complexos

Raphael Bombelli (1526-1573) era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era claro (ou, em suas próprias palavras: *ma nel dire fù oscuro*). Decidiu então escrever um livro, expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência.

Publicou então uma obra que viria a se tornar muito influente, sob o título de *l'Algebra*, em três volumes, em 1572, em Veneza. No capítulo II desta obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro.

Em particular na página 294 e seguintes, ele considera a equação $x^3 = 15x+4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo de uma raiz, ele obtém:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Seguindo Cardano, ele também chama esta expressão de *sofística* mas, por outro lado, ele percebe que $x=4$ é, de fato, uma raiz da equação proposta.

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta. É necessário então compreender o que está acontecendo.

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a+\sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$ i.e., que verifique $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$. A forma em que ele calcula esta raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de $2-\sqrt{-121}$ seja da forma $a-\sqrt{-b}$. Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, tem que $a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4$. Neste ponto felizmente as quantidades não existentes se cancelam e obtemos $a=2$. Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação $(a+\sqrt{-b})^3 = 2+\sqrt{-121}$ e deduzir que $b=1$. Assim, ele obtém que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ e que:

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$

é uma solução da equação dada. Claro que este método não é verdadeiramente útil para resolver equações, pois para o cálculo da raiz cúbica foi necessário conhecer de antemão a solução, mas tem o mérito de explicar como se pode obter a solução apesar de aparecer, no caminho, uma raiz quadrada de um número negativo.

Bombelli percebeu claramente a importância deste achado. Ele diz:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova.

O caso em que $(\frac{a}{3})^3 > (\frac{b}{2})^2$, era chamado na época de *casus irreducibilis* porque qualquer tentativa de calcular de fato o valor da incógnita pela fórmula de Cardano-Tartaglia, sem conhece-lo antecipadamente leva, de novo, à equação de terceiro grau original. Porém, este era, em certo sentido, o mais importante de todos, pois é justamente o caso em que a equação considerada tem três raízes reais. Bombelli justifica seu estudo dizendo:

> Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.

Ele utiliza a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotariamos como $+i$ e *meno di meno* para $-i$. Ele enuncia então o que chama de regras do produto:

Più via più di meno fa più di meno,
Meno via più di meno fa meno di meno,
Più via meno di meno fa meno di meno,
Meno via meno di meno fa più di meno,
Più di meno via più di meno fa meno,
Meno di meno via più di meno fa più,
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Literalmente, isto significa:

$$\begin{aligned}
+.(+i) &= +i \\
-.(+i) &= -i \\
+.(-i) &= -i \\
-.(-i) &= +i \\
(+i).(+i) &= - \\
(-i).(+i) &= + \\
(-i).(-i) &= -
\end{aligned}$$

É interessante notar que Bombelli se deparava com a dificuldade adicional de não dispor de uma boa notação. Ele utilizava p (plus) para indicar a soma; m (minus) para a subtração; R (radix) para raíz quadrada e R^3 para a raiz cúbica. Também não dispunha de parênteses; nos seus manuscritos sublinhava expressões para indicar quais os termos afetados por um radical. Assim por exemplo, a expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ era escrita na forma

$$R^3\underline{|2pR\underline{|0m121|}|}.$$

Note que, como não escrevia diretamente números negativos, ele escreve -121 como $0m121$. Desta forma, a solução da equação discutida acima aparecia como:

$$R^3\underline{|2pR\underline{|0m121|}|}\ p\ R^3\underline{|2mR\underline{|0m121|}|}.$$

Também é interessante observar que Bombelli não empregava símbolo para igualdade; desta forma, a equação em apreço era escrita como:

$$I^{\overset{3}{\smile}}\ \textit{eguale a}\ 15^{\overset{1}{\smile}}p.4.$$

2.3 Progressos Ulteriores

Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão global da história do assunto. Começaremos listando alguns progressos na notação para depois nos ocuparmos da evolução dos conhecimentos.

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard.

- O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Carl Friederich Gauss em 1801.
- Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.
- A expressão *número complexo* foi introduzida por Gauss em 1832.

Como observamos na seção anterior, a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido a sua óbvia utilidade para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. A primeira tentativa de legitimação, via uma "interpretação geométrica", é devida a **John Wallis** (1616 - 1703), contemporâneo de Newton e professor na Universidade de Oxford. Em 1673 ele publicou um tratado intitulado *Álgebra*, em cujo capítulo LXVI discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara esta questão com a da existência de quantidades negativas [1]:

Depois de considerar diversos exemplos de números negativos interpretados em termos de segmentos sobre uma reta orientada, ele tenta uma interpretação para as quantidades imaginárias:

> Agora, o que é admitido para linhas, deve, pela mesma razão, ser permitido também para planos.
>
> Por exemplo: suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo a resposta é 10 acres, ou +10 (pois $30 - 20 = 10$).
>
> ... Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser -10 (pois $30 - 20 - 20 = -10$) ....
>
> Mas agora, supondo que esta planície negativa de -1600 square perches [20 acres correspondem a 1600 square perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E assim, qual será esse lado?
>
> Não podemos dizer que é 40 e nem -40 ... Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raíz de um quadrado negativo) ou $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$.

[1] Nós citamos da transcrição de D. E. Smith [28]

Como era de se esperar, esta interpretação não teve uma grande acolhida entre seus contemporâneos e nenhuma repercução posterior.

Notemos que, no trabalho de Bombelli, este *assume* qua a raíz cúbica de um complexo é outro número complexo e, partindo desta suposição e, aceitando implicitamente que as operações entre complexos tem as mesmas propriedades que as operações com reais, ele a calcula em certos casos particulares. Notemos que, até aqui, nada garante que raízes cúbicas - ou, em geral raízes n-ésimas de complexos - são, de fato, complexos.

Tal como assinala M. Kline [13, pag. 595], no começo do século XVIII a maioria dos matemáticos ainda acreditava que raízes de diferente ordem de números complexos levariam à introdução de diferentes tipos de complexos.

Abraham De Moivre (1667 - 1754) nasceu na França, mas viveu na Inglaterra a partir dos dezoito anos, quando o Edicto de Nantes, que protegia os Hugonotes, foi revogado. Estudou matemática sozinho, após ler os *Principia* de Newton, chegando a se tornar membro de Royal Society e das academias de Paris e Berlim. Seu trabalho versou fundamentalmente sobre trigonometria, probabilidade e cálculo de anuidades. Em 1722, utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implica na fórmula que leva seu nome e que diz como calcular a raiz n-ésima de um número complexo, que ele escreveu em casos particulares. Porém, ele nunca chegou a enunciá-la ou a demonstrá-la no caso geral.

Esta tarefa coube a **Leonhard Euler** (1707 - 1754), considerado o mais prolífico matemático de todos os tempos. Numa carta endereçada a Jean Bernoulli, datada em 18 de outubro de 1740, ele afirma que $y = 2cos\phi$ e $y = e^{ix} + e^{-ix}$ eram ambas soluções da mesma equação diferencial (o que reconheceu através do desenvolvimento em série das soluções) e que, portanto, deviam ser iguais. Publicou este resultado em 1743; explicitamente:

$$cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \qquad sen\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2i}$$

Em 1748 ele demonstrou a fórmula de De Moivre e extendeu sua validade para todo exponente n real. Com isso, a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida.

Obviamente, Euler compreendia e utilizava muito bem os números complexos. O fato de ele próprio ter grandes dúvidas quanto a sua legitimidade ilustra claramente o status deste corpo númerico na época. Diz ele na sua

Vollständige Anleitung zur Algebra publicada primeiro em russo em 1768-69 e depois em alemão em 1770 e que se tornou uma referência clássica nesta área pelos próximos dois séculos:

> Desde que todos os números concebíveis são maiores do que 0, ou menores do que 0 ou iguais a 0, é claro que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluida entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que estes são números impossíveis. E esta circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação.

2.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

A questão de resolver equações por radicais se tornou um problema central na álgebra, especialmente a partir do século XIV. Note que o fato de se ter uma fórmula para resolver equações de um determinado grau pode não ser muito útil, do ponto de vista prático. Basta observar a fórmula de Cardano-Tartaglia para perceber que, salvo alguns casos particulares em que os coeficientes são especialmente simples, a aplicação da fórmula implica em calcular raízes quadradas e cúbicas, que certamente deverão ser aproximadas. As raízes reais destas equações podem ser calculadas mais facilmente e com uma aproximação melhor usando os métodos do cálculo (por exemplo, o método de Newton, ou de Role).

A razão deste interesse é mais teórica. Tendo em vista a fórmula de De Moivre, provada por Euler, resultas claro que se uma equação pode ser resolvida mediante operações algébricas e radicais, então suas soluções serão seguramente números complexos e isso mostraria que novas ampliações dos campos numéricos não se fazem necessárias.

Parecia natural se provar que uma equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes. Ainda, um tal resultado seria útil pois o uso do método da decomposição em frações parciais para integrar quocientes de polinômios levou naturalmente à questão de decidir se todo polinômio com coeficientes reais pode, ou não, se escrever como o produto de fatores lineares e fatores quadráticos, com coeficientes também reais.

É interessante observar que nem todos os matemáticos acharam isso possível. Já num artigo publicado em 1702, no *Acta Erudictorum*, **Gottfried Wilhem Leibniz** (1646-1716), um dos criadores do cálculo, achou que tinha um contra-exemplo; o polinômio $X^4 + a^4$, que ele decompunha como:

$$X^4 + a^4 = (X^2 - a^2\sqrt{-1})(X^2 + a^2\sqrt{-1})$$
$$= \left(X + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(X - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

e afirmava que o produto de dois quaisquer destes fatores não dava uma expressão quadrática com coeficientes reais. **Nicholas Bernoulli** (1687-1759) corrigiu esta observação em 1719, na mesma revista, mostrando que

$$X^4 + a^4 \;=\; \left(X^2 + aX\sqrt{2} + a^2\right)\left(X^2 - aX\sqrt{2} + a^2\right).$$

Por outro lado **Euler** afirmou explicitamente numa carta de 1 de outubro de 1742, dirigida a **N. Bernoulli** que um polinômio com coeficientes reais, de grau arbitrário, podia se decompor dessa forma. Este também não acreditou na afirmação e deu como contra-exemplo o polinômio

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

cujas raízes são

$$1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}},\quad 1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}},\quad 1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}} \;\text{ e }\; 1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}},$$

que ele acreditava, contradizera a afirmação de Euler.

Numa carta dirigida a **Christian Goldbach** (1690-1764), em 13 de dezembro de 1742, Euler observou se um polinômio com coeficientes reais tem uma raiz complexa $a + b\sqrt{-1}$ também tem a conjugada $a - b\sqrt{-1}$ e que o produto

$$\left(x - (a + b\sqrt{-1})\right)\left(x - (a - b\sqrt{-1})\right)$$

é uma expressão quadrática com coeficientes reais, o que aponta na direção do resultado pretendido. Euler também observa que isso é verdade para o aparente contra-exemplo de Bernoulli.

Goldbach não acreditou na afirmação de Euler e propós como contra-exemplo o polinômio $X^4 + 27X^2 - 20$. Euler então mostrou a Goldbach que ele tinha cometido um erro e provou o resultado para polinômios de grau menor o igual a 6.

Após a observação de Euler acima, a questão da fatoração de um polinômio fica reduzida a provar a existência de raízes, uma vez que o resto é uma conseqüência elementar. Este resultado é hoje conhecido como **Teorema Fundamental da Álgebra**:

> *Todo polinômio com coeficientes reais admite pelo menos uma raiz complexa*

Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) foi encontrado abandonado na porta da igreja de St. Jean Le Rond, na noite de 16 de novembro de 1717, com cujo nome foi batizado e foi criado por pais adotivos. Após estudar direito e medicina, decidiu dedicar sua vida à matemática. Trabalhou em álgebra, cálculo e sua aplicações, equações diferenciais ordinárias e parcias, funções de variável complexa, mecânica e dinâmica.

Ele foi o primeiro a fazer uma tentativa de provar o teorema fundamental da álgebra, em 1746. Sua idéia consiste em, dado um polinômio com coeficientes reais f, determinar números reais b e c tais que $f(b) = c$. Então, ele prova que existem complexos z_1 e w_1 cujo módulo é menor que o módulo de c. Depois ele itera este processo para obter uma seqüência que converge a uma raiz de f. Sua prova tem diversas falhas, mas as idéias nela envolvidas são interessantes.

A próxima tentativa séria é devida a Euler que, em 1749, no seu *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, prova inicialmente que um polinômio mônico de grau 2^n pode-se decompor como o produto de dois polinômios mônicos de grau 2^{n-1}. Como todo polinômio pode-se transformar num polinômio desta forma, multiplicando por um fator da forma ax^m, com a e m adequadaos, aplicando uma recorrência baseada no resultado mencionado, o problema estaria resolvido. Infelizmente, Euler provou a existência de uma tal decomposição com detalhes, para polinômios de grau 4 mas, no caso geral, deu apenas o esboço de uma prova.

Em 1772, **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) deu um longo argumento, baseado no seu trabalho com permutações, tentando 'completar' a prova de Euler. Porém, de certa forma, Lagrange assumia que existiam de fato n raízes e que tinham as propriedades dos números, com isso chegando a provar que as raízes eram números complexos.

Finalmente, a primeira prova realmente completa do Teorema Fundamental da Álgebra foi dada por **Carl Friederich Gauss** (1777-1855) na sua tese de doutoramento, em 1799, intitulada *Nova demonstração do teorema que toda função algébrica racional inteira de uma variável pode ser decomposta em fatores reais de primeiro e segundo grau.* Como observaram diversos autores, a única incorreção da tese está no título, uma vez que não se trata de uma *nova demonstração* mas da *primeira demonstração* realmente correta de tal fato.

Ele começa fazendo um estudo crítico das provas anteriores, e apontando as falhas fundamentais de cada uma destas. De Euler, por exemplo, ele diz

> *se a gente faz operações com estas raízes impossíveis, como se elas realmente existissem, e diz, por exemplo, que a soma de todas as raízes do polinômio* $X^m + aX^{m-1} + bX^{m-2} + \cdots$ *é igual a* $-a$ *embora algumas delas possam ser impossíveis (o que realmente significa: se algumas delas são não existentes e estão, portanto, faltando), então eu só posso dizer que eu desaprovo completamente este argumento.*

Mesmo a prova de Gauss, que usa propriedades do tipo "topológico" não pareceria completamente rigorosa ao leitor moderno pois, embora o argumento seja altamente original, ele depende de determinar a interseção de duas curvas. A prova, porém, está substancialmente correta e nos resulta totalmente satisfatória quando a parte "analítica" é feita com o rigor que a que hoje estamos acostumados e que seria introduzido no século seguinte.

Ao longo de sua vida, Gauss deu mais três provas diferentes deste teorema. Estas e outras demonstrações hoje conhecidas podem-se ver num texto totalmente dedicado ao assunto [8].

Capítulo 3

A abstração em álgebra

3.1 Introdução

Pode-se dizer que o século XIX foi um dos períodos áureos da matemática e, em certo sentido, um dos mais revolucionários desta ciência. Até o início deste século, a matemática era definida como a ciência da quantidade e das extensão, sendo estas expressões claras referências à aritmétida e à geometria, respectivamente. Em 1829, Lobachevsky tornou público o novo mundo da geometria não-euclidiana, liberando assim a geometria da dependência do mundo sensorial. A partir de 1830, com a publicação da obra de Peacock, a álgebra por sua vez, liberou-se de sua dependência da aritmética. É precisamente esta última história que estudaremos neste capítulo.

A profunda mudança no carácter da álgebra se deu na Inglaterra, sob condições muito particulares. A disputa entre Newton e Leibinz pela prioridade na descoberta do cálculo, em fins do século XVII e inícios do século XVIII, se extendeu rapidamente a todos os matemáticos da época. Os ingleses, naturalmene, respaldaram Newton enquanto os matemáticos do continente se alinharam com Leibniz. Isto criou uma separação entre ambas comunidades científicas e elas seguiram caminhos diferentes.

Como o cálculo de Leibniz usava um simbolismo mais adequado, foi mais fácil desenvolver este ramo da ciência no continente e assim, a história nos ensina que, por um período de mais de um século, os desnvolvimentos significativos do cálculo se deram na europa continental.

O isolamento británico levou a que seus matemáticos só trabalhassem naquilo que os interessava particularmente, não estando atrelados ao que acontecia no continente. Isso teve a consequência negativa de que o cálculo se desenvolveu ali de forma bem mais vagarosa. Ainda, como utilizava o simbolismo mais pesado devido a Newton, ele era apresentado de uma forma tal que sua compreensão resultava difícil para os estudantes. Por outro lado, este mesmo isolamento teve, como consequência positiva, a grande originalidade dos trabalhos ingleses da época.

3.2 O apego à aritmética universal

Como já mencionamos, a artitmética tinha-se desenvolvido sobre bases que os matemáticos da época consideravem bem menos sólidas que as da geometria. Os números negativos eram definidos com *quantidades menores do que nada* ou como as quantidades *obtidas pela subtração de uma quantidade maior de uma quantidade menor*. Uma vez que a subtração era definida como a *retirada* de uma quantidade de outra, também esta segunda definição era obviamente auto-contraditória. Tentava-se justificar estes números através de analogias com débitos, ou com diferentes sentidos numa reta.

No fim do século XVIII, dois professores da Univerisidade de Cambridge, **Francis Masers** (1731-1824) e **William Frend**, propuseram o abandono total dos números negativos, alegando precisamente a falta de uma definição adequada, o que fazia com que os resultados que envolviam estes números tivessem pouco valor e levantava dúvidas quanto à legitimidade da álgebra como ciência. À esse respeito, Frend escreveu:

> *Quando alguém não pode explicar os princípios de uma ciência sem referência a metáforas, é provável que ele não tenha pensado profundamente no assunto.*

Masers, em 1800, foi ainda mais enfático:

> *A ciência da álgebra ou aritmética universal foi desgraçada e tornada obscura, triste e difícil para os homens com gosto pelo raciocínio acurado e claro.*

Eles propunham assim reduzir a álgebra à *aritmética universal*; isto é, a uma ciência onde as letras representam apenas números positivos e os sinais $+$ e $-$ apenas operações aritméticas. É claro que, rejeitando o uso dos números negativos rejeitavam também as possíveis raízes complexas das equações e, com isso, toda a teoria de equações desenvolvida no século XVIII que culminou no Teorema Fundamental da Álgebra, de Gauss, em 1799.

Masers argumentava, por exemplo, que equações do tipo $X^2 + aX = b$ só tinham uma raiz. Ele considerou o exemplo concreto da equação $X^2 + 2X = 15$ afirmando que só 3 era uma raiz e que o valor -5 não devia ser considerado. Por outro lado, observou que 5 é raiz de $X^2 - 2X = 15$ e que

$$\begin{aligned} X^2 + 2X &= 15 \\ X^2 - 2X &= 15 \end{aligned}$$

são afirmações diferente, que não pode derivar das condições de um mesmo problema.

É claro que outros matemáticos da época relutavam em abandonar os números negativos, levando em consideração a sua aplicabilidade. Argumentavam que, em vez de abandoná-los, era necessário procurar sua adequada fundamentação. Assim por exemplo **Robert Woodhouse** (1773-1827), um matemático e físico experimental da mesma Universidade de Cambridge, defendeu em 1801, perante a Royal Society, o seguinte ponto de vista:

> *Realmente, uma quantidade negativa abstrata é ininteligível, mas operações com quaisquer caráter ou sinais levam a resultados corretos. Tais operações devem ser válidas em virtude de algum princípio ou outro.*

Em 1806, também **Buée** um imigrante francês que morava em Londres, sugiriu que existem dois tipos de álgebra:

- A aritmética universal, uma linguagem onde os símbolos $+$ e $-$ representam unicamente as operaçãos aritméticas de adição e subtração.
- Uma longa matemática (*une longue mathématique*), ou seja, uma linguagem na quel os símbolos $+$ e $-$ representam também "qualidades". Assim, um número seria a combinação de uma quantidade e uma qualidade.

Desta forma, quando alguém diz que um número é menor do que zero, isso faria sentido pois *não é a quantidade que é menos do que nada*, mas a qualidade que é inferior à nulidade e exemplifica:

> *Se meus débitos excedem meus ganhos, eu sou mais pobre do que se não tivesse ganhos nem débitos.*

3.3 A álgebra abstrata

O processo que levou à introdução de um ponto de vista verdadeiramente abstrato em álgebra teve início em 1815, quando vários matemáticos da Universidade de Cambridge, como **Charles Babbage** (1792-1871), **George Peacock (1791-1858)** e **John Herschel** (1792-1878) fundaram a *Analytical Society*, uma sociedade cuja finalidade imediata era reformar o ensino do cálculo, adotando as notações em uso no continente. Porém, sua contribuição fundamental foi repensar e discutir os fundamentos da álgebra.

Em 1830, Peacock publicou seu *Treatise on Algebra* onde tenta dar a esta disciplina uma estrutura lógica comparável à dada à geometria nos *Elementos* de Euclides; isto é, apresentá-la como o desenvolvimento abstrato das conseqüências de um certo conjunto de postulados.

A obra, que fora ampliada a dois volumes até 1845, marca o verdadeiro início do pensamento axiomático em álgebra. No primeiro volume, Peacock tenta exibir as leis fundamentais da aritmética, trabalhando apenas com números e dando aos símbolos + e - apenas o seu significado ordinário.

No segundo volume, desenvolve uma "Álgebra Simbólica" e as mesmas regras são aplicadas a símbolos sem conteúdo específico. Para ele, a álgebra era a ciência que trata das combinações de símbolos arbitrários cujo sentido é definido através de leis de combinação também arbitrárias. Na aritmética, as definições das operações determinam as regras. Na álgebra simbólica, são as regras que determinam o sentido das operações.

No início da obra, que ele pretendia que fosse perfeitamente acessível aos estudantes, argumentava que a aritmética universal de Masers e Frend não podia ser aceita no lugar da álgebra por ser a primeira muito restrita e haver, na segunda, grande quantidade de resultados e proposições de valor e consistência inquestionável. Também criticou o ensaio de Bouée, por considerar que apelava por demais às interpretações geométricas e propunha soluções muito vagas.

Augusto de Morgan (1806-1871), na sua *Trigonometry and Double Algebra*, publicada também em 1830, assume o mesmo ponto de vista, deixando os símbolos sem significação pré-estabelecida e, como ele mesmo diz, letras como A e B poderiam representar, por exemplo, virtudes ou vícios, e os símbolos $+$ e $-$ recompensas ou castigos.

De Morgan descreve suas colocações de um ponto de vista muito próximo das idéias modernas:

> *Com uma única exceção, nenhuma palavra ou sinal em aritmética tem um átomo de significado neste capítulo, cujo assunto são símbolos e suas leis de combinação, dando uma álgebra simbólica que pode tornar-se a gramática de cem álgebras diferentes e significativas* [1].

Embora Peacock e De Morgan tenham de fato explicitado o ponto de vista abstrato em álgebra, sua apresentação tem ainda uma limitação. Os axiomas que eles utilizam são aqueles abstraidos da aritmética. Eles não perceberam que a escolha poderia ser feita livremente, tornando a álgebra independente da experiência aritmética, tal como a geometria não euclidiana tinha se tornado independente da experiência sensorial, com a adoção de axiomas que não são "verdades evidentes".

Este último passo seria inspirado pelo desenvolvimento dos quatérnios, devido a Hamilton, de que trataremos no próximo capítulo.

O leitor interessado pode encontrar discussões mais detalhadas sobre o processo até aqui descrito nos artigos de Dubbey [7], Pycior [25] e [26] e Richards [27].

[1] A exceção a que De Morgan faz referência e o símbolo $=$.

Capítulo 4

A descoberta dos quatérnios

4.1 Números Complexos.

Foi no período de intensa atividade na direção de uma crescente abstração, de que tratamos no capítulo anterior, que um notável matemático irlandês, **Sir William Rowan Hamilton** (1805-1865), deu a fundamentação definitiva dos números complexos como pares ordenados de números reais, tal como é apresentada atualmente.

Hamilton foi uma criança prodígio; aos três anos de idade lia perfeitamente inglês e aprendeu os rudimentos da aritmética. Aos quatro aprendeu geografia, aos cinco sabia latim e hebraico e até os dez anos de idade aprendeu italiano, francês, árabe, sânscrito, persa, caldeu e várias línguas orientais. Aos doze interessou-se por matemática. Estudou então a *Álgebra Universalis* de Newton e, antes dos dezessete, estudou a monumental *Mecanique Céleste* de Laplace na qual descobriu um erro e publicou a correção correspondente.

Ele fez importantes contribuições à física e à astronomia mas nos interessa aqui ocuparmo-nos de suas idéias matemáticas. Em 1833, aos 28 anos de idade, publicou *Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time*. Nesse trabalho estabelece sua visão da Álgebra como ciência. Na sua opinião a Álgebra devia ser mais que uma linguagem; o fato de a Álgebra ser uma ciência significava, para ele, que seus teoremas devem ser *verdadeiros* e não apenas demonstráveis a partir de certas premissas; isto é, na sua visão, eles devem ter uma conexão com a realidade.

Ele acreditava que a intuição do tempo está mais profundamente enraízada na mente humana que a do espaço e que esta deveria servir para fundamentar a Álgebra; mais ainda, acreditava que as idéias básicas sobre o tempo são aquelas de ordem e progressão. Assim, ele introduziu o conceito de *transição*, que a cada par de momentos (a,b) associa uma transição T tal que $T(a) = b$.

Sua visão sobre a Álgebra, como ele mesmo reconhece, estava inspirada na *Crítica da Razão Pura* de Kant. Mais tarde abandonaria este ponto de vista para aderir à visão mais formalista da escola inglesa. Por exemplo, em 1846 escreveu a Peacock:

> *Minhas opiniões a respeito da natureza, extensão e importância da ciência simbólica podem ter se aproximado gradualmente das suas; e esta aproximação pode se dever principalmente à influência de seus escritos e conversação.*

Esta discussão, de cunho filosófico, infelizmente escapa ao nosso assunto, mas o leitor interessado poderá consultar Winterbourne [34] e Ohstrom [16].

Sua reformulação da teoria dos números complexos parte de uma observação muito simples; ele nota que *a expressão* $a + bi$ *não denota uma soma genuína, do mesmo tipo que* $2+3$ e afirma que *o uso do sinal + é um acidente histórico e, certamente, bi não pode ser adicionado a a.* Assim, percebe que escrever um número complexo na forma $a + bi$ não é mais do que dar o par ordenado de números reais (a,b). A partir desta observação, Hamilton desenvolve a teoria formalmente, definindo soma e produto de pares da forma que hoje nos é tão familiar:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + b, c + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Vale a pena observar que já neste trabalho Hamilton adota um ponto de vista formal. Ele diz:

> *Estas são minhas definições e você não tem o direito de questionar sua propriedade. Se elas foram felizmente escolhidas será aparente quando suas implicações forem investigadas, pois a teoria dos pares sujeitos às operações aqui definidas provará ser abstratamente idêntica à teoria desses números complexos cuja fundamentação lógica é, de outra forma, tão insegura.*

Um fato interessante, que mostra claramente até que ponto era difícil para a coletividade matemática aceitar os números complexos é o seguinte. Vários anos depois da fundamentação dada por Hamilton, **Agustin Louis Cauchy** (1789 - 1857) deu, em 1847, uma outra construção do corpo dos números complexos. Ele observou que, se no anel dos polinômios reais $\mathbb{R}[X]$ se consideram congruências módulo o polinômio X^2+1, então todo polinômio $f(X)$ é congruente a um polinômio da forma $aX+b$ (porque o resto da divisão por X^2+1 deve ser, no máximo, de primeiro grau) e que classes de restos, neste caso, se somam e multiplicam seguindo exatamente as mesmas regras que os números complexos. Mais ainda, tem-se que

$$X^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Desta forma, ele exibiu um sistema algébrico isomorfo ao corpo dos números complexos. O interessante é como ele explica as vantagens deste método, que mostra até que ponto a ideia de ter uma raiz quadrada de -1 ainda resultava incômoda:

> *Na teoria das equivalências algébricas, substituida pela teoria dos números imaginários, a letra i deixa de representar o símbolo* $\sqrt{-1}$ *que repudiamos completamente e que pode ser abandonado sem arrependimento uma vez que não sabemos o que este suposto signo significa nem que sentido atribuir a ele. Pelo contrário, nos representamos pela letra i uma quantidade real mas indeterminada e ao substituir o símbolo* $\equiv$ *pelo símbolo* $=$ *transformamos o que foi chamado de uma equação imaginária numa equivalência algébrica relativa à variável i e ao divisor* i^2+1*. Como este divisor permanece o mesmo em todas aas fórmulas pode-se dispensar de escrevé-lo.*

4.2 Quatérnios.

Como observamos acima, Hamilton era também um físico e percebia claramente as implicações de sua descoberta: ele tinha desenvolvido uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores do plano. Isto o levou a considerar um problema que seria fundamental para a física da época: desenvolver uma álgebra de ternas que daria a linguagem para trabalhar com vetores do espaço.

Ele trabalhou durante dez anos neste problema antes de descobrir onde estava a dificuldade essencial. Uma carta a seu filho Archibald, de Outubro de 1843, revela sua obsessão com a questão [10]:

> *Toda manhã, quando descia para o café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me "Bem, pai, você já pode multiplicar ternas?" A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço de cabeça, "Não, eu apenas posso somá-las e subtraí-las".*

Para compreender como poderia ser feita esta multiplicação, Hamilton escrevia suas ternas na forma $a + bi + cj$, por semelhança ao que era feito com os complexos e tentava desenvolver o produto $(a + bi + cj)(x + yi + zj)$ e representá-lo como um elemento da mesma forma. Esperava ainda que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, i.e., que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$ fato que chamou *lei dos módulos*.

Para desenvolver o produto, assumiu naturalmente que $i^2 = j^2 = -1$ mas a dificuldade estava em determinar qual devia ser o valor dos produtos ij e ji.

Não discutiremos em detalhe as tentativas sucessivas para definir esses produtos; uma exposição interessante encontra-se em [30]. Foi a tentativa de preservar a *lei dos módulos* que lhe impôs finalmente a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais, o que lhe resultava difícil de admitir:

> *e transferindo este paradoxo para a álgebra devemos admitir um terceiro símbolo imaginário k, que não deve ser confundido com i ou j ... e fui assim conduzido a introduzir quatérnios tais como $a + bi + cj + dk$ ou (a, b, c, d).*

Na mesma carta a seu filho, Hamilton descreve como foi a descoberta final:

> *Mas no dia 16 do mesmo mês [outubro de l843] - que era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, ... , embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se*

> *um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos* i, j, k
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
>
> *que contém a solução do Problema.*

Note que a relação acima implica as conhecidas fórmulas que definem a multiplicação de símbolos:

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

Uma vez definido o produto, Hamilton define o *conjugado* $\alpha = a + bi + cj + dk$ como sendo o quatérnio:

$$\overline{\alpha} \ = \ a - bi - cj - dk.$$

Logo em seguida define o *módulo* como sendo:

$$||\alpha|| \ = \ \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

e observa que $||\alpha|| \neq 0$ se e somente se $\alpha \neq 0$.

Com estas definições resulta imediato provar que dados dois quatérnios α e β, tem-se que

$$||\alpha\beta|| \ = \ ||\alpha|| \cdot ||\beta||;$$

isto é, vale a lei dos módulos.

Ainda, é fácil ver que, se $\alpha \neq 0$, então o quatérnio

$$\alpha^{-1} \ = \ \frac{1}{||\alpha||}\,\overline{\alpha}$$

é, de fato, o inverso de α, uma vez que um cálculo simples mostra que $\alpha\overline{\alpha} = 1$.

Com a multiplicação definida dessa forma, o conjunto dos quatérnios constitui o primeiro exemplo de anel não comutativo, com divisão. Claro que esta terminologia não estava ainda em uso, mas Hamilton reconheceu imediatamente a importância de sua descoberta, especialmente pelas suas implicações para o desenvolvimento da física.

No dia seguinte, em 17 de outubro de 1843, Hamilton escreveu a seu amigo **John T. Graves** comunicando-lhe seus resultados. A semente de novos desenvolvimentos tinha sido plantada: em dezembro desse mesmo ano, Graves descobriu uma álgebra de dimensão 8, os *octônios*. Havia, porém, uma notável diferença: em julho de 1844 Hamilton lhe observou que a propriedade associativa valia claramente para os quatérnios mas não valia para os octônios.

Hamilton dedicou o resto de sua vida a desenvolver aplicações dos seus quatérnios à geometria, mecânica e física. Nesse período intoduziu termos como *vetor , versor, tensor, escalar,* que são tão familiares ao estudante de matemática de nossos dias. Como resultado deste trabalho publicou em 1853 suas *Lectures on Quaternios* e, em 1866, se editou em forma póstuma um trabalho em dois volumes: *Elements of Quaternios.*

Os quatênios não vieram a ocupar o lugar que seu autor sonhava na física - comparável ao papel desempenhado pelo cálculo na mecânica - mas, mesmo assim, tiveram importância decisiva em pelo menos dois sentidos.

Por um lado, eles deram origem ao cálculo vetorial. Com efeito, **Josiah Willard Gibbs** (1839 - 1903) era professor de física-matemática no Yale College e, numa tentativa de simplificar os métodos dos quatérnios, escreveu, para uso de seus estudantes, um conjunto de notas intitulado *Elements of Vector Analysis* onde se expõe o cálculo vetorial da forma hoje usual. Independentemente, **Oliver Heaviside** (1850 - 1925) que era um engenheiro especializado em telegrafia, publicou, durante a década de 1880 - 1890, uma série de artigos no jornal *Electrician* onde usava o cálculo vetorial que tinha desenvolvido, da mesma forma que Gibbs, simplificando os métodos dos quatérnios para torná-los acessíveis aos engenheiros.

Por outro lado, a descoberta teve um papel decisivo no desenvolvimento da Álgebra. Do ponto de vista da abstração crescente que estava então em desenvolvimento, teve a virtude de assinalar que as *leis fundamentais* sugeridas pelos sistemas até então conhecidos, não eram dados apriorísticos que deviam ser sempre assumidos, uma vez que o conjunto dos quatérnios é o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores *altera* o produto, i.e., a primeira álgebra não comutativa. Mostrou também claramente a possibilidade de estender ainda mais o conjunto das álgebras conhecidas.

Novos Exemplos.

Como já observamos, apenas dois meses após a descoberta dos quatérnios, Graves introduziu os octônios. Este sistema foi redescoberto independentemente em 1845 por **Arthur Cayley** (1821 - 1895) e por essa razão os octônios são conhecidos também como *Números de Cayley*. Estava assim aberto o caminho para novas generalizações. Em suas *Lectures on Quaternios* de 1853 Hamilton introduziu os *Biquatérnios* que nada mais são do que quatérnios com coeficientes complexos e constituem assim uma álgebra de dimensão 8 sobre os reais. O próprio Hamilton demonstrou, nesse trabalho que esta álgebra contém *divisores de zero* (i.e., elementos não nulos a, b tais que $ab = 0$) e, consequentemente, ela não é uma álgebra com divisão. Ainda nesse mesmo texto ele desenvolve uma nova generalização que já tinha iniciado num artigo nos Transactions of the Royal Irish Academy em 1848: os *Números Hipercomplexos*.

Um sistema de Números Hipercomplexos é o conjunto de todos os símbolos da forma:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

onde $x_1, x_2, ...x_n$ são números reais - ou, eventualmente, complexos - e $e_1, e_2, ..., e_n$ são símbolos, chamados de *unidades* do sistema. Tal como no caso dos quatérnios, a soma de dois elementos desta forma é definida somando coeficientes correspondentes e, assumindo a propriedade distributiva, para definir o produto basta decidir como multiplicar as unidades entre si.

Como o produto de duas destas unidades deve ser outro elemento do sistema, deve ser possível escrevê-lo na forma:

$$e_ie_j = \sum_{i=1}^{n} a_k(i,j)e_k$$

A estrutura multiplicativa do sistema é determinada então dando os valores dos coeficientes $a_k(i,j)$ que, por causa disso, são chamados de *constantes estruturais* do sistema.

Um outro matemático desenvolveu paralelamente idéias muito similares. **Hermann Gunther Grassmann** (1809 - 1877), que não tinha demonstrado nenhum talento matemático na sua juventude, nem tinha formação universitária em matemática, tornou-se professor de matemática de nível secundário e desenvolveu suas idéias antes de Hamilton, mas só as publicou em 1844, um ano após a descoberta dos quatérnios. Nesse ano ele publicou seu *Die Lineale Ausdehnungslehre* onde expõe suas idéias. Porém, seu estilo excessivamente abstrato e as doutrinas místicas com que mistura a exposição fizeram com que seu trabalho permanecesse relativamente ignorado e tivesse pouca influência nos desenvolvimentos que se seguiram.

Capítulo 5

Novas estruturas

5.1 Grupos e matrizes

Dois novos exemplos de estruturas alg ébricas, de enorme importância, foram introduzidos nos anos seguintes por **Arthur Cayley**. Ele tinha demonstrado talento matemático desde sua juventude, foi eleito fellow do Trinity College de Cambridge e 'assistant tutor', mas abandonou a posição três anos depois, pois, para continuar a carreira, deveria tomar hábitos religiosos. Passou os quinze anos seguintes trabalhando como advogado, mas sem deixar de se dedicar à matemática. Nesse período publicou mais de 200 artigos científicos e datam dessa época as contribuições que nos interessam.

Cayley tinha uma notável habilidade para as formulações abstratas: sabia ver a generalidade por trás dos exemplos particulares e isto lhe permitiu ser o primeiro a formular o conceito de *grupo abstrato*.

O estudo das permutações se iniciou com os trabalhos de **Joseph Louis Lagrange** (1736 - 1813) sobre equações algébricas em 1770, e foi logo seguido pelas contribuições de **Paolo Ruffini** (1765 - 1822) e **Niels Henrik Abel** (1802 - 1829). O primeiro a considerar explicitamente *grupos* de permutações foi **Evariste Galois** (1811 - 1832), que utilizou o termo *grupo* com seu sentido atual no seu trabalho, hoje clássico, de 1830.

Logo depois, **Agustin Cauchy**, que percebeu a importância intrínseca dos grupos de permutações, escreveu uma série de artigos a respeito, no período de 1844 - 1846. Influênciado pelo trabalho de Cauchy, Cayley foi o primeiro a formular a noção geral implícita no caso particular. Ele definiu o conceito de grupo abstrato em 1854 num artigo intitulado *On the Theory of Groups as depending on the symbolical equation* $\theta^n = 1$ publicado no Philosophical Magazine. Não nos ocuparemos aqui das contribuições deste artigo para o desenvolvimento da teoria de grupos; o leitor poderá ver uma breve discussão destes aspectos em [19] ou em [24, Capítulo II].

Ao definir a noção de grupo abstrato, Cayley usou uma notação multiplicativa e, para frisar o fato de que num grupo está definida apenas uma única operação, ele observa, que no seu conjunto, os símbolos + e 0 não têm nenhum significado. No fim do artigo, porém, ele se coloca a questão de como introduzir a adição. Para isso denota os elementos do grupo por letras gregas α, β, ... e considera combinações lineares formais do tipo $a\alpha + b\beta + ...$ que trata como elementos de um sistema hipercomplexo, i.e., define a soma de dois elementos desse tipo somando coeficiente a coeficiente e a multiplicação distributivamente, a partir do produto de elementos do grupo. Ele ilustra sua definição mostrando como multiplicar dois elementos da forma $w + a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\epsilon$ onde $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ denotam os elementos do grupo não comutativo de ordem 6, cuja tabela de multiplicação ele tinha introduzido, nesse mesmo artigo. Dessa forma ele constrói explicitamente, pela primeira vez, o *anel de grupo* que hoje denotaríamos como $\mathbf{C}[S_3]$. É interessante notar que ele observa ainda que o sistema que ele acaba de construir é semelhante ao sistema dos quatérnios.

Pouco tempo depois, Cayley introduziu um novo conceito cuja importância no desenvolvimento da matemática seria difícil exagerar: o conceito de *matriz*. Ele chegou a este conceito através do seu estudo de invariantes sob transformações lineares. Tal como ele mesmo diz:

> *Eu certamente não cheguei à noção de matriz de forma alguma através dos quatérnios; foi diretamente dos determinantes ou como uma forma conveniente de expressar as equações:*
>
> $$x_1 = ax + by$$
>
> $$y_1 = cx + dy$$

Ele introduziu esta noção em 1855, num artigo intitulado *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*. Certamente, os determinantes estavam em uso desde muito tempo antes, introduzidos em conexão com a resolução de sistemas lineares. Eles foram utilizados pela primeira vez por **Colin Maclaurin** (1698 -1746) provavelmente em 1729 e publicados postumamente no seu *Treatise of Algebra* em 1748. Tal como Cayley observa, a idéia de matriz precede logicamente àquela de determinante, mas a ordem histórica foi ao contrário. Como ele estava interessado nas transformações lineares, a composição das mesmas lhe sugeriu naturalmente a definição de produto de matrizes e, consequentemente, a de inversa de uma matriz.

Em 1858 publica um segundo trabalho sobre o assunto: *A memoir on the theory of matrices* onde introduz a soma de matrizes e o produto por escalares. Aqui novamente a visão de Cayley lhe permitiu ver um novo sistema algébrico semelhante aos que vinham sendo desenvolvidos:

> *Se verá que as matrizes (considerando apenas as da mesma ordem) se comportam como quantidades; elas podem ser somadas, multiplicadas ou compostas: a lei de adição de matrizes é precisamente semelhante àquela da adição de quantidades algébricas: no que diz respeito à sua multiplicação, existe a peculiaridade de que matrizes não são, em geral, comutativas.*

É conveniente notar que ainda não existia, na época, uma definição abstrata de anel. Consequentemente, o fato de que o conjunto das matrizes de um dado tamanho constituía também um sistema hipercomplexo não era nada evidente, uma vez que a definição destes dependia da adoção de um *sistema de unidads.*

Ele observou explicitamente uma clara relação com os quatérnios; notou que se M e N são duas matrizes de oredem 2x2 que verificam $M^2 = N^2 = -1$ e $MN = -NM$ então, escrevendo $L = MN$, tem-se que as matrizes L, M, N satisfazem *um sistema de relações precisamente similar aquele da teoria dos quatérnios.*

É interessante observar que é justamente nessa observação que se baseia a demonstração atual de que $M_2(\mathbb{C})$, o anel das matrizes de ordem 2×2 com coeficientes no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é isomorfo ao anel dos quaternios com coeficientes em $\mathbb{C}$: i.e., ao anel dos biquatérnios de Hamilton..

Esta observação despertou o interesse de **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897) e, num artigo de 1884, ele afirma que um trabalho de **Charles S.Peirce** (1839-1914) lhe sugeriu *o método pelo qual uma matriz é despojada de suas dimensões como área e representada como uma soma linear.*

Ele se referia, naturalmente ao fato bem conhecido de que o conjunto de todas as matrizes de ordem $n \times n$ pode ser considerado como um espaço vetorial de dimensão n^2. Denotando por E_{ij} a matriz que tem um 1 na posição i,j e 0 em todas as outras, uma matriz $A = (a_{ij})$ pode ser escrita na forma $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$. Neste momento resulta evidente, por fim, que as matrizes também são sistemas hipercomplexos. Convém observar que Sylvester não utiliza esta notação que nos é familiar. Ela foi introduzida por **Eduard Study** (1862-1922) em 1889.

5.2 Teoria de corpos

O conceito de corpo, como um conjunto fechado pelas operações de soma e multiplicação onde existem oposto e inverso de todo elemento (com exceção do inverso do zero, é claro), bem como o conceito de corpo gerado por n números complexos $\alpha_1, \dots a_n$, como o conjunto de todos os números que podem se obter somando, subtraíndo, multiplicando e dividindo estes números (exceito, mais uma vez, a divisão por zero) já aparecem no trabalho de Galois sobre resolução de equações polinomiais. Também encontra-se ali o construção do corpo que se obtém por extensão de um corpo dado por um novo elemento que não lhe pertence. Ele chama estas estruturas de *domínios de racionalidade.*

Na verdade, todos estes corpos contém o corpo dos números racionais e são, portanto, de característica 0. Porém, no seu trabalho intitulado "Sur la théorie des nombres", publicado no *Bulletin des Sciences de Férussac* em 1830, Galois constroi também os corpos finitos.

Essencialmente, ele usa a idéia de Gauss de considerar congruências módulo um primo p e constroi o que hoje denotamos como $\mathbb{Z}_p$, o corpo cos inteiros módulo p. Depois ele considera o anel de polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ e toma congruências módulo um polinômio irredutível f. É facil provar que se f tem grau n, então o conjunto das classes de restos assim construído é um corpo finito com p^n elementos. Desta forma, ele constroi os corpos que hoje chamamos de *Corpos de Galois* e denotamos por $GF(p^n)$. Consciente da novidade de sua descoberta, ele diz:

Se concordamos em considerar como zero todas aas quantidades

> *que, nos cálculos algebraicos, resultam múltiplos de p, e se tentamos encontrar, sob esta convenção, a solução de uma equação algébrica $f(X) = 0$ que M. Gauss designa com a notação $f(X) \equiv 0$, o costume é considerar só soluções inteiras. Havendo sido levado, por minhas próprias pesquisas, a considerar soluções incomensuráveis, atingi certos resultados que considero novos.*

Muitos anos mais tarde, **E.H. Moore** (1862-1932) provou, em 1903, que todos os corpos finitos da mesma ordem são isomorfos entre si e, portanto, isomorfos ao corpo de Galois dessa ordem.

Outra linha de pesquisa extremamente importante que levou a trabalhar com a noção de corpo, desde outro ponto de vista foi a teoria de números. Quando Gauss tinha apenas 20 anos, ele escreveu uma obra fundamaental, as *Disquisitiones Arithmeticae* que enviou à Academia Francesa em 1800 e foi releitada. Gauus a publicou por si mesmo no ano seguinte. Foi nessa obra que ele intruduziu a notação para congruências que usamos ainda hoje.

Na quarta seção do texto, ele estuda os resíduos quadráticos: dado um um primo p e um inteiro a que não é multiplo de p, um outro inteiro x diz-se um *resíduo quadrático* de a, em módulo p se

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Esta linguagem tinha sido introduzida por Euler em 1754/55. Ele foi o primeiro a estabelecer a *Lei de reciprocidade quadrática*: *se p e q são dois inteiros primos, então p é um resíduo quadrático em módulo q se e somente se q é um residua quadrático em módulo p.*

Subsequentemente, **A.M. Legendre** (1752-1833) deu outra demonstração dessa lei e introduziu o *símbolo de Legendre* que ainda se utiliza em teoria de números. Gauss mostrou que ambas as demonstrações estavam incompletas e deu a primeira demonstração completa desta lei. Posteriormente ele publicou outras quatro demonstrações diferentes.

Anos mais tarde, Gauss considerou também resíduos cúbicos e biquadráticos, numa série de artigos publicados entre 1808 e 1832. Foi nesses trabalhos que, para obter simplicidade e elegância nas suas demonstrações, Gauss introduziu os números que hoje chamamos de *inteiros de Gauss*, que são complexos da forma $a + bi$ onde a e b são números inteiros. Ele provou que muitas das propriedades dos números inteiros se estendem aos inteiros de

Gauss: por exemplo, o *pequeno teorema de Fermat*: *Se p=a+bi é um inteiro de Gauss primo e definimos sua norma por* $N(p) = a^2 + b^2$ *e a é um outro inteiro de Gauss que não é múltiplo de p, então*

$$a^{N(p)-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

A teoria dos inteiros de Gauss é um primeiro passo na direção de uma área de grande importância na álgebra atual; a teoria dos números algébricos. Esta teoria se desenvolveu a partir dos esforços de diversos autores para provar o Teorema de Fermat, que afirma que uma equação da forma $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras para $n \geq 2$. O primeiro resultado positivo, nessa direção, foi de **Bernard Frénicle de Bessy** (1605-1675) , um amigo de Fermat, que provou a afirmação para $n = 4$ no *Traité des triangles rectangles em nombres* publicado postumamente, em 1676. Postriormente, Euler provou que esta afirmação é verdadeira para $n = 3$ e também para $n = 4$ em 1738 e Legendre a provou para $n = 5$ em 1823, mas o resultado geral permaneceu em aberto por muito tempo mais [1]. O próprio Gauss parece não ter tido especial interesse neste resultado. Após tentar provar a afirmação para o caso $n = 7$, sem sucesso, ele ecreveu a H.W.M. Olbers (1758-1840) em 1816:

> *Eu confesso,de fato, que o Teorema de Fermat, como proposição isolada, tem poco interesse para mim, uma vez que uma multidão de tais proposições, que não podem ser provadas nem refutadas, podem ser formuladas facilmente.*

O caso $n = 7$ foi resolvido por **Gabriel Lamé** (1795-1870) em 1838 e **Peter Gustave Lejeune-Dirichlet** (1805-18590 estabeleceu a verdade da afirmação para $n = 14$.[2]

A primeira tentativa de se obter resultados gerais é devida a **Ernst Eduard Kummer** (1810-1893). Ele abandonou a teologia para se dedicar à

[1] O Teorema de Fermat foi finalmente provado por Andrew Wiles em 1995 [32]. Um dos passos da demonstração foi elaborado em colaboração com Richard Taylor e publicado separadamente, na mesma revista [33]. Pode ser interessante ver as péginas 449 a 454 do primeiro artigo, em que o autor conta o processo da descoberta.

[2] Dirichet, foi professor em Breslau e Berlim e o sucessor de Gauss em Götingen e fez importantes contribuições à teoria dos números e muitas outras áreas da matemática. Entre outras coisas, foi ele quem propós o conceito moderno de função. Um dos seus resultados mais famosos em teoria dos números, conjecturado por Gauss, mas provado por ele, estabelece que toda sucessão aritmética contém infinitos primos.

matemática, foi discípulo de Gauss e Dirichlet e foi professor em Breslau e Berlim. Ele considerou a equação $x^p + y^p = z^p$, onde p é um inteiro primo e a fatorava na forma:

$$x^p + y^p = (x + y)(x + \zeta y) \cdots (x + \zeta^{p-1} y)$$

onde ζ denota uma raiz p-ésima da unidade, isto é, uma raiz da equação:

$$X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 = 0.$$

Isto o levou a estender da idéia dos inteiros de Gauss, considerando números da forma

$$\alpha = a_0 + a_1 \zeta + \cdots + a_{p-2} \zeta^{p-2}$$

que ele chamou de *inteiros complexos* e hoje chamamos de *inteiros ciclotômicos.*

Em 1843 ele deu as definições apropriadas de inteiro primo, divisibilidade etc. e cometeu o erro de assumir que a decoposição de todo inteiro complexo como produto de primos era única. Desta forma, ele conseguiu provar o Teorema de Fermat. Quando ele enviou seu manuscrito a Dirichlet, este apontou o erro e, em 1844, Kummer reconheceu que a crítica de Dirichlet estava correta. Incidentalmente, também Cauchy e Lamé , em alguma oportunidade, cometeram o mesmo erro.

Para obeter a unicidade da decomposição, Kummer criou a teoria dos números ideais em 1844 e com ela provou, por exemplo, que sua demonstração funcionava para todos os inteiros menores do que 100, menos para 37, 39 e 67. Num artigo de 1857 Kummer estendeu seus resultados a estes três primos excepcionais.

Finalmente, **Richard Dedekind** (1831-1916) que fora discípulo de Gauss e professor secundário por mais de cinquenta anos, atacou o problema da fatorização única de uma forma inteiramente diferente. Em primeiro lugar, ele estendeu ainda mais a idéia dos inteiros de Gauss. Um número complexo diz-se um *número algébrico* se ele é raiz de uma equação da forma

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

onde $a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números inteiros e diz-se um *inteiro algébrico* se é raiz de uma equação da forma acima, com $a_n = 1$.

Com estas definições prova-se facilmente que os números algébricos formam um corpo, os inteiros algébricos um domínio de integridade e que se um'inteiro algébico é um número racional, então ele é um inteiro ordinário. Neste contexto, Dedekind deu a primeira definição formal de *corpo (Körper)* e de *anel*, que ele chamava de *ordem*.

A teoria abstrata de corpos foi iniciada por **Heinrich Weber** (1842-1913) em 1893. Tempo depois, **Leonard Eugene Dickson** (1874-1954) e **Edward V. Huntington** (1874-1952) deram, independentemente, em 1903, definições de corpo a través de conjuntos de postulados.

Em 1908, **Kurt Hensel** (1861-1941) introduziu um novo tipo de corpo: o *corpo dos números p-ádicos* que tem, também, aplicações na teoria algébrica de números e levou à definição do conceito de *valorização*.

Motivado pela grande variedade de corpos que tinha sido definidos, **Ernst Steinitz** tentou um estudo compreensivo da teoria abstrata de corpos no seu trabalho fundamental sobre o assunto [29], de 1910, que, conjuntamente com um artigo clássico de **Emmy Noether** [15], de 1929, são considerados, por exemplo por Bourbaki [2], como os dois pilares fundamentais da álgebra moderna.

Neste trabalho ele introduz a noção de corpo primo, de característica de um corpo e prova um resultado fundamental: que todo corpo pode-se obter do seu corpo primo pela adjunção de uma série (eventualmente infinita) de elementos transcendentes e depois a adjunção de uma série de elementos algébricos. Também neste trabalho ele introduz a noção de *polinômio separável* , que ele chama de *vollkommen* ou completo, e prova que sobre um corpo, todo polinômio é irredutível ou se decompõe num produto de fatores lineares, se é somente se ele é extensão de um corpo dado pela adjunção de um número finito de raízes de polinômios sepáveis.

5.3 Anéis e Álgebras

Tal como vimos no capítulo anterior, desde o começo da teoria, os sistemas hipercomplexos, que hoje chamamos de álgebras lineares associativas, eram definidas a partir de elementos básicos, definindo a soma de forma natural e o produto distributivamente, a partir da multiplicação de elementos da base.

Este último era feito usando as constantes estruturais, que deviam ser adequadamente escolhidas.

Em 1903, **L.E. Dickson** deu a primeira definição abstrata de àlgebra - embora dependa em parte de coordenadas - num artigo intitulado *Definition of a Linear Associative Algebra by an Independent Set of Postulates* publicado no *Trans. Amer. Math. Soc.* [5].

Neste trabalho, ele dá duas definições de álgebras lineares associativas. A primeira é nossa velha conhecida, em termos de elementos básicos e constantes estruturais. A novidade aqui é que ele impõe certas condições às constantes estruturais, os *postulados* do sistema, e mostra que estas condições são independentes entre si, i.e., que nenhuma delas é consequência lógica das restantes.

Sua segunda definição se aproxima bastante da forma atual, apesar do uso de coordenadas. Ele considera um sistema de elementos da forma $A = (a_1, a_2, ...a_n)$ onde os coeficientes a_i, que ele chama de *coordenadas* do elemento, pertencem a um dado corpo F. Define a soma componente a componente e observa que dados dois elementos A e B sempre existe um outro elemento D tal que $A + D = B$. Depois, ele diz

> *Considere uma segunda lei de combinação de elementos com as seguintes propriedades:*
>
> *1.Para quaisquer dois elementos A e B do sistema $A.B$ é outro elemento do sistema cujas coordenadas são funções bilineares das coordenadas de A e B com coeficientes em F.*
>
> *2.$(A.B).C = A.(B.C)$, se $A.B, B.C, (A.B).C, A.(B.C)$ pertencem ao sistema.*
>
> *3.Existe no sistema um elemento I tal que $A.I = A$ para todo elemento A do sistema.*
>
> *4.Existe no sistema pelo menos um elemento A tal que $A.Z \neq 0$ para qualquer elemento $Z \neq 0$.*

Ele prova novamente que suas condições são independentes entre si e, o que é mais importante, que esta segunda definição é equivalente à primeira.

Finalmente, uma definição puramente abstrata, livre de coordenadas, foi dada pelo próprio Dickson [6] em 1923.

Quanto ao conceito de *anel*, pode-se dizer que ele era conhecido e utilizado já nos trabalhos sobre teoria dos números algébricos de **Richard Dedekind** e **Leopold Kroneker** (1823 - 1891) embora o termo utilizado fosse *ordem*.

O termo *anel* foi introduzido em 1897 por **David Hilbert** (1862 - 1943), ainda no contexto específico da teoria dos números algébricos. A definição abstrata, com toda sua generalidade, foi dada em 1914 por **Abraham A. Fraenkel** (1891 - 1965) num artigo intitulado *On zero divisors and the decomposition of rings*, no *Jour. fur die Reine und Angew. Math.*. Ilustrando a abrangência do conceito, ele dá vários exemplos de anéis: inteiros módulo n, sistemas de números hipercomplexos, matrizes, e inteiros p-àdicos.

O enunciado de sua definição é muito próximo do atual. Ele considera um sistema com duas operações, que chama de soma e produto e estabelece que, em relação à soma, o sistema deve formar um grupo (e enuncia explicitamente os axiomas desta estrutura). Sobre o produto, ele especifica que deve ser associativo e distributivo em relação à soma e inclui a existência de um elemento unidade. A comutatividade da soma, que não foi postulada, é demonstrada a partir destes axiomas, bem como uma série de resultados elementais. Há ainda dois axiomas a mais, referentes a certos elementos, chamados *regulares*, que não se incluem nas definições modernas.

O objetivo de Fraenkel, neste trabalho, era dar uma teoria abstrata e compreensiva da teoria de anéis, comparável à que **Ernst Steinitz** tinha formulado para os corpos na sua *Algebraischen Teorie des Körper* publicada em 1910 no *Jour. fur Math.* Naturalmente, esta tarefa era por demais ambiciosa para ser satisfatoriamente desenvolvida tão cedo.

Referências Bibliográficas

[1] E.W. Beth, G. Choquet, J, Dieudonné, C. Gattegno, A. Lichenrowicz e G. Piaget, *L'Enseignement des Mathématiques*, Delacheaux & Niestlé, Paris.

[2] N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris, 1969.

[3] C.B. Boyer, *História da Matemática*, (edição revista por U.C. Merzzbach), Edgar Blücher, São Paulo, 1996.

[4] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York, 1993.

[5] L.E. Dickson, Definition of Linear Associative Algebrras by Independent Set of Postulates, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **4** (1903), 21-26.

[6] L.E. Dickson, *Algebras and their arithmetics*, Univ. Chicago Science Press, Chicago, 1923.

[7] Dubbey, J.M. - Babbage, Peacock and Modern Algebra, *Hist. Math.*, 4, (1977), 295 -302.

[8] Fine, B. and Rosenberger, G., *The fundamental theorem of algebra*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[9] R.J. Gillings, *Mathematics in the times of the Pharaohs*, Dover, New York, 1982.

[10] Halberstein, H. and Ingram, R.C., eds. - *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, vol III, Cambridge Univ. Press, London, 1967.

[11] Hankins, T.L. - Algebra as Pure Time: William Rowan Hamilton and the Foundations of Algebra, in *Motion and Time, Space and Matter* P. Machamer e R. Turnbull, eds., Ohio Univ. Press, Columbus, 1976.

[12] Hawkins, T. - Hypercomplex Numbers, Lie Groups and the Creation of Group Representation Theory, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 8, (1972), 243 - 287.

[13] Kline, M. - *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[14] Mac Duffee, C.C. - Algebra's debt to Hamilton, *Scripta Math.*, 10, (1944), 23 - 35:

[15] E. Noether, Hypercomplexe Grössen und Darstellungtheorie, *Math. Z.*, **30**, (1929), 641-692.

[16] Ohstrom, P. - W. R. Hamilton's Views of Algebra as the Science of Pure Time, *Hist. Math.* 12, (1985), 45 - 55.

[17] Parshall, K. - Joseph H. M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras, *Archiv Hist. Exact Sci.*, 32, (1985), 223 - 349.

[18] Peirce, B. - Linear Associative Algebras, *Amer. J. of Math.*, **4**, (1881), 97 - 215.

[19] C. Polcino Milies, A Glance at the Early History of Group Rings, in *Groups, St. Andrews 1981*, ed. by C.M. Campbell and E.F. Robertson, London Math. Soc. Lecture Notes Series, **71**, Cambridge Univ. Press, London, 1982, pp. 270-280.

[20] C. Polcino Milies, *A Gênese da Álgebra Abstrata*, Coleção Tópicos de Matemática Elementar, IMEUSP, São Paulo, 1987.

[21] C. Polcino Milies, *Breve introdução à história da teoria de anéis*, in Atas da XI Escola de Álgebra, Soc. Brasileira de Mat., São Paulo, 1990, pp. 1-46.

[22] C. Polcino Milies, A emergência dos números complexos, *Revista do Prof. de Matemática*, **24** (1993), 5-15.

[23] C. Polcino Milies, A solução de Tartaglia para a equação de terceiro grau, *Revista do Prof. de Matemática*, **25** (1994), 16-22.

[24] C. Polcino Milies and S.K. Sehgal, *An introduction to group rings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech, 2002.

[25] Pycior, H., Early Critisism of the Symbolical Approach to Algebra, *Hist. Math.* 9, (1982), 392 - 412.

[26] Pycior, H., George Peacock and Modern Algebra, *Hist. Math.* 9, (1981), 23 - 45.

[27] Richards, J. - The Art and Science of British Algebra: a Study of Perception of Mathematical Truth, *Hist. Math.*, 7, (1980), 345 - 365.

[28] D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, McGraw Hill, New York, 1929.

[29] E. Steinitz, Algerbaischen Teorie der Körper, *Jour. für Math.*, **137** (1910), 167-309.

[30] Van der Waerden B.L., Hamilton's Discovery of Quaternions, *Math. Magazine*, 49, (1976), 227 -234.

[31] Van der Waerden, B.L., *A History of Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[32] Wiles, A., Elliptic curves and Fermat Last Theorem, *Annals of Math.*, **3** (1995), 443-551.

[33] Wiles, A. and Taylor, R., Ring-thoretic properties of certain Hecke Algebras, *Annals of Math.*, **3** (1995), 353-372.

[34] Winterbourne, A. T., Algebra and Pure Time: Hamilton's Affinity with Kant, *Hist. Math.*, 9, (1982), 195 - 200.

Índice Remissivo