II BIENAL DA SBM

II ENCONTRO DA RPM

OFICINA DE PROBLEMAS - I

Construções alternativas para problemas insolúveis com régua e compasso

Elvia Mureb Sallum
Sérgio Alves
(Professores do IME-USP)

Quatro grandes problemas da Antigüidade, envolvendo construções com régua e compasso, ficaram sem solução por 2000 anos. São eles:

Quadratura do círculo

Construção, com régua e compasso, do lado de um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado. Este problema é equivalente à construção, a partir de um segmento unitário, de um segmento de medida $\sqrt{\pi}$ ou, equivalentemente, de um segmento de medida π.

Duplicação do cubo

Construção, com régua e compasso, da aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo dado.

Trissecção de um ângulo

Construção de um ângulo cuja medida é igual a 1/3 da medida de um ângulo dado.

Construção de polígono regular

Construção, com régua e compasso, de um polígono regular de n lados.

Somente no século XIX, com o desenvolvimento da álgebra, da geometria analítica e dos números complexos, esses problemas geométricos foram transformados em algébricos e pode ser mostrada a impossibilidade da resolução dos dois primeiros problemas e a impossibilidade da resolução dos dois últimos de maneira geral.

Os gregos antigos, diante de sua incapacidade para resolver tais problemas, com régua e compasso, desenvolveram técnicas variadas tais como intersecção de curvas previamente desenhadas com instrumentos, utilização de uma régua com dois pontos previamente marcados (**método de neusis**) ou uso de outros instrumentos.

Vejamos alguns desses métodos para a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo.

§1. Duplicação do cubo

O problema de construir a aresta de um cubo com volume igual ao dobro do volume de um cubo de aresta a dada corresponde a construir um segmento de comprimento igual a $a\sqrt[3]{2}$.

§1.1 Método de neusis

Dado um segmento de medida a, utilizaremos uma régua, com dois pontos P e Q previamente marcados, e um compasso para obter um segmento de medida $a\sqrt[3]{2}$ onde $a = PQ$.

Desenhamos um triângulo eqüilátero ABC de lado a.

Prolongamos o segmento CA a CD de modo que $AD = a$.

Desenhamos as semi-retas DB e AB.

Colocamos a régua de modo que passe em C e os pontos marcados P e Q passem nas semi-retas DB e AB, respectivamente.

Traçando $\overline{PE} \,//\, \overline{BC}$ e indicando $CP = x$, justifique as afirmações:

$a)\ \Delta CBQ \sim \Delta PEQ$

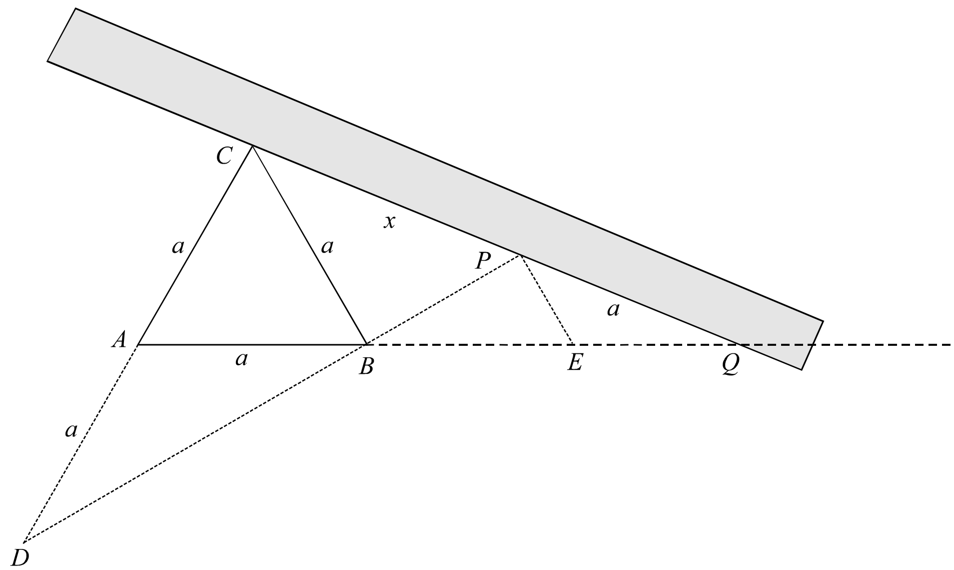
$b)\ PE = \dfrac{a^2}{x+a}$

$c)\ m(\angle DBA) = 30^\circ,\ \overline{PE} \perp \overline{DP}$

$d)\ BP = \sqrt{x^2 - a^2}$

$e)\ \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^2}{x+a}$

$f)\ x = a\sqrt[3]{2}$



§1.2 Método de intersecção de curvas

A solução do grego **Menaechmus** (375-325 a.C.) corresponde à abscissa da intersecção não nula de duas parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$, que podem ser desenhadas com instrumentos.

Descartes (1596 – 1650) mostrou que basta considerar uma das parábolas $x^2 = y$ e $y^2 = 2x$ e sua intersecção com a circunferência $(x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 5/4$ para obter um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ a partir de um segmento unitário.

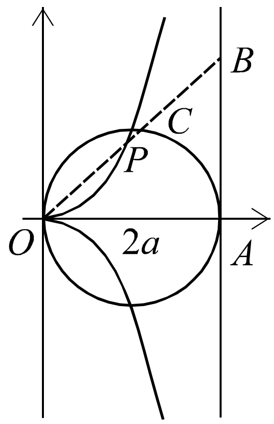
Exercício 1

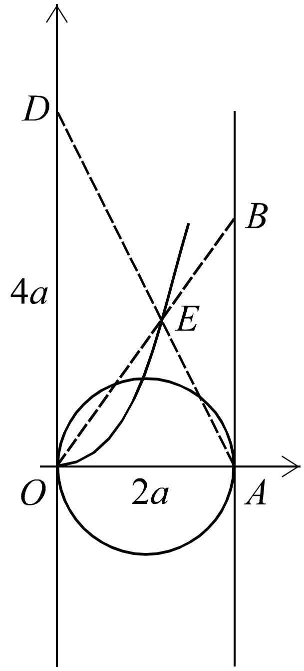
Represente graficamente e justifique as soluções de Menaechmus e de Descartes .

Exercício 2

A cissóide do grego Diocles (séc. II a.C.) e a duplicação do cubo

Considere uma circunferência de diâmetro $2a$ tangente ao eixo y na origem. Para cada ponto B na reta tangente à circunferência por A, considere os pontos C, intersecção de OB com a circunferência e $P \in OB$ com $OP = CB$.





a) Dê a equação polar do L.G. desses pontos *P* (cissóide).

b) Dê a sua equação cartesiana.

c) Na figura da direita, sejam os pontos *D* no semi-eixo dos *y* positivos com $OD=2OA$, *E* intersecção da cissóide com *AD* e *B* intersecção do prolongamento de *OE* com a reta $x = 2a$ (assíntota da cissóide). Mostre que $AB^3=2OA^3$. Sugestão: Se $E=(x,y)$, mostre que $y^3=2x^3$.

d) Se *OA* é a aresta do cubo dado conclua que *AB*, na construção de c), é a aresta do cubo procurado.

§2. Trissecção de ângulo

O problema de construir um ângulo com medida igual a 1/3 da medida de um ângulo dado apareceu, provavelmente, da necessidade de trisseccionar o ângulo de 60º para a construção de um eneágono regular. Alguns casos são facilmente construídos com régua e compasso como, por exemplo , a trissecção do ângulo de 90º. Vejamos alguns métodos usados pelos antigos gregos para trisseccionar um ângulo qualquer.

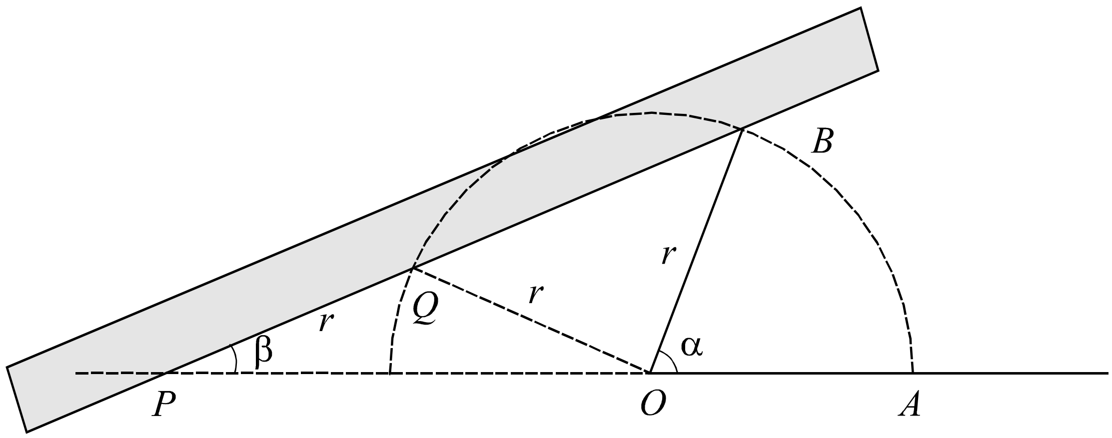
§2.1 Método de neusis de Arquimedes

Dada uma régua com dois pontos *P* e *Q* previamente marcados, sendo ***PQ = r***, e um ângulo com vértice O e medida α:

a) Construa uma semicircunferência de centro *O* e raio *r*, como mostra a figura, e considere as intersecções *A* e *B* dos lados do ângulo com a semicircunferência.

b) Coloque a régua na figura passando em *B* de modo que *P* esteja na reta *OA* e *Q* na semicircunferência.

c) Mostre que: $m(\angle AOB) = 3m(\angle APB)$.



§2.2 Método de neusis de Nichomedes

Como antes, dada uma régua com dois pontos P e Q marcados, com $\boldsymbol{PQ = 2a}$, e um ângulo $\angle AOB$ de vértice O e medida α :

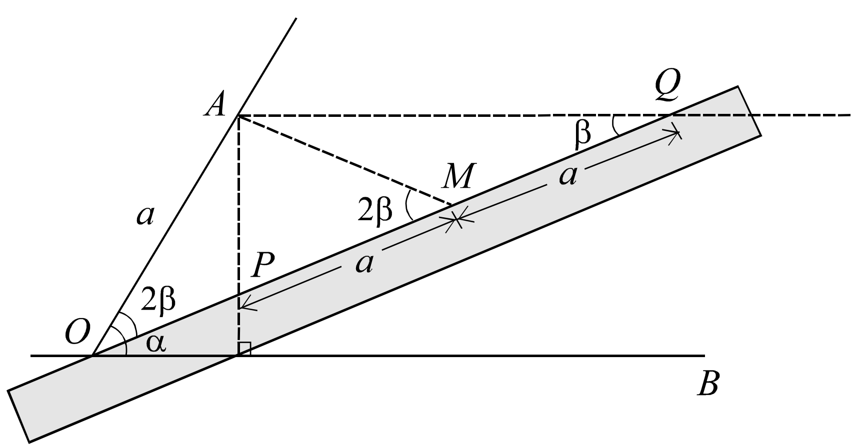
a) Trace por um ponto A, num dos lados do ângulo, com $OA=a$ uma paralela e uma perpendicular ao outro lado

b) Ajuste a régua passando pelo vértice O de modo que Q pertença à paralela e P pertença à perpendicular traçadas em a).

c) Trace AM onde M é o ponto médio de PQ e mostre que $m(\angle AMP) = 2m(\angle AQP) = m(\angle AOQ)$.

d) Conclua que $m(\angle QOB) = \alpha/3$.

e) E o caso em que $\angle AOB$ é obtuso? e reto?



§2.3 O esquadro de carpinteiro

No esquadro visto abaixo $EF = CD = AB/2$. Para dividir o ângulo $\angle PRQ$ em três partes congruentes, o carpinteiro

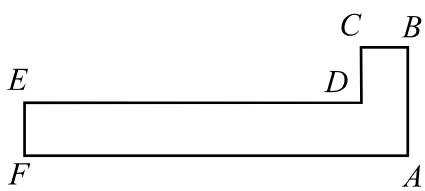
a) traça a semi-reta ST, paralela e a uma distância EF de PR, usando a parte mais longa do esquadro

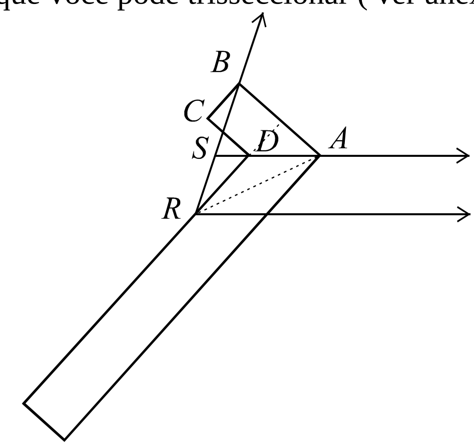
b) coloca o instrumento de modo que DE passe em R, D esteja na semi-reta ST e B no lado RQ do ângulo

c) marca os pontos *A* e *D* no interior do ângulo e traça *RA* e *RD* obtendo assim a divisão do ângulo $\angle PRQ$ em três partes congruentes.

JUSTIFIQUE o procedimento.

Faça um MODELO em cartolina e determine os ângulos que você pode trisseccionar (ver anexo).

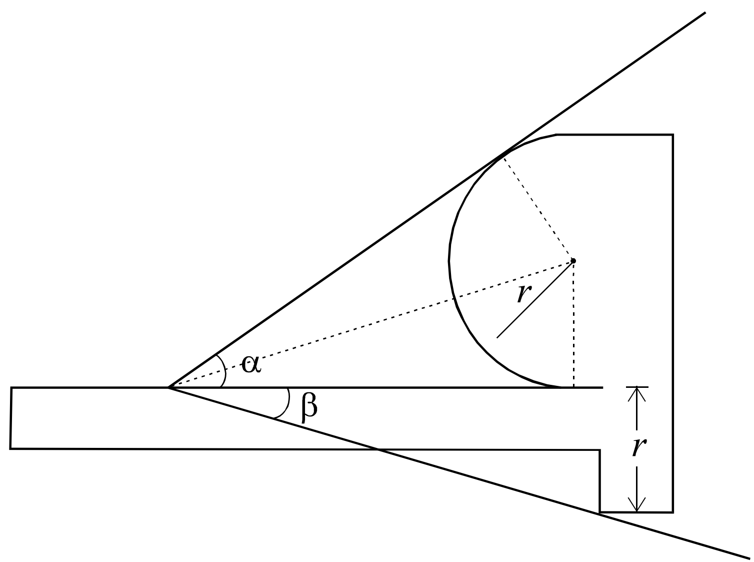




§2.4 A machadinha

Uma placa em forma de machadinha é utilizada para dividir um ângulo em três partes congruentes como indicado na figura. JUSTIFIQUE o procedimento mostrando que $\alpha = 3\beta$.

Faça um MODELO em cartolina e experimente (ver anexo).

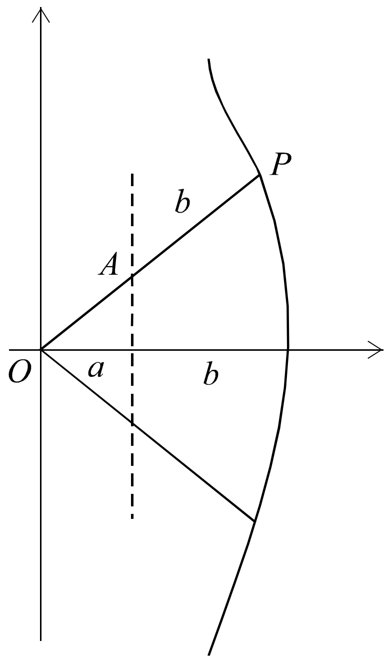


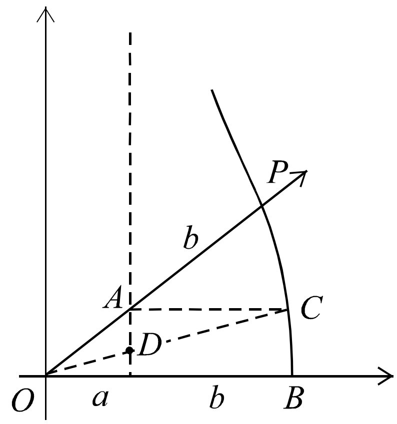
Exercício 3
A conchóide de Nicomedes (grego do séc. III a.C.) e a trissecção de um ângulo.

Fixados dois números reais *a* e *b* positivos, para cada ponto *A* da reta $x = a$, considere *P* o ponto da semi-reta *OA* tal que $PA = b$, como mostra a figura.

a) Dê a equação polar do L.G. desses pontos *P* e a sua equação cartesiana (conchóide)

b) Dado um ângulo $\angle BOP$, trace a reta $x=a$ para algum $a > 0$ encontrando o lado OP no ponto A e considere a conchóide com $b = 2OA$. Mostre que $m(\angle BOC) = 1/3m(\angle BOP)$, onde C é o ponto da conchóide tal que o segmento AC é paralelo ao eixo dos x. Sugestão: aplique a lei dos senos no ΔAOC lembrando que $CD = b=2OA$.





Referências bibliográficas:

DORRIE, Henrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: their history and solution*. N.York: Dover, 1958

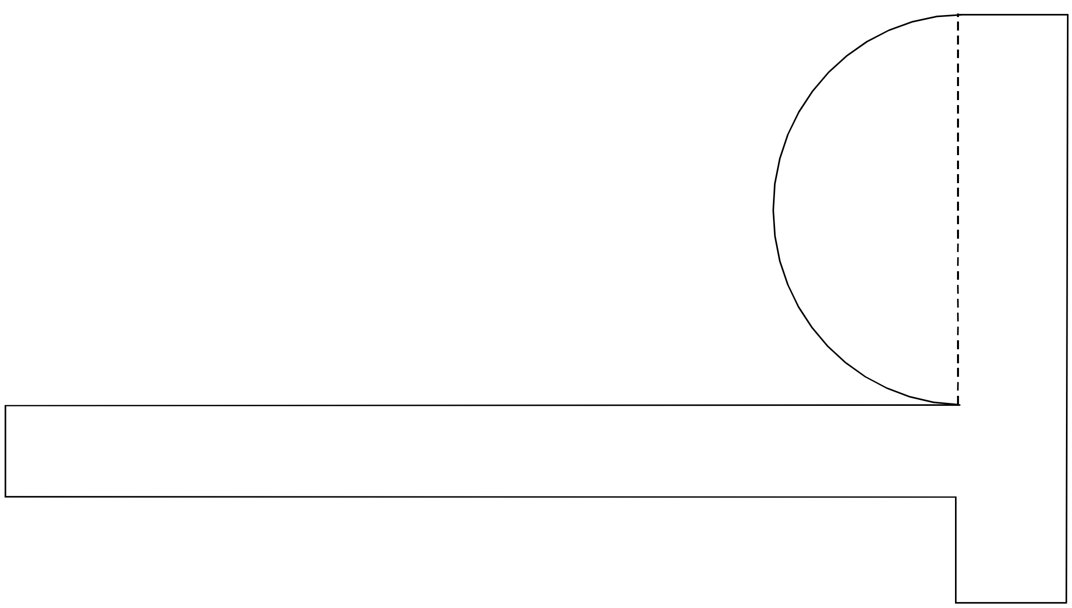
EVES, Howard. *Tópicos de História da Matemática, para uso em sala de aula.* S.Paulo: Atual, 1997.

OGILVY, C. Stanley. *Excursions in Geometry***.** N. York: Dover, 1969.

REZENDE, E.Q.F & QUEIROZ, M.L.B. *Geometria Plana Euclidiana e Construções Geométricas* . Campinas : Unicamp, 2000.

SIMMONS, G.F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Makron, 1988.

ANEXO



II BIENAL DA SBM

II ENCONTRO DA RPM

OFICINA DE PROBLEMAS-II

Como desenhar seções de um sólido passando por 3 pontos dados?

Carlos Edgard Harle
Elvia Mureb Sallum
Sérgio Alves
(Professores do IME – USP)

§1. Introdução

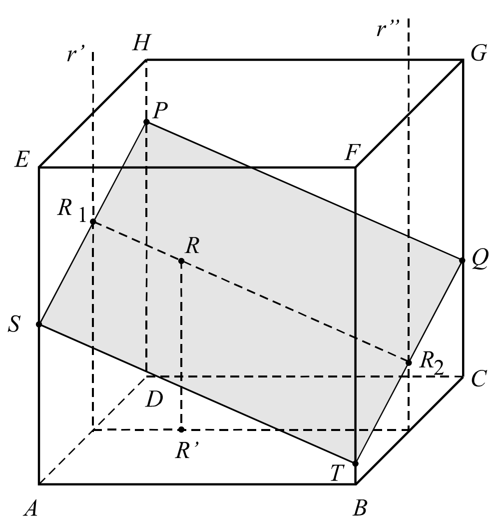
O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um método para desenhar, usando apenas régua e compasso, a seção de um cubo com um plano determinado por três pontos *P*, *Q* e *R*, não colineares. Inicialmente consideraremos *P* e *Q* em arestas paralelas de uma mesma face e *R* no interior do cubo e depois, nos exercícios, aplicaremos a técnica desenvolvida, para outras possibilidades.

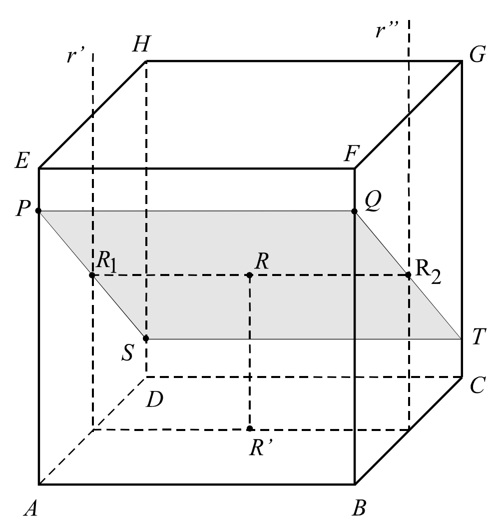
Aproveitando as mesmas idéias, determinaremos também, no §3., seções num tetraedro.

§2. Seções de um cubo

Consideremos um cubo *ABCDEFGH* de base *ABCD*.

Sejam *P*, *Q* e *R* três pontos **não colineares** tais que *P* e *Q* estão em arestas paralelas de uma mesma face e **R está no interior do cubo** dado pelo segmento *RR'*, *R'* na base *ABCD*, perpendicular à base do cubo. Daremos um método para desenhar a seção do plano *PQR* com o cubo.

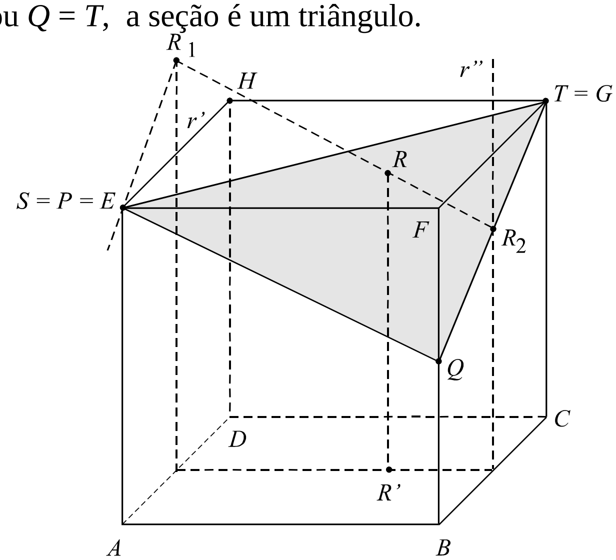




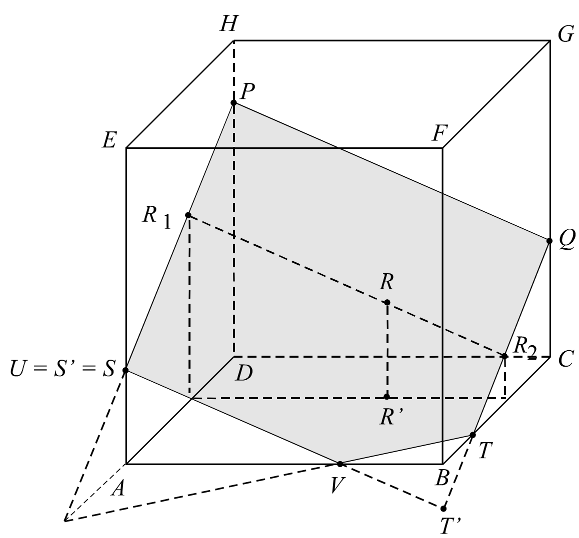
- Traçamos, por R, a paralela a $\overline{PQ}$ cortando os planos das faces $ADHE$ e $BCGF$ em R_1 e R_2, respectivamente. Observe-se que para desenhar R_1 e R_2 basta traçar r' e r'' interseções do plano perpendicular à base passando por R'.

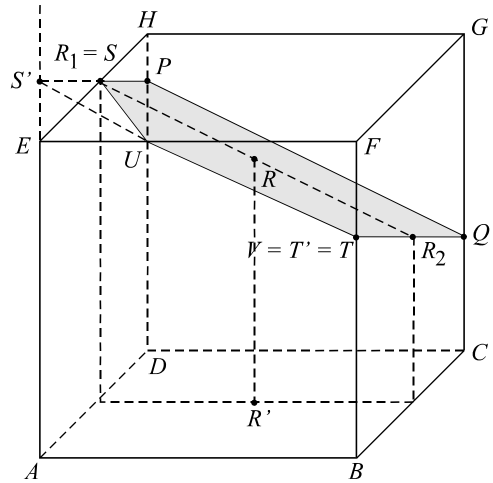
- Traçamos a reta PR_1 cortando uma aresta do cubo em S e a reta QR_2 que corta outra aresta em T (podendo ocorrer $S = P$ ou $Q = T$) .

- Se S e T estão na mesma face basta traçar o segmento ST e , se $P \neq S$ e $Q \neq T$, então, o quadrilátero $PSTQ$ é a seção desejada. Se $P = S$ ou $Q = T$, a seção é um triângulo.



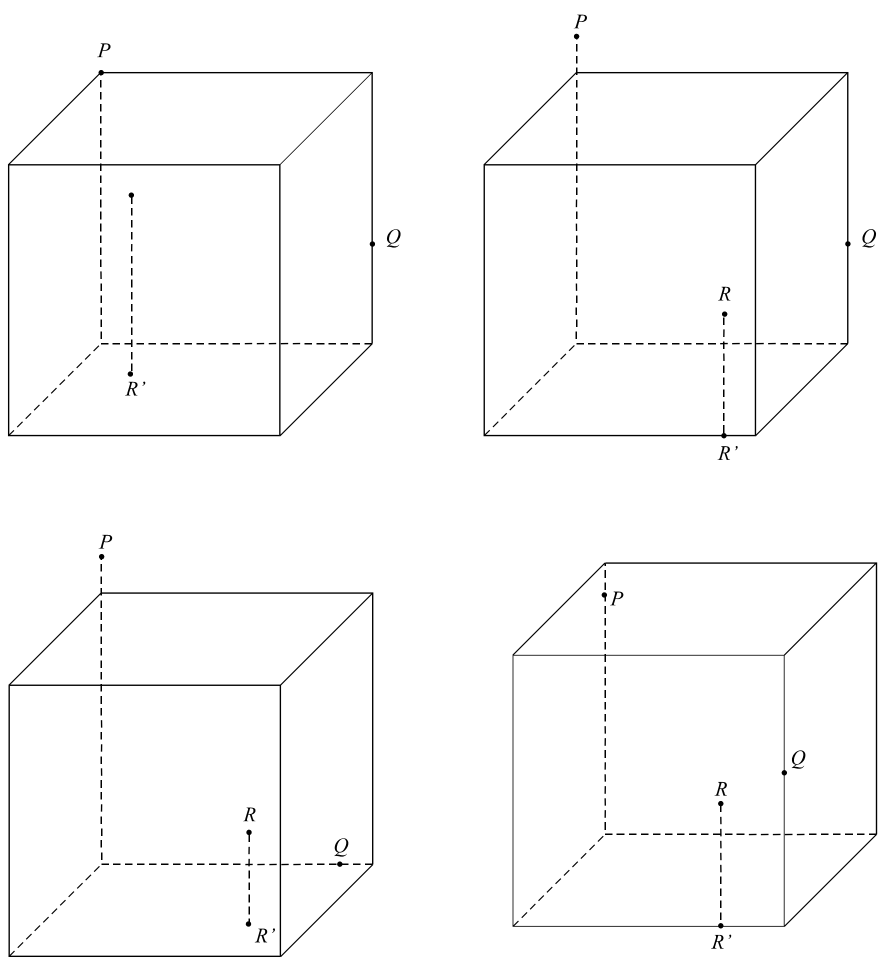
- Se S e T não estão na mesma face, cada uma das retas PS e QT cortará o plano da face oposta `a de $\overline{PQ}$ em S' e T', respectivamente (podendo ocorrer $S = S'$ ou $T = T'$). Nesse caso, traçamos a reta $S'T'$ determinando o segmento UV que é a interseção da reta $S'T'$ com essa face. Obtém-se , assim, um pentágono.

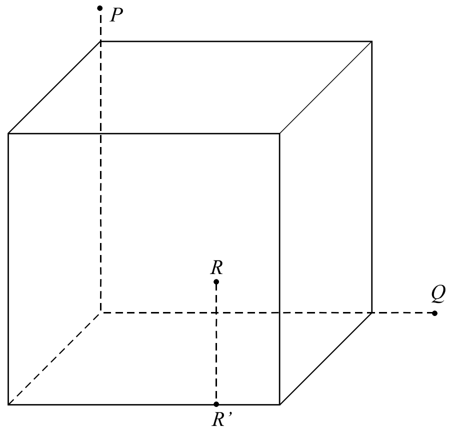


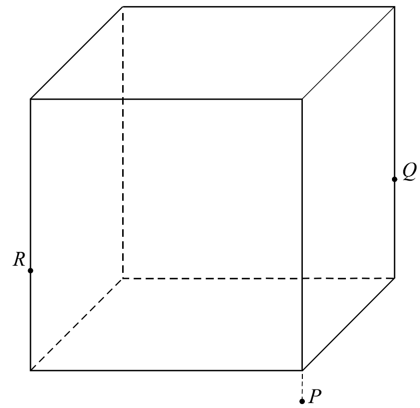


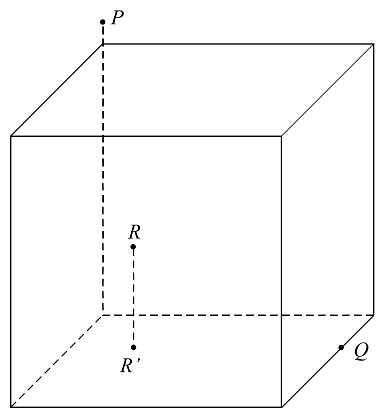
Exercícios:

Usando a mesma técnica, desenhar a interseção do plano *PQR* com o cubo nos casos abaixo.

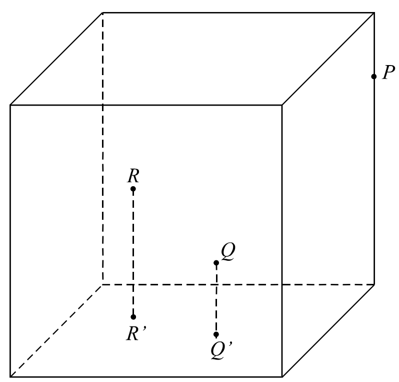








PROBLEMA:
Desenhar a seção pelos três pontos *P*, *Q* e *R* da figura.



§3. Seções de um tetraedro:

Vejamos agora, por meio de exemplos, como desenhar a seção de um tetraedro com um plano que passa por três pontos, não colineares, dados no tetraedro.

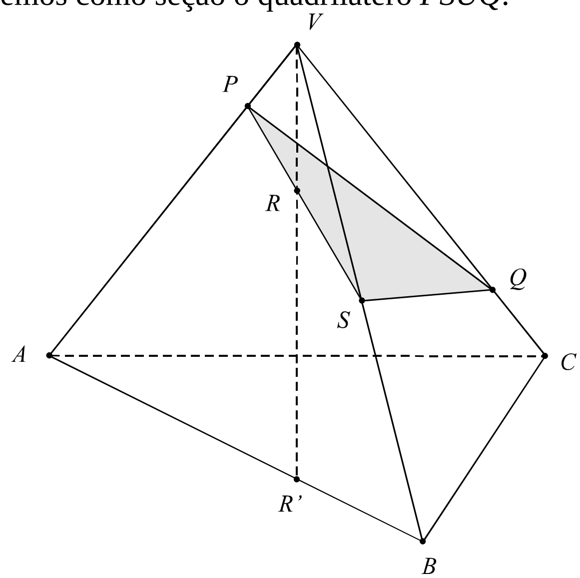
Mais precisamente, dados o tetraedro *VABC* de vértice *V* e base *ABC* e três pontos não colineares $P \in \overline{VA}$, $Q \in \overline{VC}$ *e* $R \in \overline{VR'}$, *R'* pertencente à base *ABC*, vejamos como desenhar a interseção do tetraedro pelo plano PQR.

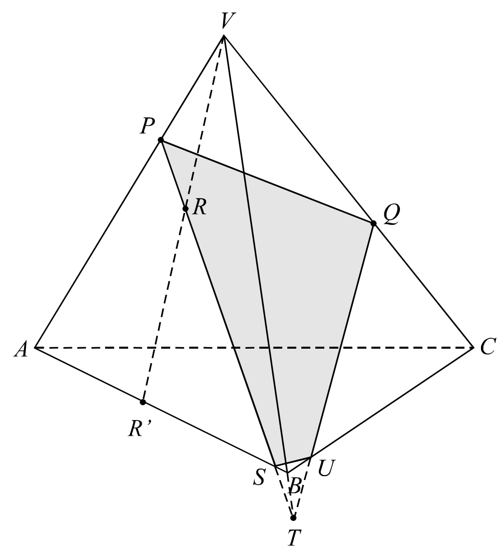
1º caso: Consideraremos, inicialmente, o caso em que *R'* está na aresta *AB* da base.

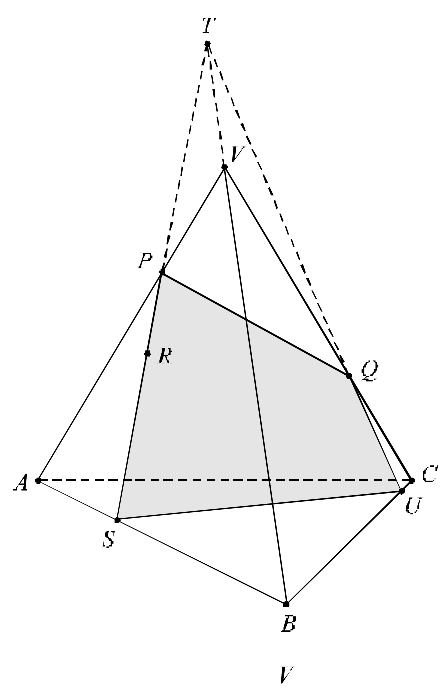
Traçamos a reta *PR* que encontra uma aresta do tetraedro em S.

a) Se $S \in \overline{VB}$, a seção procurada é o triângulo *PSQ*.

b) Se $S \in \overline{AB}$ e a reta *PR* corta a reta suporte de $\overline{VB}$ em *T*, traçamos a reta *QT* que corta $\overline{BC}$ em *U* e teremos como seção o quadrilátero *PSUQ*.



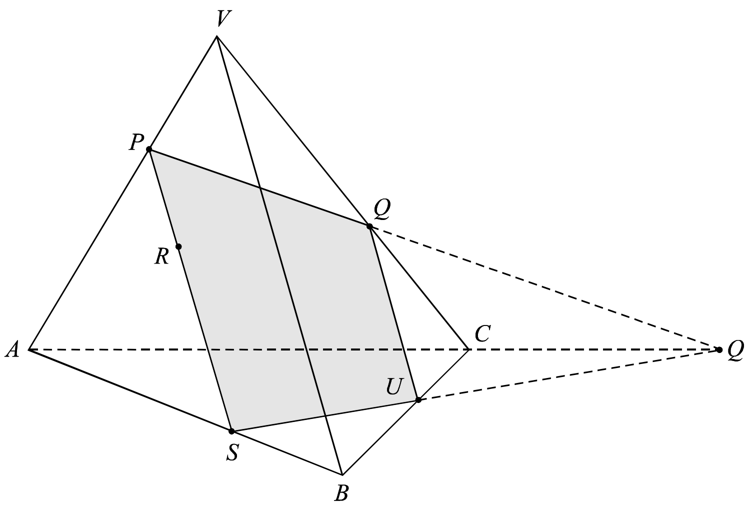


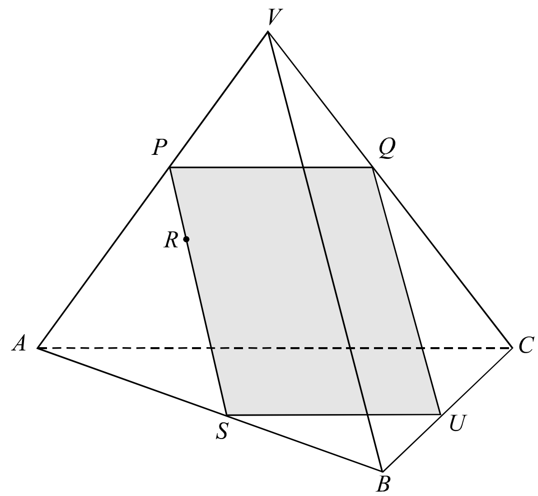


c) No caso em que $S \in \overline{AB}$ e a reta *PR* é paralela ao segmento *VB* surgem duas possibilidades.

- Se a reta *PQ* corta a reta *AC* em *Q'*, traçamos a reta *SQ'* que corta $\overline{BC}$ em *U* e o quadrilátero *PSUQ* é a seção procurada;

- Se $\overline{PQ}$ // $\overline{AC}$, traçamos uma paralela ao segmento *PQ* passando por *S* cortando $\overline{BC}$ em *U* e temos como seção o paralelogramo *PSUQ*.





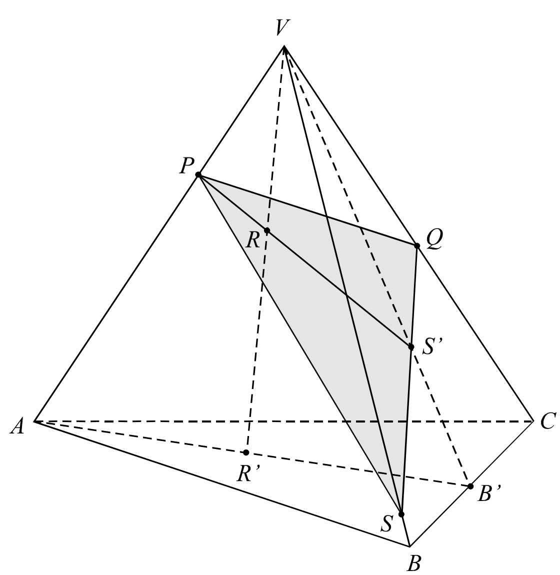
2º caso: Consideremos agora o caso em que *R'* está no interior da base *ABC* do tetraedro *VABC*.

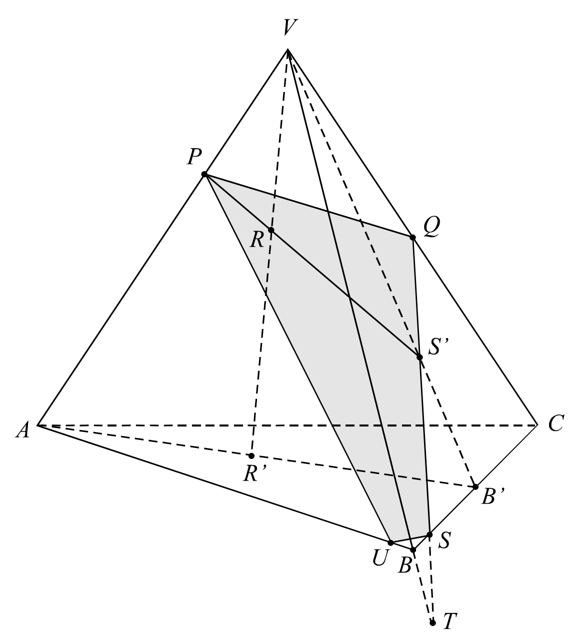
Traçando a semi-reta *AR'* até encontrar $\overline{BC}$ em *B'* ficamos com um tetraedro *VAB'C* com *R'* na aresta *AB'* da base e, pelo caso anterior, obtemos sua seção com o plano *PQR*.

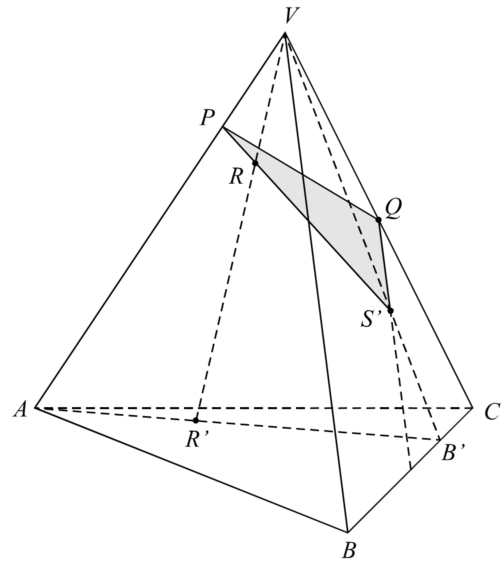
Aplicando as técnicas anteriores, de prolongamento, completamos a seção do tetraedro VABC com o plano PQR conforme descrição abaixo.

No caso da interseção do tetraedro *VAB'C* com o plano *PQR* ser um triângulo *PQS'*:

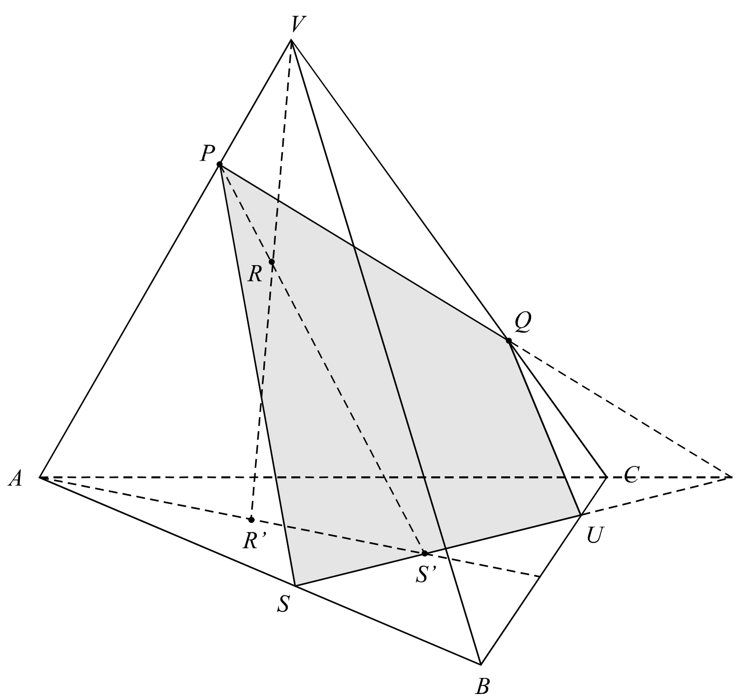
- Se a reta *QS'* cortar a aresta *VB* num ponto S, a seção é o triângulo PQS.
- Se a reta *QS'* cortar a aresta *BC* em *S* e a reta suporte da aresta *VB* em *T*, a seção é o quadrilátero *PQSU* sendo *U* a interseção do segmento *PT* com a aresta *AB*.
- Se a reta *QS'* for paralela à aresta *VB* e cortar a aresta *BC* em *S* determine a seção procurada, como exercício.







No caso em que a seção do tetraedro *VAB'C* com o plano *PQR* é um quadrilátero *PQUS'*, descreva o método para obter a seção procurada, como exercício.



Exercício: Num tetraedro regular, dê três pontos em arestas distintas de modo que a seção determinada pelo plano desses pontos corte o tetraedro num quadrado. Prove que, de fato, é um quadrado.

Referências bibliográficas:

ALVES S.,WATANABE R. *O Leitor Pergunta*, Revista do Professor de Matemática nº 44. São Paulo: SBM, 2000

POSSANI, C., RODRIGUES F.W., SALLUM E.M. *Problemas*, Revista do Professor de Matemática nº 49. S.Paulo: SBM, 2002

POSSANI, C., RODRIGUES F.W., SALLUM E.M. *Problemas*, Revista do Professor de Matemática nº 51. S.Paulo: SBM, 2003