# OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA

João Pitombeira de Carvalho[1]
Departamento de Matemática
PUC-Rio
jbpit@rdc.puc-rio.br

> É indubitável que, na História da Matemática, alguns problemas têm significação especial: agindo como "catalisadores" eles influenciam muito o desenvolvimento da ciência. Tais problemas atraem devido à simplicidade e lucidez de seus enunciados, fascinando muitos especialistas que trabalham na área relevante da Matemática. Como resultado, vários novos métodos e mesmo novas teorias são elaborados e novas perguntas, profundas e abrangentes, são formuladas. [RAIGORODSKI, 2004].

Os matemáticos gregos estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importante no desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos *Elementos*. Os três problemas, que ficaram conhecidos como *os três problemas clássicos*, são

1. A duplicação do cubo.
2. A quadratura do círculo.
3. A trissecção do ângulo.

Sabemos, desde o século XIX, que estes problemas não podem ser resolvidos somente com a régua e o compasso. Referências acessíveis sobre isso são, por exemplo, [COURANT and ROBINS, 1996], [HADLOCK, 1978], KLEIN, 1930]. [BUNT, JONES and BEDIENT, 1988, pp. 89-121]. Uma discussão de porque os gregos tentavam resolver problemas de construção usando somente a régua e compasso, pode ser encontrada, por exemplo, em [BKOUCHE et JOËLLE, 1993].

Para os primeiros geômetras gregos, uma linha era o percurso de um ponto, e a linha reta era um percurso sem asperezas e desvios [SZABO, 2000]. No entanto, aos poucos, os matemáticos gregos se distanciaram da realidade palpável, como se vê, por exemplo, em Platão:

> [a Geometria] tem por objeto o conhecimento do que sempre é e não do que nasce e perece[2].

Passaram também a dar ao círculo e à reta papeis destacados:

> ...
>
> Aristóteles – O que não tem nem começo nem fim é portanto ilimitado
>
> Parmênides- Ele é ilimitado.

[1] Agradeço a Alberto de Azevedo, da Universidade de Brasília, e a Bruno Alves Dassie por suas leituras extremamente cuidadosas do manuscrito e por suas sugestões valiosas.

[2] Platão, A República, 527 a.

> Aristóteles – Portanto ele não tem forma, pois não participa nem do redondo nem do reto.[3]

Além da idéia de perfeição ideal atribuída ao círculo e à linha reta, uma outra razão possível para a restrição à régua e ao compasso pode ter sido a crise devida à descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$, número que pode no entanto ser construído com régua e compasso. Esses instrumentos eram a garantia da existência de números como este.

No entanto, é falsa a crença de que os gregos, na resolução de problemas de construções geométricas, trabalhavam somente com a régua e o compasso. Exatamente como os matemáticos de hoje, para resolverem um problema eles usavam todas as ferramentas disponíveis ou criavam novas ferramentas apropriadas. De suas tentativas para achar soluções para os problemas clássicos, surgiram várias curvas e métodos que enriqueceram a Matemática. Encontram-se em [KNORR, 1986] e [BOS, 2001] construções geométricas, incluindo soluções dos três problemas clássicos, utilizando várias curvas e outros instrumentos.

O matemático van der Waerden resumiu a situação como segue:

> A idéia por vezes expressa de que os gregos permitiam somente construções com régua e compasso é inadmissível. Ela é negada pelas numerosas construções que nos chegaram para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. No entanto, é verdade de que tais construções eram consideradas mais elementares, e Pappus afirma que sempre que uma construção for possível com régua e compasso métodos mais avançados não deveriam ser usados. [van der Waerden, p. 263].

É impossível superestimar a importância destes problemas. Como diz Yates,

> Na história da Matemática há três problemas que persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. Eles são a *trisecção do ângulo*, *a duplicação do cubo* e *a* quadratura *do círculo*, e devido à sua existência robusta eles são atualmente chamados de problemas famosos.
> ...
> Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu grande parte das estruturas atuais da álgebra e geometria.
> A procura constante de soluções para os três problemas durante tanto tempo forneceu descobertas espantosamente frutíferas, às vezes achadas por sorte pura e que lançaram luz sobre tópicos bem distantes. [YATES, 1971, p. 5 ]

Somente em 1837 é que foi demonstrado, por Wantzell, que um número real é construtível com régua e compasso se e somente se ele é um número algébrico, de grau igual a uma potência de dois, sobre os racionais.

Os três problemas são muito naturais para quem tem curiosidade matemática. Sócrates, no diálogo *Meno* de Platão, usando perguntas apropriadas faz com que um jovem escravo ache um quadrado cuja área é duas vezes a área de um quadrado dado. Isso pode ser feito facilmente usando régua e compasso. Com efeito, o quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado dado é a solução do problema. Se $AB$ é lado do quadrado dado, então

[3] Aristóteles, Parmênides, 137 d.

$$\overline{DB} = \sqrt{2} \times \overline{AB}$$
$$\overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AB}^2$$

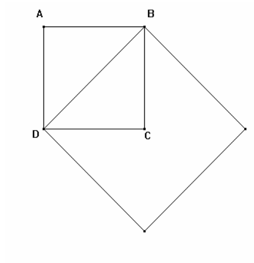


FIGURA 1

De $\overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AB}^2$, vemos imediatamente que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{2\overline{AB}}$$

Assim, achar o comprimento de $DB$ é equivalente a inserir uma meia proporcional entre $AB$ e $2AB$

De maneira mais geral, se desejarmos construir um quadrado cuja área seja $b$ vezes a área $a$ do quadrado $ABCD$, temos

$$\frac{a}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{b}$$

Ou seja, devemos inserir uma *meia proporcional* entre $a$ e $b$. Como veremos, a idéia de inserir meias proporcionais entre duas grandezas dadas está por traz da maioria das tentativas de duplicar o cubo.

“Quadrar” uma região plana consiste em traçar, *somente com régua e compasso*, um quadrado cuja área seja igual à área da região dada. O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos *Elementos* de Euclides.

O problema da quadratura do círculo é também muito natural. Uma vez que o problema da quadratura de qualquer região poligonal foi resolvido, o próximo passo é tentar “quadrar” regiões limitadas por linhas curvas. Entre estas regiões, o círculo é uma escolha óbvia. Isso levou à investigação das “lúnulas” por Hipócrates de Quios, em torno de 430 a.C. [van der WAERDEN, pp. 131-132]. Curiosamente, somente há pouco tempo, em 1947, usando técnicas muito sofisticadas, é que o problema de achar todas as lúnulas “quadráveis” foi completamente resolvido [SCRIBA, 1987].

A primeira menção do problema da quadratura do círculo encontra-se no *papiro Rhind*, em torno de 1600 a.C:

> Construir um quadrado equivalente a um círculo. Reposta: retirar 1/9 do diâmetro e construir o quadrado sobre o que resta.

Em sua comédia *Os pássaros*, Aristófanes introduz o astrônomo Meton e o ridiculariza por causa de suas tentativas de fazer a quadratura do círculo:

> Farei minhas medições com um esquadro reto [90º graus], e assim você observa que o círculo se torna quadrangular

Para Szabó, o problema de quadratura que deu origem a todos os outros foi o de fazer a quadratura do retângulo. Este problema é facilmente resolvido com régua e compasso usando o resultado que em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é a meia proporcional entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

Aristóteles, por sua vez, pensa que este problema surgiu da procura da média geométrica (meia proporcional), mas que isso foi esquecido e só restou o próprio problema:

> A definição não deve contentar-se em exprimir em que consiste a coisa (...), mas ela deve também incluir e exibir a causa. Ora, as definições são geralmente conclusões. Por exemplo: O que é a quadratura? É a igualdade de um quadrado e de um retângulo. Uma definição como essa é uma conclusão. Mas dizer que a quadratura é a descoberta da meia proporcional é exprimir a causa do que é definido[4].

Semelhantemente, uma vez que se sabe como bissectar um ângulo [EUCLIDES, I-9], é natural perguntar como dividir um ângulo em $n$ partes; em particular, em 3 partes.

Embora não tenham conseguido resolver estes problemas com os instrumentos especificados, os matemáticos gregos não se deixaram intimidar e, com engenhosidade notável, foram capazes de achar soluções para os três problemas, usando vários outros tipos de instrumentos e construções.

Em verdade, da mesma maneira que a Matemática moderna cresce com respostas aos desafios de novos problemas, muito da Matemática grega se desenvolveu devido a tentativas de resolver os três problemas clássicos. Neste sentido, os matemáticos gregos eram realmente nossos colegas, pois tinham a mesma atitude mental dos matemáticos atuais e tentavam conscientemente atacar novos desafios. Quando os conceitos e técnicas existentes não conseguiam resolver estes problemas, eles inventavam novos conceitos e técnicas apropriadas para a tarefa.

## A DUPLICAÇÃO DO CUBO

O que sabemos sobre este problema encontra-se principalmente em Eutócio, um comentador de Arquimedes.

Há duas lendas sobre a origem da duplicação do cubo, com detalhes contraditórios. Uma delas se refere à duplicação de um túmulo e a outra à duplicação de um altar [van der WAERDEN, pp. 160-161].

Segundo a primeira lenda, Minos mandou fazer um túmulo para Glauco. Ao saber que o túmulo era um cubo cuja aresta media 100 pés, ele disse que a residência real tinha sido construída demasiadamente pequena e que ela deveria ser duas vezes maior e ordenou imediatamente que duplicassem cada aresta do túmulo, sem estragar sua bela forma.

De acordo com a segunda lenda, quando Deus anunciou aos Delianos, por meio de um oráculo que, para se verem livres da peste, deveriam construir um altar duas vezes maior do que o existente, os arquitetos ficaram muito confusos, pois não sabiam como construir um cubo duas vezes maior do que outro.

Hipócrates de Quios (viveu em torno de 430 a.C.) reduziu este problema ao de achar duas meias proporcionais $x$ e $y$ entre 1 e 2. Se

[4] ARISTÓTELES, *Tratado da alma*, II, 2, 413 A, 13-20.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

vemos que

$$x^2 = y$$

e portanto, multiplicando ambos os membros por $x$

$$x^3 = xy.$$

Mas como

$$xy = 2$$

temos que

$$x^3 = 2$$

No caso geral, se $x$ e $y$ são duas meias proporcionais entre $a$ e and $b$, temos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

e disso vemos que

$$x^2 = ay$$

e que

$$xy = ab$$

e daí segue-se que

$$x^3 = axy = a^2b$$

e assim

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}.$$

Apresentaremos agora 7 soluções do problema da duplicação do cubo, quase todas baseadas em achar duas meias proporcionais entre duas grandezas, usando construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso e curvas que não podem ser traçadas usando somente com estes dois instrumentos.

**a- A máquina de Platão**

O filósofo grego Platão (viveu de 429 a 347 a.C.) tinha grande interesse pela Matemática e lhe atribuía importância particular. Gravitaram em torno dele alguns excelentes matemáticos, como, por exemplo, Árquitas, Eudoxo, Menecmo, Teeteto, entre outros.

É bem conhecido que Platão desprezava construções mecânicas, materiais [ver van der WAERDEN, pp. 162-163] em Matemática. Assim, é irônico que a solução discutida a seguir seja conhecida como "máquina de Platão". Como sabemos que o cubo não pode ser duplicado somente com regra e compasso, esta construção não pode ser efetuada usando somente estes instrumentos.

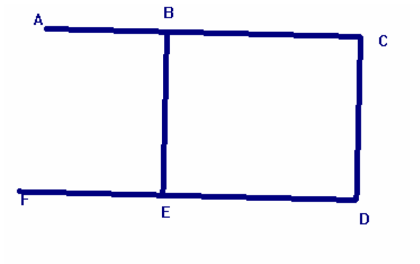


FIGURA 2

A máquina de Platão é um dispositivo, formado por partes rígidas, em que $ACDF$ é uma peça rígida, com $AC$ e $FD$ paralelas e $CD$ perpendicular a ambas. O segmento $BE$ é paralelo a $CD$ e pode deslizar ao longo de $AC$ e de $FD$.

Para achar duas meias proporcionais entre $ON = a$ e $OM = b$, movimentamos $ACDF$ de maneira que o segmento $CD$ passe por $M$, $C$ esteja sobre o eixo dos x e fazemos $BE$ deslizar até que passe por $N$ e $B$ esteja sobre o eixo dos y, como mostrado na FIGURA 3.

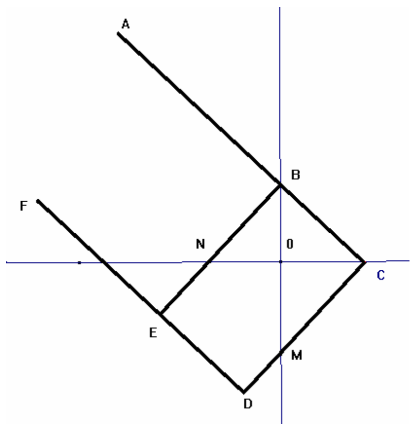


FIGURA 3

Vemos que os triângulos $NOB$ e $MOC$ são semelhantes e portanto

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}}$$

Como os triângulos $NOB$ e $OCB$ também são semelhantes, temos que

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$$

e assim chegamos a

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}}$$

o que mostra que $OB$ e $OC$ são de fato meias proporcionais entre *a* e *b*.

**b- A máquina de Eratóstenes**

Considere três placas retangulares $AEZF$, $NMHJ$, e $SGTL$ que podem deslizar sobre uma reta de maneira que a placa média, $(NMHJ)$ pode passar por traz da primeira, $(AEZF)$, e que a última, $(SGTL)$, deslize por traz da do meio. Suponha que desejamos achar duas meias proporcionais entre $a = \overline{AE}$ e $b = \overline{DT}$.

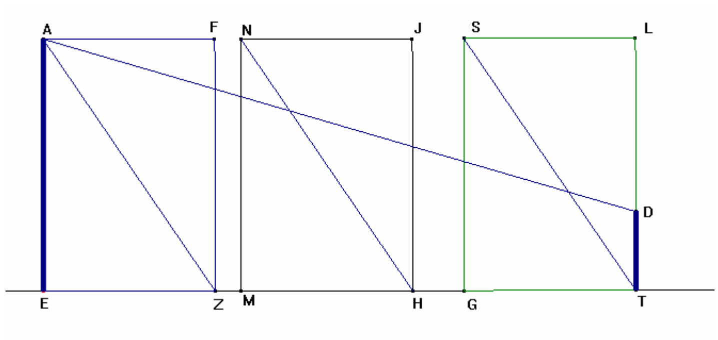


FIGURA 4

Traçamos a reta $AD$ e fazemos as placas deslizar, como descrito acima, de maneira que o lado direito $ZF$ da primeira placa $(AEZF)$, intercepta a diagonal $NH$ da segunda placa $(NMHJ)$, exatamente sobre a reta $AD$, no ponto $B$, como mostrado na figura a seguir

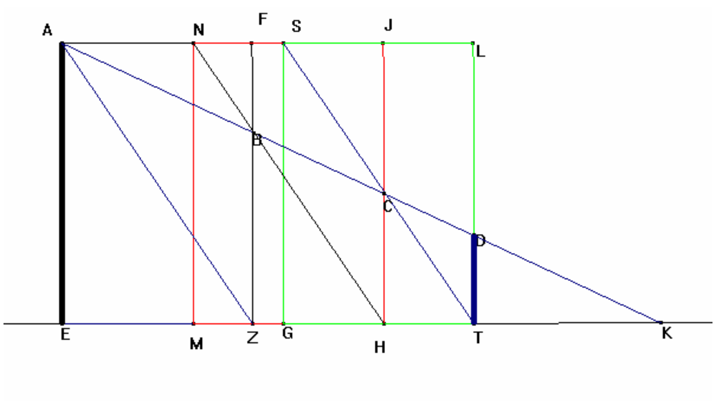


FIGURA 5

De maneira semelhante, fazemos deslizar a terceira placa $(HGTL)$ de tal forma que o lado direito da segunda placa corte a diagonal $HT$ exatamente sobre $AD$, no ponto $C$.

Afirmamos então que $BZ$ e $HC$ são meias proporcionais entre AE e DT, ou seja, que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{DT}}.$$

Como os triângulos $AEK$ e $BZK$ são semelhantes, temos

$$\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{\mathrm{KE}}}{\overline{\mathrm{KZ}}}. \qquad (1)$$

Como os triângulos $AZK$ e $BHK$ são semelhantes, temos

$$\frac{\overline{\mathrm{AZ}}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KZ}}{\overline{KH}}. \qquad (2)$$

Temos também que os triângulos $BZK$ e $CHK$ são semelhantes, e portanto

$$\frac{\overline{KZ}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}. \qquad (3)$$

Além disso, da semelhança dos triângulos $BHK$ e $CTK$ decorre que

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}. \qquad (4)$$

Temos também que os triângulos $CHT$ e $CTK$ são semelhantes, e assim

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}}. \qquad (5)$$

De (1) e (2) obtemos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{KZ}}{\overline{KH}} \qquad (6)$$

pois as duas séries de proporções têm $\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$ em comum.

Como $\frac{\overline{KZ}}{\overline{KH}}$ comparece em (3) e (6), podemos escrever

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}. \qquad (7)$$

De (3), (4) e (7) podemos escrever, como (4) e (7) têm $\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ em comum, que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{KZ}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}}. \qquad (8)$$

Além disso, como (5) e (8) têm $\frac{\overline{KH}}{\overline{KT}}$ em comum, obtemos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}} \qquad (9)$$

do que decorre, finalmente, que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{DT}}. \qquad (10)$$

O processo descoberto por Erastótenes pode ser usado para inserir qualquer número de meias proporcionais entre $a$ e $b$. para inserir $n$ meias proporcionais, é suficiente tomar $n+1$ retângulos e proceder como acima.

**c- A solução de Nicomedes.**

A solução encontrada por Nicomedes, que viveu em torno de 240 a.C. é verdadeiramente muito engenhosa.

Suponha que queremos inserir duas meias proporcionais entre $b = AB$ e $a = BC$.

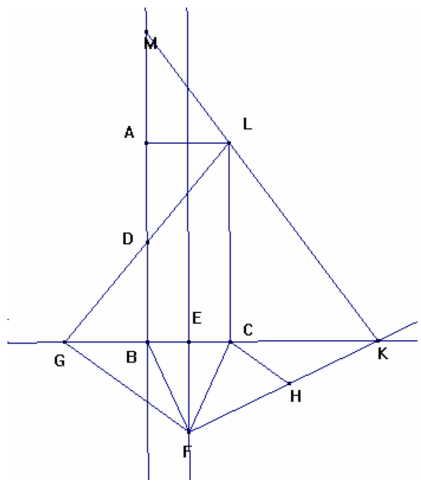


FIGURA 6

Trace o retângulo $ABCL$. Seja $D$ o ponto médio de $AB$ e trace a reta que passa por $L$ e $D$. Seja $G$ seu ponto de intersecção com a reta que passa por $C$ e $B$. Seja $E$ o ponto médio de $BC$ e trace a perpendicular a $BC$ por $E$. Chame de $F$ o ponto desta reta para o qual $BF = AD$.

Trace a reta $s$ que passa por $F$ e por $G$ e a paralela a $s$ que passa por $C$. Por $F$ trace a reta $FHK$ construída de tal maneira que $HK = CF = AD$. Trace a reta que passa pelos pontos $K$ e $L$ e chame de $M$ sua intersecção com a reta definida por $A$ e $B$.

Afirmamos que $AM$ e $CK$ são meias proporcionais entre $a$ e $b$, ou seja, que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{BC}}. \qquad (11)$$

Para compreender isso, devemos usar um teorema dos *Elementos* de Euclides.

Teorema (Elementos, II-6): *Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada e pela reta adicionada é igual, se lhe for adicionado o quadrado sobre a metade da reta, ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada*[5].

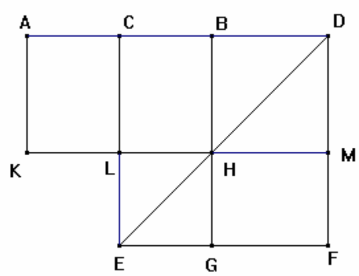


FIGURA 7

Ou seja, na figura, a soma das áreas do retângulo de base $AD$ e altura $DB$ e do quadrado $LEGH$ (que é igual ao quadrado de lado $CB$) é igual à área do quadrado de lado $CD$.

Voltemos à justificação da construção de Nicomedes, aplicando este teorema ao segmento $BC$ cortado ao meio por $E$ e prolongado até $K$:

[5] Na tradução de [SIMSON, 1773]: Se uma reta for dividida em duas partes iguais e em direitura com ela se puser outra reta; será o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta juntamente com o quadrado da metade da primeira reta, igual ao quadrado da reta que se compõe da mesma metade e da outra reta adjunta.

$$\overline{BK}\cdot\overline{KC}+\overline{CE}^2=\overline{EK}^2. \qquad (12)$$

Adicionando $\overline{EF}^2$ a ambos os lados desta igualdade e usando o teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BK}\cdot\overline{KC}+\overline{CF}^2=\overline{FK}^2. \qquad (13)$$

Além disso, devido à semelhança dos triângulos $AMC$ e $MBK$ temos que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{ML}}{\overline{LK}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CK}}. \qquad (14)$$

Observe que $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{GC}$ devido à congruência dos triângulos $GBD$ e $DAL$.

Como $\overline{AB}=2\overline{AD}$, temos que

$$\frac{\overline{MA}}{2\cdot\overline{AD}}=\frac{\overline{GC}}{2\cdot\overline{CK}} \qquad (15)$$

e assim

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{CK}}. \qquad (16)$$

Como os triângulos $GFK$ e $CHK$ são semelhantes, temos

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{FH}}{\overline{HK}} \qquad (17)$$

e daí segue-se que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{FH}}{\overline{HK}}. \qquad (18)$$

Temos então que

$$\frac{\overline{MA}+\overline{AD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FH}+\overline{HK}}{\overline{HK}} \qquad (19)$$

e assim

$$\frac{\overline{\mathrm{MD}}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{HK}}. \qquad (20)$$

Como $\overline{HK}=\overline{AD}$, por construção, segue-se de (20) que $\overline{MD}=\overline{FK}$ e assim , de (13), temos

$$\overline{BK}\cdot\overline{KC}+\overline{CF}^2=\overline{FK}^2. \qquad (21)$$

Usaremos mais uma vez Euclides II-6 aplicado ao segmento $BA$, cujo ponto médio é $D$ e prolongado até $M$:

$$\overline{BM}\cdot\overline{MA}+\overline{AD}^2=\overline{MD}^2. \qquad (22)$$

Como $\overline{MD}=\overline{FK}$, vemos que

$$\overline{BM}\cdot\overline{MA}+\overline{AD}^2=\overline{FK}^2. \qquad (23)$$

Comparando (21) e (23) vemos que

$$\overline{BM}\cdot\overline{MA}=\overline{BK}\cdot\overline{KC} \qquad (24)$$

de maneira que

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BK}}=\frac{\overline{CK}}{\overline{MA}}. \qquad (25)$$

Da semelhança dos triângulos $MBK$, $MAL$ e $LCK$ segue-se que

$$\frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{BK}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{LC}}{\overline{CK}}. \qquad (26)$$

Finalmente, usando (25) e (26), temos que:

$$\frac{\overline{\mathrm{LC}}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{CK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{AL}}. \qquad (27)$$

Como $\overline{LC}=\overline{AB}$, $\overline{AL}=\overline{BC}$, temos, enfim, que

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{CK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{BC}}. \qquad (28)$$

Apresentamos a seguir uma solução analítica para a construção de Nicomedes.

Sejam $x=FH$ e $y=CK$.

Nos triângulos retângulos $EFK$ e $EFC$ temos que

$$\overline{EF}^2+\overline{EK}^2=\overline{FK}^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\overline{EF}^2+\overline{EC}^2=\overline{FC}^2 \qquad (\mathrm{II})$$

De (I) e de (II) vemos que

$$\overline{FK}^2-\overline{EK}^2=\overline{FC}^2-\overline{EC}^2$$

E assim

$$\left(\frac{1}{2}b+x\right)^2-\left(\frac{1}{2}a+y\right)^2=\left(\frac{1}{2}b\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

Disso, segue-se imediatamente que

$$ay+y^2=bx+x^2$$

Logo

$$\frac{a+y}{b+x}=\frac{x}{y} \qquad (1)$$

Os triângulos CHK e GFK são semelhantes e podemos portanto escrever

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{CK}}=\frac{\overline{FH}}{\overline{GC}}$$

Ou seja

$$\frac{\frac{1}{2}b}{y} = \frac{x}{2a} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

Mas então

$$\frac{a+y}{y} = \frac{x+b}{b} \Rightarrow \frac{a+y}{x+b} = \frac{y}{b} \qquad (2)$$

De (1) e (2) vemos que

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{b} = \frac{a}{x}$$

E assim

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Como, pela semelhança dos triângulos *AML* e *LCK*, temos que

$$\frac{a}{\overline{AM}} = \frac{y}{b}$$

decorre imediatamente que

$$\overline{AM} = x$$

o que conclui a demonstração.

**d- A Construção de Árquitas.**

Vamos agora considerar uma das soluções mais engenhosas do problema de duplicar um cubo, devida a Árquitas (viveu em torno de 390 a.C.). Reproduzimos aqui a solução como apresentada em [TEIXEIRA, 1995, pp. 289-290]. Embora o raciocínio de Árquitas seja puramente geométrico [veja van der WAERDEN, p. 151 ou HEATH, 1981, vol 1, pp. 246-249], usaremos seu equivalente analítico para torná-lo mais familiar para nós, habituados com a linguagem algébrica.

Sejam *a* e *b* os dois segmentos dados, com *b*<*a*. Seja *OCA'* uma circunferência cujo diâmetro *OA'* é igual a *a* e uma outra circunferência *OBA* cujo diâmetro *OA* é igual a *b* e que está contida em um plano perpendicular ao plano da primeira circunferência.

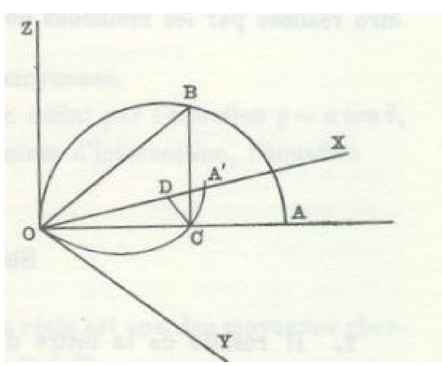


FIGURA 8

Considere o cilindro circular reto gerado pela circunferência *OCA'* e o toro gerado pela circunferência *OBA* ao girar em torno da reta *OZ*, perpendicular ao plano *OCA'*.

A intersecção destas duas superfícies define uma curva, conhecida como *curva de Árquitas*, dada pelas equações

$$x^2 + y^2 = ax$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Seja $\theta = \frac{b}{a}$ e considere o cone cujo eixo é a reta $OA'$ e cuja geratriz forma com o eixo o ângulo $\theta$. A equação deste cone é

$$(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2}{b^2}x^2.$$

Seja *D* a projeção de *C* sobre *OX*. Então a curva de Árquitas corta o cone no ponto *B* cuja projeção sobre o plano de *OCA*' é o ponto *C* da circunferência tal que $\frac{\overline{OC}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{b}{a}$.

Afirmamos que *OC* e *OB* são duas meias proporcionais entre *a* e *b*. Com efeito,

$$\overline{OC}^2 = a \cdot \overline{OD}, \qquad \mathrm{OB}^2 = a \cdot OC, \qquad b \cdot OB = a \cdot OD.$$

Disso, decorre que

$$\overline{OC}^2 = b \cdot \overline{OD}, \qquad \mathrm{OB}^2 = a \cdot OC,$$

e temos enfim que

$$\frac{a}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{\overline{OC}}} = \frac{\overline{OC}}{b}.$$

Teixeira comenta que

> Esta solução é muito engenhosa e tem grande interesse histórico, porque é o mais antigo exemplo de solução de um problema de geometria plana usando geometria espacial, e a curva usada é a mais antiga curva reversa conhecida. [TEIXEIRA, 1995, p. 290]

Comentando a versão original, geométrica, desta solução, van der Waerden afirma que

> Isso é admirável. Árquitas deve ter tido realmente uma inspiração divina quando achou esta construção. [van der WAERDEN, p. 151]

**e- A solução achada por Menecmo**

Menecmo viveu em torno de 350 a.C. Em seu comentário sobre o primeiro livro de Euclides, Proclus, no assim chamado *Sumário de Eudemo*, afirma que Menecmo foi um aluno de Eudoxos e um membro dos filósofos e matemáticos em torno de Platão. Ele era irmão de Dinostrato o qual, segundo Proclus, “aperfeiçou ainda mais a geometria”.

Se *x* e *y* São duas meias proporcionais entre *a* e *b*, temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \qquad (27).$$

Isso é inteiramente equivalente às equações simultâneas

$$y^2 = bx, \qquad xy = ab.$$

Assim, para resolver o problema, é suficiente achar a intersecção das parabolas e hiperboles definidas por estas equações, respectivamente. As coordenadas deste ponto são as meias proporcionais que estamos procurando.

É óbvio que (27) é também equivalente a

$$y^2 = bx, \qquad x^2 = ay.$$

Desta maneira o problema pode também ser resolvido usando duas parábolas cujos vértices coincidem e cujos eixos são ortogonais.. Estas duas soluções são descritas por Eutócio em seu comentário do *Tratado sobre a esfera e o cilindro* de Arquimedes.

Nem todas as soluções deste problema consistiam em inserir duas meias proporcionais entre duas grandezas dadas. Isso pode ser verificado pela solução devida a Diocles.

**f- O método de Diocles**

A solução de Diocles se baseia na cissóide, uma curva definida como segue: Seja uma circunferência que passa pela origem *O* do sistema de coordenadas, tem seu centro sobre o eixo dos *x* e diâmetro igual a 1. Sejam *I*=(1,0)e *U*=(0,2). Seja *r* a reta vertical que passa por *I*. Seja *P* um ponto sobre a circunferência. A reta que passa por *O* e por *P* intercepta *r* no ponto *P*''. Tome o ponto *P*' sobre *OP*'' tal que $\overline{OP} = \overline{P''P'}$. A cissóide é o lugar geométrico do ponto *P*' quando *P* percorre a circunferência.

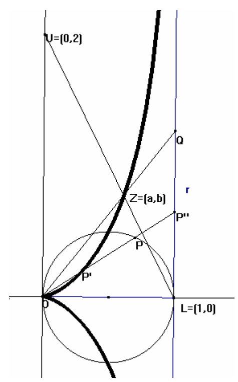


FIGURA 9

A equação polar da circunferência é

$$\frac{\rho}{2R} = \cos\ \theta \ \Rightarrow \rho = 2R\cos\ \theta$$

Como $R = \dfrac{1}{2}$, a equação se reduz a $\rho = \cos\ \theta$.

Por outro lado, $OP'' = \dfrac{1}{\cos\ \theta}$.

Como $OP' = P'P'' = OP''$ e $OP = P'P''$, segue-se que $OP' = OP'' - OP$, de maneira que a equação polar da cissóide é

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\ \theta = \frac{\mathrm{sen}^2\ \theta}{\cos\theta}$$

Assim, a equação cartesiana da cissóide é

$$x=\rho\cdot\cos\theta=\operatorname{sen}^2\theta=\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

ou seja

$$x(x^2+y^2)-y^2=0.$$

Agora, acharemos o ponto de intersecção, $Z=(a,b)$, da reta *IU* com a cissóide.

A equação cartesiana da reta *IU* é $y=2(1-x)$, de maneira que $b=2(1-a)$, e assim

$$a(a^2+b^2)-b^2=0$$

$$a^3+ab^2-b^2=0$$

$$a^3=b^2(1-a)=\frac{b^3}{2}$$

$$2a^3=b^3$$

Achemos agora a intersecção da reta $y=\sqrt[3]{2}x$, que passa por *O* e por *Z* com a reta $x=1$. Esta intersecção é o ponto *Q*:

$$b=\sqrt[3]{2}$$

Se temos um cubo cuja aresta mede 1, para duplicar seu volume, devemos achar a aresta *y* de um cubo que tem volume 2. Ou seja, devemos ter $y=\sqrt[3]{2}$. Assim, vemos que a ordenada $b$ achada acima resolve o problema.

**g- O método de Hierão**

Descrevemos, a seguir, o método proposto por Hierão para achar duas meias proporcionais entre dois comprimentos *a* e *b*.

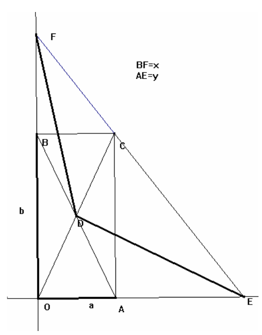


FIGURA 10

Construa o retângulo *OACB*, no qual *AO=a* e *OB=b*. Seja *D* o centro do retângulo. Tome uma régua que passa por *C* e sejam *E* e *F* seus pontos de intersecção com as retas definidas por *AO* e *OB* respectivamente. Faça a régua girar até que *DF=DE*. Afirmamos então que *BF=x* e *AB=y* são as duas meias proporcionais entre *a* e *b*.

Com efeito, usando a semelhança dos triângulos *FBC*, *CAE* e *FOE*, temos que

$$\frac{a}{x}=\frac{y}{b}=\frac{a+y}{b+x}.$$

Como $\overline{DE}^2 = \overline{DF}^2$, segue-se que $\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 = \left(x+\frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}a^2$, de maneira que $y(a+y) = x(b+x)$ e disso decorre que $\frac{x}{y} = \frac{a+y}{b+x} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ e daí vemos facilmente que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Mais detalhes sobre a duplicação do cubo podem ser achados em [HEATH, 1981, vol 1, pp 244-270]. Uma explicação lúcida da solução de Árquitas encontra-se em [van der Waerden, pp. 150-152], [HEATH, 1981, vol 1, pp. 246-249] e [TEIXEIRA, 1995, pp 285-326] o qual apresenta um total de 17 soluções, incluindo os métodos propostos por Viète, Descartes, Fermat, Newton e Clairaut.

## A QUADRATURA DO CÍRCULO

Como já dissemos, "quadrar" o círculo, ou seja, traçar, com régua e compasso, um quadrado com área igual à área do círculo é um problema bem natural, uma vez resolvido o problema de fazer a quadratura de formas poligonais. Veremos agora como os matemáticos gregos encontraram maneiras de resolver este problema usando curvas e construções que não podem ser construídos somente com régua e compasso.

A origem do interesse grego nos problemas de quadratura é pouco conhecida. Segundo Zsabo [ZSABO, 2000], o problema primitivo do qual se originaram todos os outros foi o da quadratura do retângulo. Aristóteles afirma que a origem deste problema foi a procura da média geométrica, mas que isso foi esquecido e que só foi preservado o problema.

### a- A quadratriz

Esta curva notável resolve dois dos problemas clássicos: a quadratura do círculo e a trisecção de um ângulo arbitrário. Para construí-la, suponhamos que no quadrado *ABCD* o lado *AD* gira com movimento circular uniforme em torno de *A* até que coincide com o lado *AB*. Ao mesmo tempo, o lado *DC* desce com velocidade constante até coincidir com *AB*. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, *DC* e *AD* coincidam com *AB* no mesmo instante.

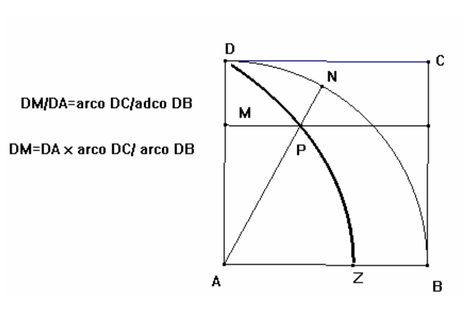


FIGURA 11

A quadratriz é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva *DPZ* da FIGURA 11.

A quadratriz foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinostrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez usou esta curva para fazer a quadratura do círculo.

Afirmamos que $AZ = \frac{2a}{\pi}$, sendo a o comprimento do lado do quadrado. Com efeito, sejam $\theta$ o ângulo $PAZ$, $x = MP$, $y = AM$ e $AB = AD = DC = a$. Então, devido à proporcionalidade dos dois movimentos, temos que $\frac{y}{\theta} = k$, com $k$ uma constante de proporcionalidade. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k$$

de maneira que

$$k = \frac{2a}{\pi}$$

e podemos concluir que

$$\theta = \frac{\pi y}{2a} \rightarrow y = \frac{2a\theta}{\pi}$$

e assim

$$y = \frac{2a\theta}{\pi}$$

Para achar a equação polar da quadratriz temos:

$$\frac{y}{\rho} = \text{sen } \theta \Rightarrow \rho = \frac{y}{\text{sen } \theta} = \frac{2a\theta}{\pi \text{sen } \theta}.$$

Quando $\theta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen } \theta} = 1$$

e temos que

$$AZ = \rho = \frac{2a}{\pi}.$$

Tendo construído um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ é fácil construir $\pi$ para fazer a quadratura do círculo. Com efeito, é fácil dividir, usando somente régua e compasso, $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$ e em seguida tomar o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

Um tratamento mais completo do problema da quadratura do círculo pode ser encontrado em [HEATH, 1981, vol I, pp 220-235]. Uma boa exposição encontra-se em [TEIXEIRA, 1995, pp 362-384]. A história detalhada de $\pi$ pode ser lida em [BECKMANN, 1977].

## A TRISECCÇÃO DO ÂNGULO.

Voltamo-nos agora para o terceiro dos problemas clássicos, ou seja, a trisseção de um ângulo qualquer. Este problema pode ser resolvido de várias maneiras. Acredita-se que Hipias de Elis, que viveu no século V a.C. foi um dos primeiros a tentar resolver o problema da trissecção, utilizando curvas e construções que não podem ser desenhadas somente com régua e compasso.

Faremos, em primeiro lugar, uma digressão sobre as *construções por ajustamento* (*neusis)*.

Em uma construção neusis deve-se ajustar um segmento dado entre duas curves dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado. Nas palavras de Heath

> Assim, uma linha reta tem que colocada entre duas linhas ou curvas de maneira que passe por um ponto dado e o segmento determinado sobre ela pelas intersecções com as linhas ou curvas é igual a um comprimento dado. [HEATH, 1953, p. c]

Mostremos um exemplo de uma construção neusis.

**a- A trisecção do ângulo por Arquimedes**

A construção que mostraremos a seguir é um dos exemplos das várias soluções do problema da trissecção do ângulo propostas por Arquimedes.

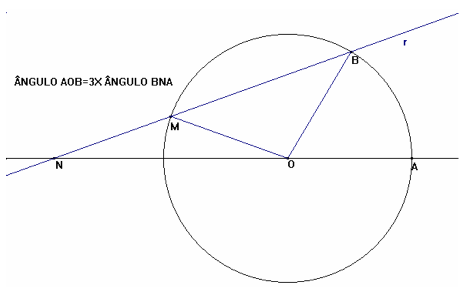


FIGURA 12

Suponha que desejamos trissectar o ângulo *BOA*. Tome uma reta *r* que passa por *B* e, tendo o cuidado para que ela sempre passe por *B,* movimente-a para que o segmento *MN* seja igual ao raio *OM* do círculo. Isso é exatamente o que se denomina uma construção neusis: Ajustamos um segmento (o raio *OM*) entre o círculo e a linha reta que passa por *C* e por *A*.

Observe que os triângulos *NMO* e *MOB* são isósceles, de maneira que *x*=ângulo *MNO*= ângulo *MON*. De maneira semelhante, ângulo *BMO*= ângulo *OBM*.

No triângulo *NOM* o teorema do ângulo externo fornece que ângulo *BMO*= ângulo *MBO*= 2x ângulo *MNO.*

Aplicando o teorema do ângulo externo agora ao triângulo *BNO*, vemos que

Ângulo *BOA*= ângulo *BNO*+ângulo *MBO*= *3*xângulo *BNO*

e vemos assim que com esta construção foi possível dividir o ângulo *BOA* em três partes iguais.

**b- A trisecção do ângulo por Nicomedes.**

Suponha que desejamos trisectar o ângulo $\alpha$=*AOB*. Por *B* levante uma reta perpendicular a *OB* e por *A* uma reta paralela a *OB*. Trace uma reta por *O* e sejam *P* e C suas intersecções com *AB e AC* respectivamente. Mova-a de maneira que *PC*=2*OA* Afirmamos que ângulo *POB*= ângulo *AOB*/3.

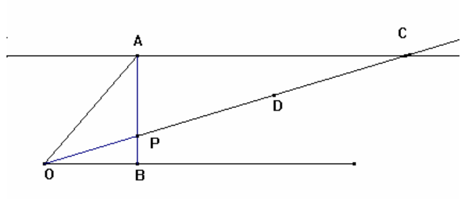


FIGURA 13

Com efeito, seja *D* o ponto médio de *PC*. Então o triângulo *APC* está inscrito em um círculo de centro *D* e raio *PD*, e assim *PD=AD=DC=OA*. Sejam $\beta = \angle AOD = \angle ADO$ e $\varphi = \angle DAC = \angle ACD$. Aplicando o teorema do ângulo externo ao triângulo $ADC$ vemos que $\beta = 2\varphi$. Como $AC$ e $OB$ são paralelas, segue-se que $\varphi = \angle POB$ e portanto $\alpha = 3\varphi$.

A construção *neusis* usada neste problema pode ser efetuada usando a *conchóide de Nicomedes*, cuja definição é dada a seguir.

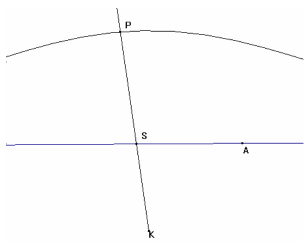


FIGURA 14

Sejam *K* um ponto fixo, o *pólo* da conchóide, e uma linha reta *SA*, denominada *diretriz* da conchóide, e um comprimento fixo *a*, chamado de *distância* da conchóide.

A conchóide é a curva gerada por *P* quando *S* se desloca sobre *SA* e o o comprimento do segmento *PS* permanece sempre igual a *a*.

Para vermos como a conchóide pode ser usada para a trisecção do ângulo proposta por Nicomedes, trace a conchóide com pólo *C*, diretriz *AB* e distância igual a duas vezes *OA*. A intersecção *C* desta conchóide com a paralela a *OB* que passa por *A* é o ponto procurado, como já foi mostrado.

A conchóide pode também ser usada na duplicação do cubo feita por Nicomedes. Com efeito, a intersecção *K* da conchóide cujo pólo é *F*, diretriz *CH* e distância *AD* com a linha reta definida por *G* e *C* é exatamente o ponto que achamos anteriormente ( compare com a FIGURA 6).

**c – A trisecção do ângulo usando a quadratriz**

Como já dissemos, a quadratriz foi utilizada em primeiro lugar para resolver o problema da trisecção do ângulo. Como acontece freqüentemente em Matemática, foi logo depois observado que ela também permite resolver o problema da quadratura do círculo. Algo análogo verificamos com a conchóide, que pode ser utilizada para resolver vários problemas de construção.

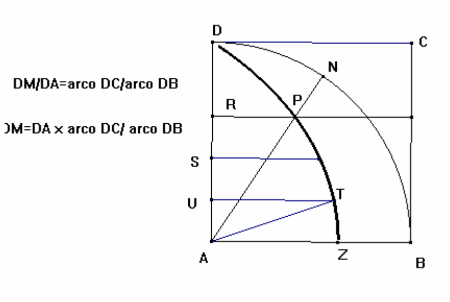


FIGURA 15

Suponha que desejamos dividir o ângulo *PAZ* em três partes iguais. Por *P*, trace a paralela a *AZ* que intercepta *AD* em *R*. Divida o segmento *AR* em três partes iguais, em *S* e *U*. Por *U* trace a paralela a *AZ* que corta a quadratriz no ponto *T*. Por proporcionalidade, o tempo gasto por *P* para chegar a *T* é igual ao tempo gasto por *R* para chegar a *U*, e é igual a 1/3 do tempo que *P* gasta para chegar a *Z*. Assim $\angle PAZ = 3 \times \angle TAZ$.

Esta é a solução mais antiga que conhecemos para o problema da trisecção do ângulo. Um tratamento mais amplo deste problema pode ser encontrado em [HEATH, 1981, vol I, pp 235-244]. Para uma discussão geral de problemas resolvidos usando construções neusis, ver [HEATH, 1953, Capítulo V, pp. c-cxxii] e um tratamento mais didático em [YATES, 1971]. Várias outras construções podem ser achadas em [TEIXEIRA, 1995, pp. 327-358]. Consultar também [DUDLEY, 1987] em que se encontram muitos processos aproximados ou exatos para trissectar um ângulo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BECKMANN, Peter. - *A history of pi*. 4th ed. Boulder, Colorado: Golem Press, 1977.

BOS, Henk J. M. – *Redefining geometrical exactness*: *Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. New York: Springer, 2001.

BUNT, Lucas N. H., JONES, Phillip S. and BEDIENT, Jack D. - *The historical roots of elementary mathematilcs*. New York: Dover, 1988.

COURANT, Richard and Herbert ROBBINS – *What is mathematics*? New York: Oxford University Press, 1996.

BKOUCHE, Rudolf et Joëlle DELATTREt - "Pourquoi la règle et le compas", in Comission Inter-IREM, *Histoire de problèmes, Histoire des Mathématiques*. Paris: -Ellipses, 1993.

DUDLEY, Underwood – *A budget of trisections*. New York: Springer, 1987.

EVES, Howard - *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

HADLOCK, Charles Robert - *Field theory and its classical problems*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978. (Carus Mathematical Monographs 18).

HEATH, T.- *A history of Greek mathematics*, two volumes. New York: Dover, 1981.

HEATH, T.- *The works of Archimedes*. New York: Dover, 1953.

KLEIN, Felix -- *Famous problems of elementary geometry*, translated by Wooster Woodruff Beman e David Eugene Smith. New York: G. E. Stechert & Co. 1930.

KNORR, Wilbur Richard – *The ancient tradition of geometric problems*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1986.

RAIGORODSKII, Andrei M – The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary. *The mathematical intelligencer*, vol 26, n. 3, 2004, pp 4-12.

SANTOS, Christovam dos - Trissecção de um ângulo. *Revista Brasileira de* Matemática. Ano 2, n. 5, jan/1931, p. 43 – 47.

SCRIBA, Christoph J. – "On the so-called `Classical Problems' in the History of Mathematics", in Ivor Grattan-Guinness (ed.) Cahiers d'Histoire & de Philosophie des Sciences, nº 21--1987, *History in mathematics education. Proceedings of a Workshop held at the University of Toronto, Canada, July- August 1983*. Paris: Belin, 1987.

SIMSON, Robert – *Elementos de Euclides. Dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo, da versão latina de Frederico Commandino, addicionados e ilustrados por Roberto Simson, Professor de Mathematica na Academia de Glasgow*. Coimbra: Real Imprensa da Universidade, 1773. Com privilégio real.

SZABO, Arpad – *L'aube des mathématiques grecques*. Paris: Vrin, 2000.

TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Traité des courbes spéciales planes et gauches*, vol III. Paris: Jacques Gabay, 1995. 1ª ed. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1909).

van der WAERDEN, B. L.- *Science Awakening* I. Third edition. Gronigen: Wolters Noordhoff.

YATES, Robert C.-*The trisection problem*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, 1971. Classics in mathematics education, vol 4.