A MATEMÁTICA NA ESCOLA INFORMATIZADA

Este minicurso tem como objetivo discutir e avaliar o potencial da tecnologia informática no dia-à-dia da sala de aula. Duas questões vão orientar a discussão: 1. por quê o uso de tecnologia informática ? ; 2. como usar tal tecnologia no processo de ensino e aprendizagem da matemática?

Serão discutidos e avaliados diferentes software[1], dando-se ênfase aqueles que apresentam recursos para práticas pedagógicas que colocam o aluno no papel de ativo aprendiz. Isto significa que estarão sob atenção os ambientes informatizados referidos na literatura como "ambientes de exploração e expressão": são ambientes que possibilitam trabalho em consonância com concepção de aprendizagem dentro de uma abordagem construtivista, a qual tem como princípio que o conhecimento é construído a partir das ações do sujeito. No contexto da matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o "fazer matemática" : experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e até demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação discursiva por parte do professor.

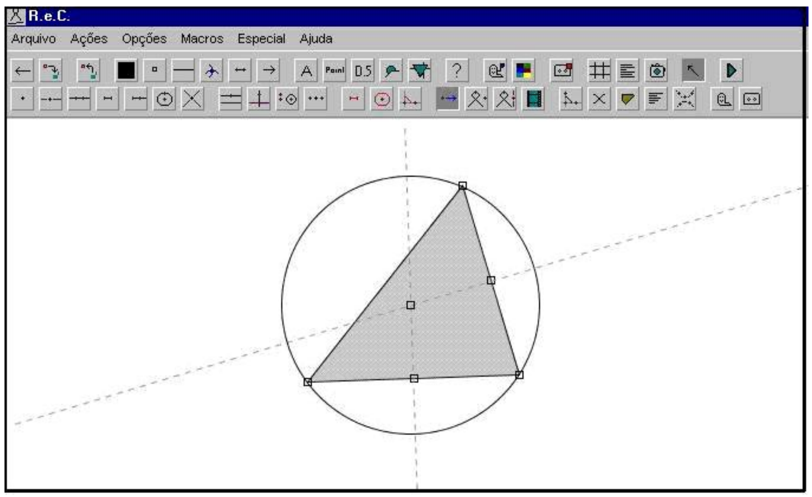
Diferentes tópicos de geometria serão explorados no software *Régua &Compasso*; curvas e regiões no plano, funções e gráficos serão tópicos explorados no software *Graphequation*. Matrizes e transformações no plano, processos recursivos e fractais serão tópicos a serem trabalhados no software *Shapari*. Além desses softwares, conforme a disponibilidade de tempo, serão apresentados outros de domínio público, de forma tal que os participantes da oficina, se professores provenientes de escolas com laboratório de informática, de imediato possam implementar, com seus alunos, trabalhos dentro do espírito discutido neste minicurso.

1 Os software estão disponíveis para download no site Educação Matemática e Novas Tecnologias, em http: // www. edumatec. mat . ufrgs. br

RÉGUA E COMPASSO

" A mais antiga das teorias MAGNÍFICAS ("SUPERB") é a geometria euclidiana, sobre a qual aprendemos alguma coisa na escola. Os antigos podem não tê-la visto como uma teoria física, mas de fato é isto que ela é : uma sublime e magnificamente acurada teoria do espaço físico e da geometria dos corpos rígidos (...) Hoje nós sabemos que a geometria euclidiana não é inteiramente acurada na descrição do mundo que habitamos. Mas isto não retira o seu caráter de MAGNÍFICA. Na escala dos metros (...) erros em tratar a geometria como euclidiana são menores do que o diâmetro de um átomo de hidrogênio."
(Penrose, The Imperor´s New Mind, 1989, p.152)

- Interface do software

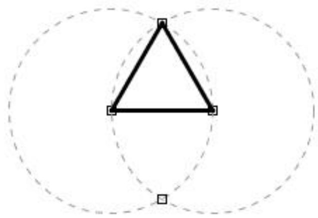


Os ambientes de geometria dinâmica — **Régua & Compasso** [2] é um exemplar — são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador. O processo de construção de objetos é feito mediante escolhas de primitivas disponibilizadas pelo programa em seus diferentes menus — pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de automatização de rotina de construção — a macroconstrução.

[2] O endereço do site de origem do software é http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/index.html

I - Primeiras construções geométricas

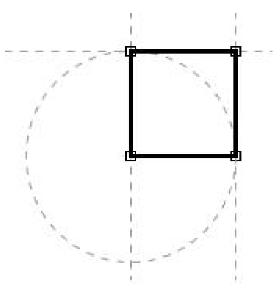
a) Construção de triângulo equilátero a partir de segmento lado.



Passos da construção: segmento, dois círculos com centros nos extremos do segmento e tendo como raio o segmento; ponto de intersecção dos círculos; completar com os dois segmentos que determinam o triângulo

Pergunta: o triângulo construído é, de fato, equilátero?

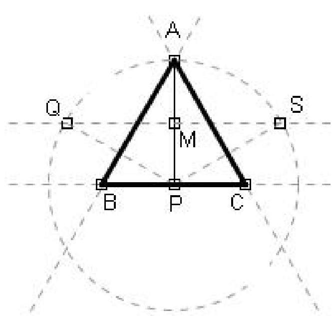
b) Construção de quadrado a partir de segmento lado.



Passos da construção: segmento, retas perpendiculares passando pelos extremos do segmento; círculo com centro em um dos extremos do segmento e passando pelo outro extremo; ponto de intersecção de círculo com perpendicular; reta paralela ao segmento inicial passando pelo ponto de intersecção; completar com os três segmentos que determinam o quadrilátero.

Pergunta: o quadrilátero construído é, de fato, um quadrado?

c) Construção de triângulo equilátero a partir de segmento altura

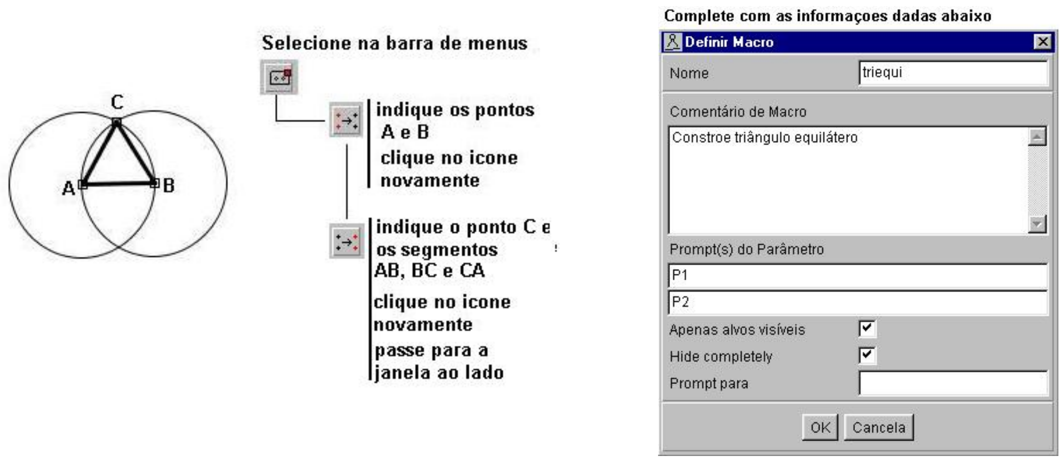


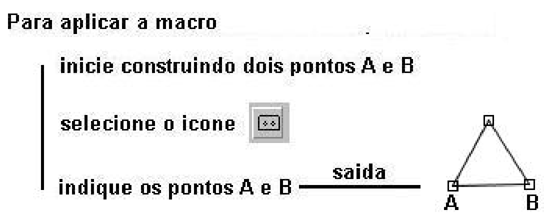
Passos da construção: segmento altura AP, círculo de centro P passando por A, M ponto médio de AP, retas r1 e r2 perpendiculares à AP passando por M e por P ; Q e S pontos de intersecção de r1 com o círculo, retas r3 e r4 perpendiculares aos segmentos QP e SP , passando por A; B e C pontos de intersecção das retas r3, r2 e r4,r2; completar com os três segmentos que determinam o triângulo.

Pergunta : o triângulo construído é, de fato, equilátero ?

II - Recursos do programa

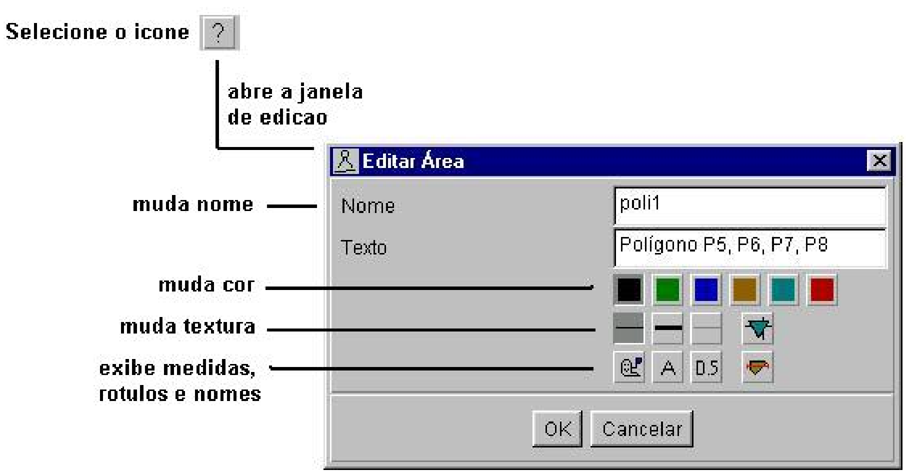
a) Criando macro para triângulo equilátero





b) Editando os objetos

Os objetos construídos podem ser editados e alguns dos efeitos disponíveis são: mudança de cor, mudança de espessura, indicação de rótulos, indicação de medidas

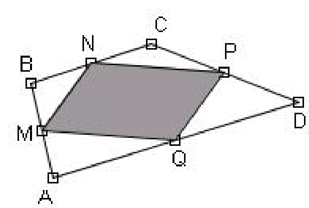


III - Geometria dedutiva

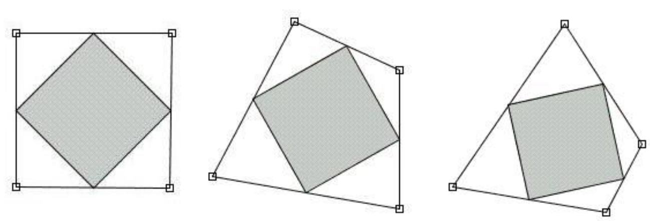
O recurso de "estabilidade do desenho sob ação de movimento" coloca em cena o propósito e a necessidade de uma demonstração: feita uma construção, mediante deslocamentos aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador — uma instância de representação do objeto — transforma-se mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações (implícitas) delas decorrentes. Ou seja, para um dado objeto ou propriedade, tem-se na tela do computador uma coleção de "desenhos em movimento" que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. Se pretende-se o estudo da geometria dedutiva, os invariantes não declarados colocam-se como "fatos a serem demonstrados" a partir dos "fatos explicitados" no processo de construção da figura. Tem-se assim, no dinamismo das construções com régua e compasso uma porta-de-entrada para o aprendizado da geometria com ênfase na argumentação dedutiva.

a) Descobrindo regularidades

Construa a figura ao lado: um quadrilátero ABCD qualquer e o quadrilátero MNPQ que tem como vértices os pontos médios dos lados de ABCD. Movimente os vértices do quadrilátero externo e identifique regularidades no quadrilátero MNPQ.

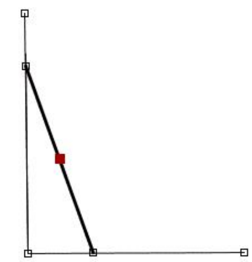


Movimentando os vértices de ABCD obtenha figuras como as que estão abaixo. Construa um quadrilátero ABCD, o mais geral possível, e de tal forma que o quadrilátero MNPQ seja sempre um quadrado. Ao final desta construção tem-se um teorema de geometria. Qual o seu enunciado?



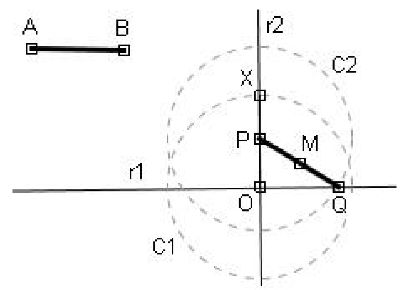
b) Trabalhando com lugar geométrico

Na figura ao lado tem-se uma escada com a extremidade superior deslizando em uma parede. Imagine qual é o lugar geométrico do ponto médio da escada. Usando o dinamismo da figura confirme sua resposta e explique o "por quê da trajetória do ponto médio" que você está vendo.



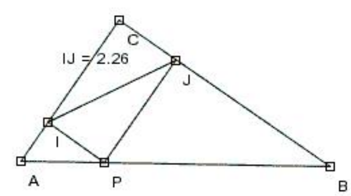
Dica para construção da figura: segmento AB, retas r1 e r2 perpendiculares com ponto de interseção O, círculo C1 de centro O e raio AB, segmento OX raio do círculo C1, ponto P sobre o segmento OX, círculo C2 de centro P e raio AB segmento PQ raio do círculo C2.

Ao final da construção tem-se P ponto móvel, mas limitado ao segmento OX. Ao movimentar P tem-se a escada deslizando na parede vertical e um correspondente movimento de M



c) O uso de medida para "pista" de conjetura

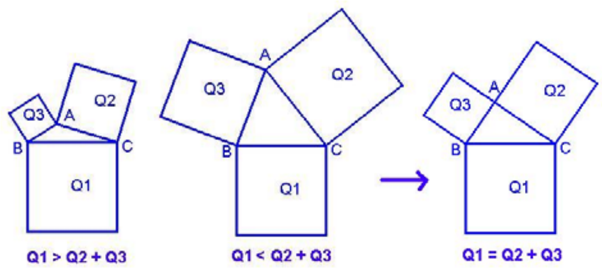
O triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em C e P é um ponto móvel na hipotenusa AB. Os segmentos PI e PJ são, respectivamente, perpendiculares aos catetos AC e BC. Construa esta figura.



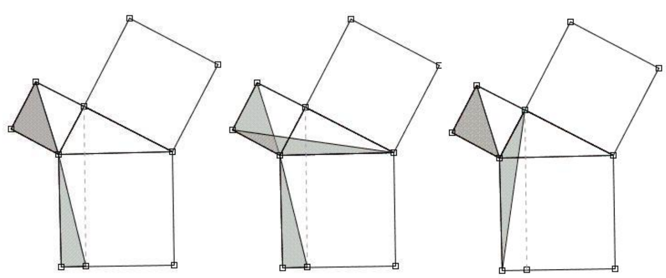
Movimente o ponto P para determinar a posição em que o comprimento de IJ é o menor possível e explique "por quê isto acontece".

d) Teorema dinâmico: a plausibilidade do teorema de Pitágoras

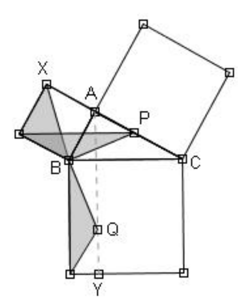
Os ambientes de geometria dinâmica permitem um novo tratamento para os enunciados clássicos da geometria: teoremas passam a ser vistos não como propriedades estáticas, mas como casos especiais de uma certa classe de desenhos em movimento. Ilustra-se este tratamento no caso do teorema de Pitágoras. Para isto construa, inicialmente, a figura "triângulo qualquer com quadrados construídos sobre os lados" (use o "macro quadrado" já construído).



Movimento aplicado ao vértice A informa sobre a relação entre áreas dos quadrados, e dada a continuidade na variação das áreas, necessariamente conclui-se sobre a igualdade $Q_1 = Q_2 + Q_3$ Trata-se agora de explicar esta igualdade entre as áreas. Na figura em movimento, construída abaixo, tem-se uma clara explicação para a igualdade: triângulos de área constante "deslizando" em retas paralelas, rotação de triângulo e novo deslize em retas paralelas.



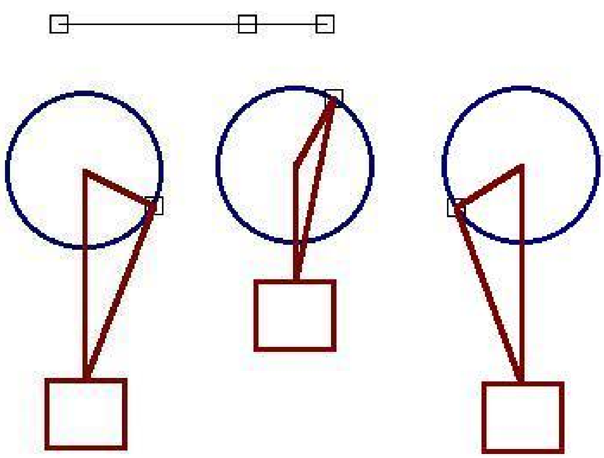
Dica para construção da figura: construir os pontos P e Q livres, respectivamente, sobre os segmentos XC e AY. Completar os triângulos com vértice P e Q. Ao movimentar-se os pontos P e Q os triângulos mudam de formamas mantém as áreas e isto porque continuam com a mesma base (lados dos quadrados) e a mesma altura (dada pelo segmento distância entre as retas paralelas que ão suportes dos lado dos quadrados construídos sobre os catetos.



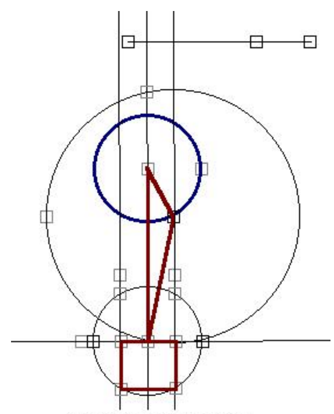
III- Geometria prática / lúdica

O mundo que nos rodeia está repleto de situações em que a geometria está presente, e mais, de situações em que formas geométricas se apresentam em movimento. A modelação destas “formas em movimento”, quer sejam de caráter prático ou lúdico, apresenta-se como uma interessante atividade para os alunos que estão iniciando o estudo da geometria.

Para construir um “mecanismo” primeiro deve-se pensar na construção do seu “esqueleto” geométrico, e depois no acabamento final. Ilustramos esta possibilidade de uso da geometria dinâmica através da modelação de um pistão.



PISTÃO

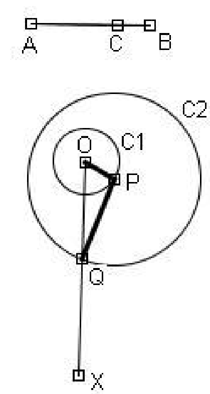


ESQUELETO PISTÃO

<u>Dica para construção do movimento do pistão</u> :

1. construir segmento AB e ponto C sobre este segmento
2. construir círculo C1 de centro O e raio BC
3. construir ponto P sobre o círculo C1
4. construir segmento OX
5. construir círculo C2 de centro P e raio AC
6. construir ponto Q interseção de C2 com segmento OX
7. construir segmentos OP e PQ, as hastes do pistão

Ao final da construção, o movimento do ponto P acarreta o movimento de Q. A construção segue com os procedimentos que constróem o retângulo "êmbolo" do pistão. Aqui deve se ter o cuidado de usar o segmento AB como referência para que ao mudar-se o tamanho das hastes, mude também o tamanho do êmbolo, preservando-se a proporcionalidade entre os elemento que compõem a figura .



.esqueleto do movimento do pistao

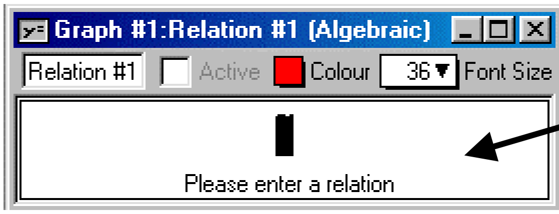
GRAFEQ

Com o software **GrafEq** [3] pode-se "desenhar" paisagens, isso através de representação gráfica de funções e relações. Para construir uma paisagem pensamos em certas "formas" e a elas devemos associar relações matemáticas. Tomando como ponto de partida uma função bastante simples, aplicamos operações algébricas sobre sua expressão, produzindo diferentes transformações no seu gráfico – translações, reflexões, dilatações, contrações – de modo a obter a "forma" desejada. Exemplificando: na paisagem abaixo as montanhas foram obtidas através de transformações no gráfico de $y = x^2$; o mar através de transformações em $y = \sin x$; os raios do sol como resultado de transformação sobre a reta $y = x$ **,** etc ...

[3] O endereço do site de origem do software é http://www.peda.com/grafeq/

I – Conhecendo o Graphequation

- Ao abrir o programa tem-se a janela:

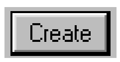


Digite a desigualdade:

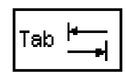
$$y < 2x + 1$$

E dê **Enter !**

Feito isto, aparece uma janela **GRAPH#1 : CREATE VIEW** .

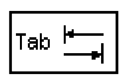
Clique em 

e observe a região do plano que é desenhada

- Volte para a janela **Graph #1: Relation #1**, para isto clicando o mouse sobre a janela; posicione o cursor no final da desigualdade digitada e aperte a tecla 

Na segunda linha disponibilizada na janela digite **$-3 < x < 3$** e dê **Enter**.

Observe o que acontece com a região delimitada anteriormente.

- Volte para a janela **Graph #1: Relation #1**, posicione o cursor no final da equação digitada e aperte novamente a tecla 

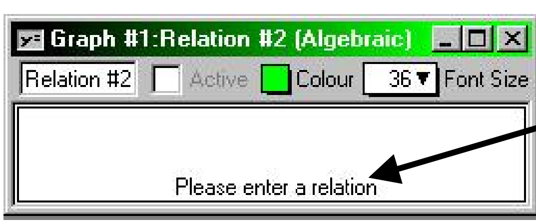
Na terceira linha digite **$y > -x - 8$** e dê **Enter**. Observe o que acontece com a região.

- Agora vá em 

e selecione 

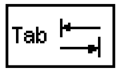
.

Na nova janela de relações digite:



$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 9$$

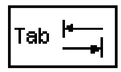
e dê **Enter**. Observe o que acontece.

Volte para a janela **Graph #1: Relation #2**, posicione o cursor no final da equação digitada e aperte a tecla 

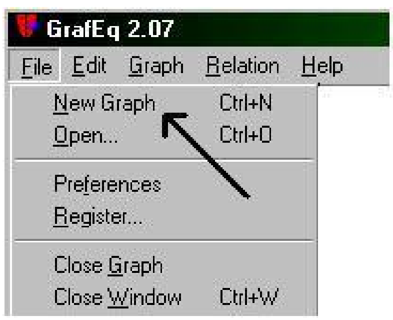
Na segunda linha digite **y > 5** e dê **Enter**. Observe o que acontece.

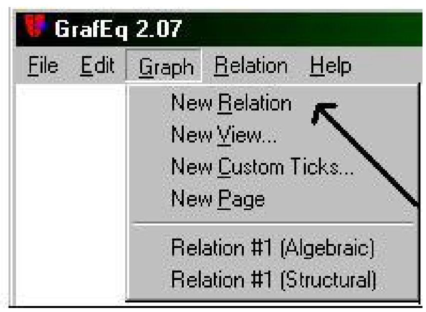
- **Resumindo os procedimentos**

Para iniciar um desenho seleciona-se **File/New Graph**

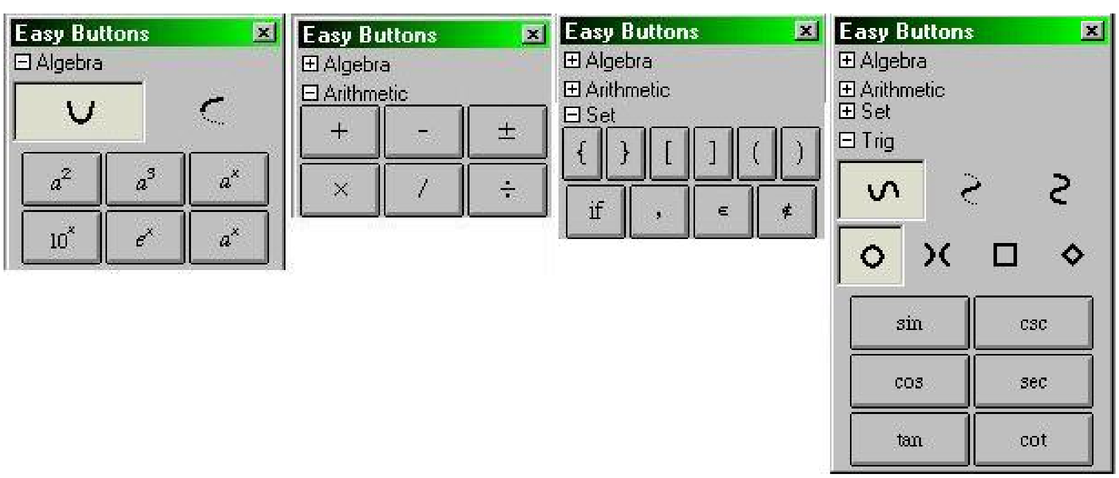
Na janela **Graph#...: Relation#1** digita-se a relação desejada; nesta janela também pode-se digitar outras relações, quando quer-se fazer intersecção de regiões, e para isto deve-se usar a tecla 

Para acrescentar novas relações, na mesma janela gráfica, seleciona-se **Graph / New Relation**



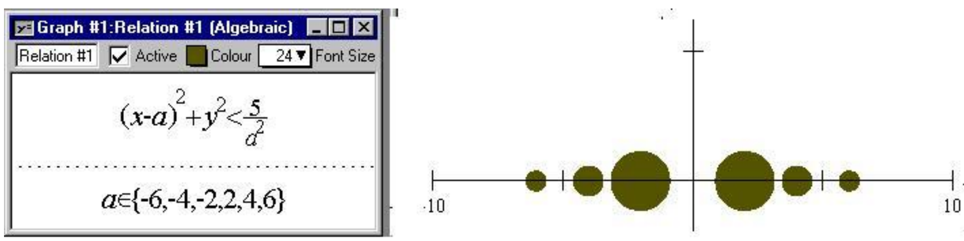


Na janela **Easy Buttons** tem-se recursos para digitar as relações; vamos usar principalmente as opções **Algebra, Arithmetic, Set e Trig**

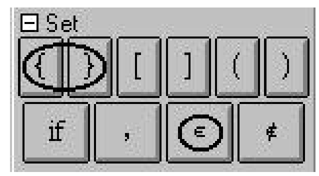


- **Recursos adicionais**

a) observe o efeito de desenho, obtido com o uso de relações com parâmetro:

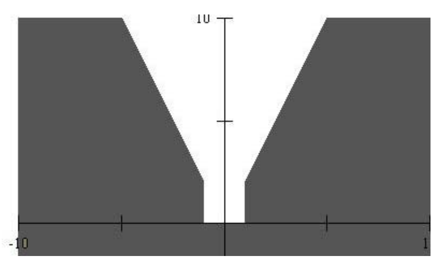


Obs: para escrever $a\in\{-6,-4,-2,2,4,6\}$
utilizam-se os símbolos disponíveis no **Easy Buttons /Set**

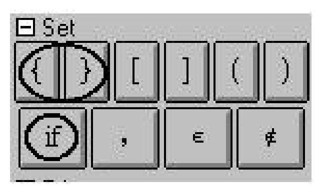


b) observe o efeito de desenho obtido com o uso do **"if ....then"**

$$y<\begin{Bmatrix} 2\cdot x & \text{if} & x>1 \\ 0 & \text{if} & -1<x<1 \\ -2\cdot x & \text{if} & x<-1 \end{Bmatrix}$$



Obs: para o recurso **"if ... then"** usa-se o símbolo "chave" disponível em **EasyButton/Set** e a troca de linha é feita com a tecla de "vírgula" .



II – Desenhando a paisagem

- selecione **File/New Graph**

- para desenhar as montanhas use as relações de desigualdade

$$y < a\,(x-b)^2 + c$$

escolhendo com cuidado os valores de **a**, **b** e **c**. Para cada montanha use uma nova janela de **New Relation.** Construa montanhas com diferentes tons de verde.

- para desenhar o mar use as relações de desigualdade

$$\mathbf{y < a \,.\, \sin\,(\,b.\,x)\ + c}$$

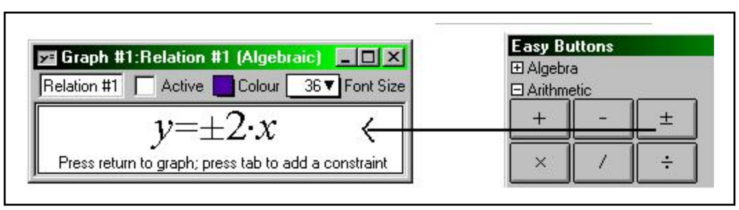
com diferentes valores para **a**, **b** e **c** e diferentes tons de azul. O uso do valor absoluto na desigualdade acima também produz um efeito interessante para as ondas do mar.

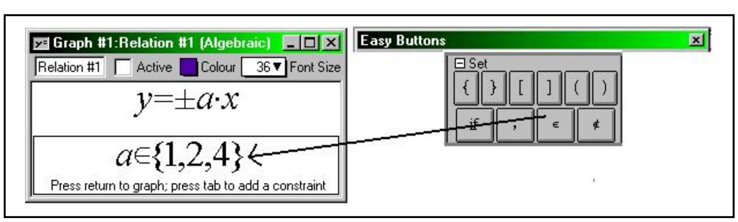
Atenção: Para digitar o valor absoluto na desigualdade y < | **a sin (b. x) + d |** use as teclas Shift+(barra vertical)

- para desenhar o "centro" do sol, escolha convenientemente os parâmetros **a**, **b** e **r** na desigualdade:

$$\mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2}$$

- para desenhar os raios do sol use recursos do software, indicados abaixo em situação de retas passando pela origem. Observe que os "raios do sol" são segmentos contidos em retas que concorrem no centro do sol.



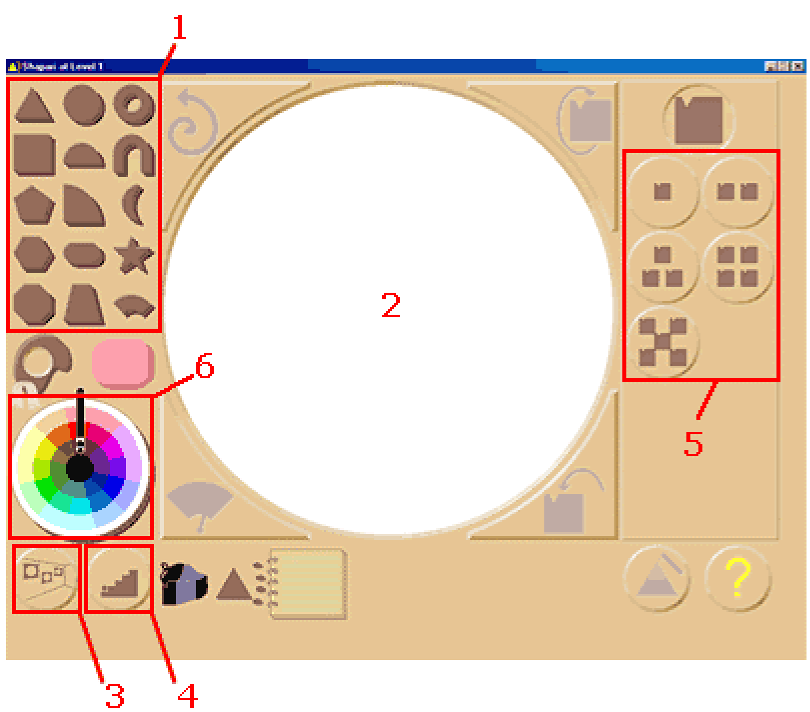


SHAPARI

O **Shapari**[4] é um software para trabalhar com transformações geométricas no plano, processos recursivos e fractais. Pode-se trabalhar em diferentes níveis de exigência matemática: no nível mais elementar é usando, com um entendimento bastante intuitivo, as transformações que já estão prontas no software e produzindo efeitos visuais interessantes; no nível mais avançado é construindo novas transformações e nisso é preciso um conhecimento básico de geometria vetorial.

ATIVIDADE 1 : Brincando com as transformações

Esta atividade inicial com o Shapari tem como principal objetivo a familiarização com as transformações que já estão disponíveis no software. Abaixo tem-se a sua tela inicial, que vai ser referida como "tela de desenho". Acompanhe as informações.



1- Você pode escolher qualquer uma desta figuras para transformar. Clicando em uma delas, ela aparecerá na área da tela que está destacada acima (área **2**).

4 O endereço do site de origem do software é http://www.spelunkcomputing.com/

2- Esta é a parte da tela onde sempre estará exposta a figura com a qual você está trabalhando.

3- Clicando neste botão você poderá salvar a figura que está na tela em uma galeria de trabalhos.

4- Clicando aqui você poderá selecionar um nível de trabalho com o software. O nível padrão na instalação do Shapari é o nível 1. Neste nível, a área de trabalho do software é a que está acima. A diferença entre um nível e outro é, basicamente, o número de transformações que estão prontas no software (as transformações estão destacadas na área **5**). Além disso, nos níveis 4 e 5 você tem a possibilidade de criar suas próprias transformações geométricas.

5- Estas são as transformações geométricas que fazem parte do nível 1. Você pode aplicar qualquer uma delas à figura que está na tela simplesmente clicando sobre a transformação desejada.

6- Este é o disco com as cores disponíveis para pintar as figuras. Para mudar as cores de uma figura da tela basta clicar sobre a cor escolhida e depois clicar sobre o local a ser modificado na tela.

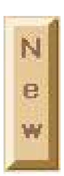
ATIVIDADE 2 : Criando novas transformações

As transformações prontas do Shapari estão sempre na direita da "tela de desenho" e quanto maior o nível de funcionamento do software maior o número de transformações disponíveis. A partir do nível 4 tem-se 5 blocos de transformações diferentes, que estão divididas de acordo com a sua complexidade. Para aplicá-las basta selecionar o grupo e depois clicar na transformação desejada.

Para criar novas transformações é necessário estar no nível 4 ou 5 de funcionamento do software.

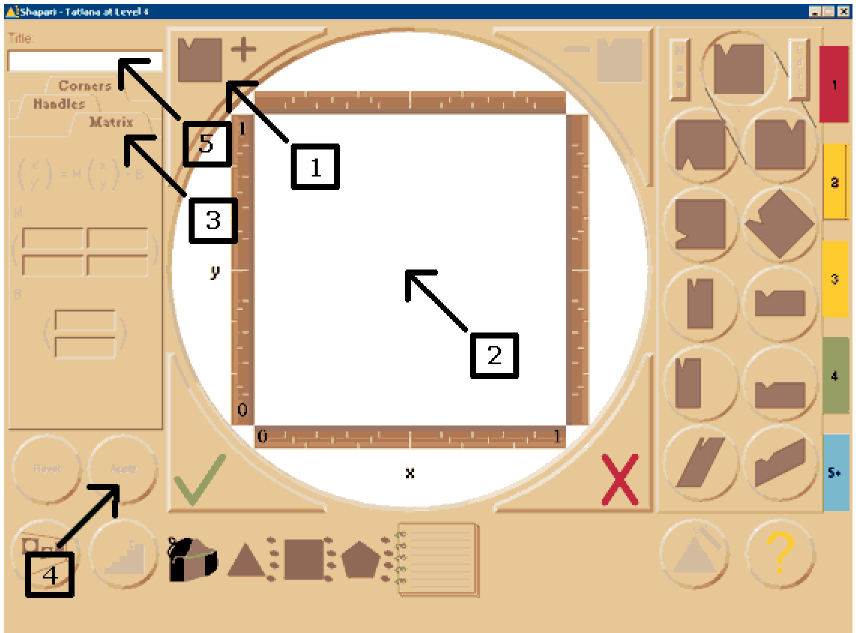
A seleção do nível é feita na "tela de desenho" do software através do botão indicado à esquerda. A validação da escolha de nível é feita através do botão indicado á direita

.



Para iniciar a criação de uma transformação, na "tela de desenho" clica-se no botão "New", que se encontra no canto superior direito. Para modificar uma transformação já construída , clica-se no botão "Edit". Desta forma entra-se em uma segunda tela do software, a "tela de edição".

Acompanhe, abaixo, as indicações de uso da "tela de edição" :



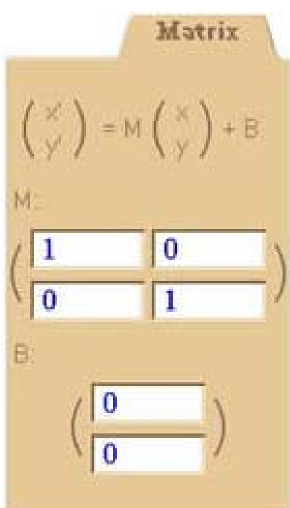
1 - Clicando neste botão você estará inserindo um quadrado básico Q de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1) sobre o qual vai ser aplicada a transformação a ser definida.

2 - Este é o local onde você visualizará a transformação que está construindo.

3 - Aqui são inseridas as entradas para as matrizes M e B que vão definir a transformação.

4 - Depois de escrever a matriz de transformação, você clicará neste botão para aplicá-la ao quadrado básico Q.

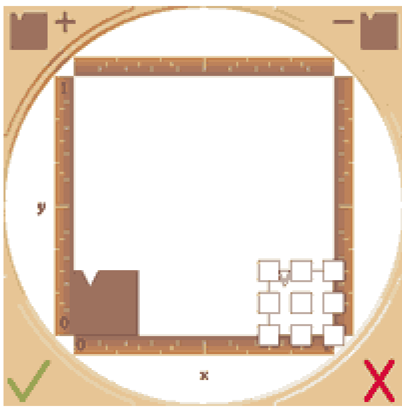
5 - Nesta janela pode-se nomear a transformação.



Uma vez inserido o quadrado Q, ao clicar-se em "Matrix", no lado esquerdo da tela, tem-se disponível as entradas da matriz M para definir-se homotetias, rotações, cisalhamentos. A matriz coluna B é usada para definir movimentos de translação. Preenchidas as entradas, valide no botão "Apply". Volta-se para a janela de desenho com o botão verde de validação. A transformação definida estará disponível nesta tela.

Em uma mesma tela de edição pode-se trabalhar com diferentes transformações. Cada nova transformação começa com a inserção de um novo quadrado básico. Abaixo tem-se o efeito de duas transfromações construídas na mesma janela de edição onde foram usadas, respectivamente, as matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

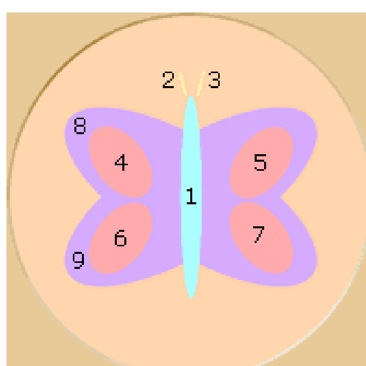


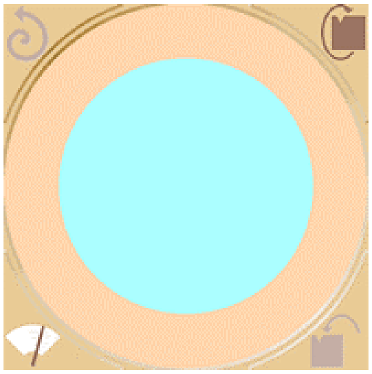
Crie outras transformações !

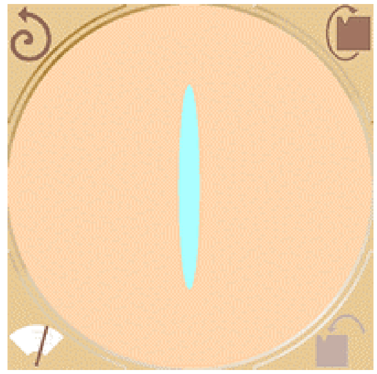
ATIVIDADE 3: Criando borboletas

Nesta atividade apresenta-se, de forma bastante esquemática , a criação de uma "família de borboletas".

3.1 - A construção da primeira borboleta : algumas de suas partes

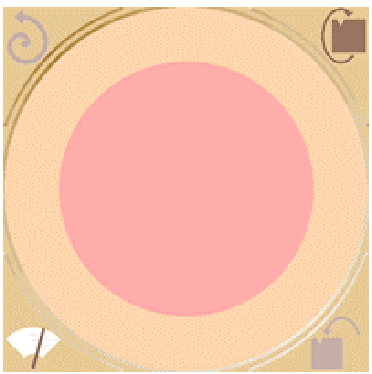


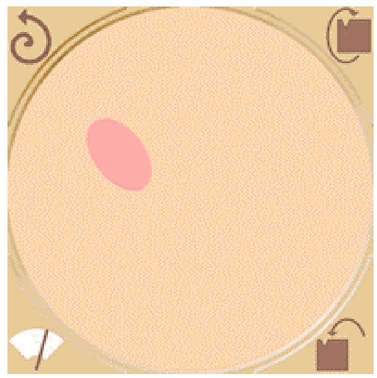




1- Corpo

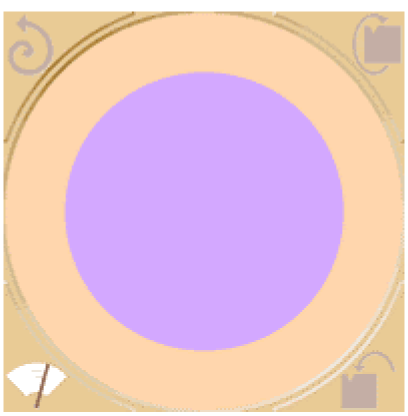
$$M = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0,46 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

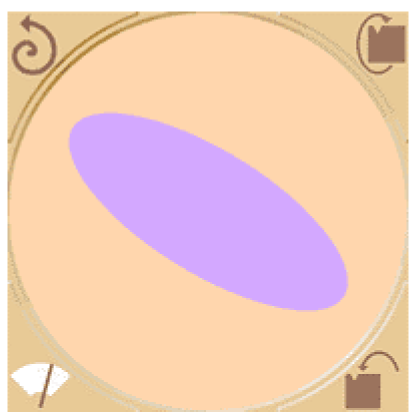




2 - Asa superior esquerda

$$M = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ -0,125 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,575 \end{bmatrix}$$

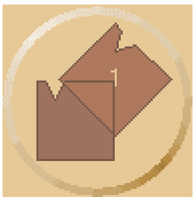
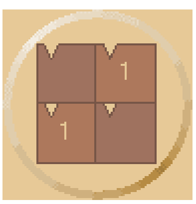
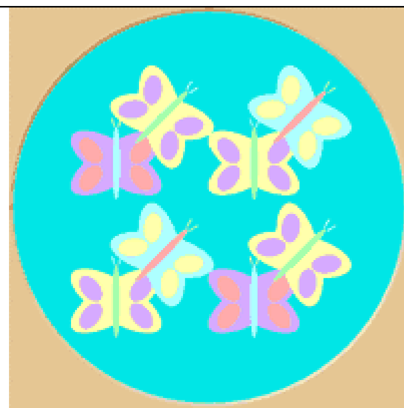




8- Asa superior esquerda e inferior direita

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

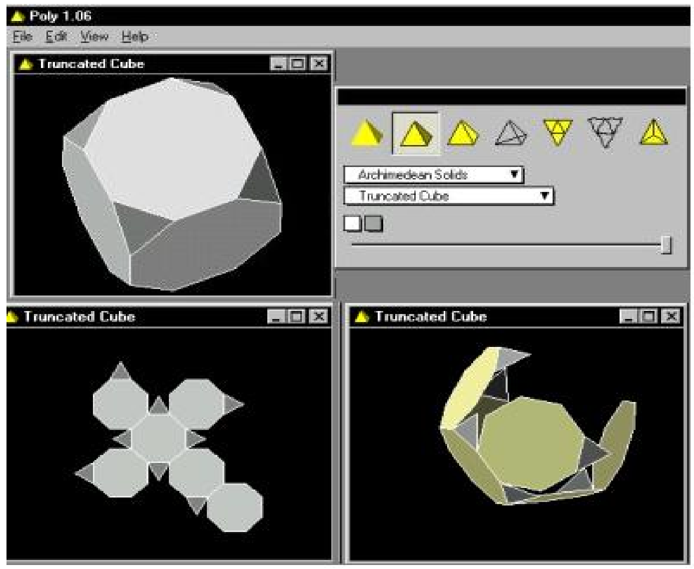
3.2 - A construção da família de borboletas

	
1 - Duplicando a borboleta	
	
2 - Quadruplicando a dupla de borboletas	

3.3 – Faça a sua criação !

POLY

O software **Poly**[5] permite explorar famílias de poliedros convexos: os platônicos, os arquime-dianos, os prismas e antiprismas, os poliedros duais. É possível aplicar movimento aos poliedros e também planificá-los



As diferentes famílias:

- **platônicos**: são poliedros cujas faces são polígonos regulares, sempre do mesmo tipo, e em cada vértice tem-se o mesmo número de arestas.

- **arquimedianos**: são poliedros que tem como faces polígonos regulares, não necessariamente todos iguais, e com a propriedade adicional – são uniformes, isto é, dados quaisquer dois vértices V e V´ do poliedro, sempre é possível aplicar um movimento ao poliedro de forma tal que V se coloca na posição que estava V´ e os demais vértices também ocupam as posições correspondentes aos vértices do poliedro, antes de ser aplicado o movimento. Por exemplo, no caso do cubo, os movimentos são: rotação em torno de eixo determinado pelos vértices V e V´ ou reflexão em relação ao plano perpendicular a este eixo. De forma intuitiva, num poliedro arquimediano, em cada vértice a distribuição de faces é a mesma; mas tal propriedade não caracteriza os poliedros arquimedianos, o que se constata com o poliedro de Johnson de no. 37(classe adiante), pois este verifica esta propriedade, mas não é uniforme.

[5] O endereço do site de origem do software é http://www.peda.com/poly/

A classe dos arquimedianos tem um de 18 poliedros, incluíndo-se aqui 5 sólidos platônicos. Muitos dos poliedros arquimedianos são obtidos através de "cortes" nos poliedros platônicos - são os que recebem o nome de "truncated (truncados)".

- **prismas e anti-prismas regulares**: além dos poliedros platônicos e arquimedianos, os prismas e anti-prismas completam a família de poliedreos convexos que tem como faces polígonos regulares e que são uniformes. Os prismas tem duas faces congruentes dispostas em planos paralelos e de tal forma que as arestas unindo vértice a vértice, nesta faces, formam as demais faces quadradadas; os anti-prismas tem duas faces congruentes dispostas em planos paralelos, mas com um giro tal que os vértices de uma delas se localizam no "meio" de vértices consecutivos da outra, e são unidos por arestas, formando as demais faces triangulares equiláteras.

- **sólidos de Johnson**[6]: são poliedros convexos que tem como faces polígonos regulares, mas não são uniformes. Esta classificação foi obtida por Norman Johnson e apresenta um total de 92 poliedros.

- **sólidos catalan**: são os poliedros duais dos arquimedianos. O dual de um tal poliedro tem como vértices os pontos centrais de suas faces, ligados por arestas sempre que os vértices do dual pertencem a faces adjacentes do poliedro.

- **dipirâmides e deltoedros**: são os poliedros duais , respectivamente, dos prismas e anti-prismas.

[6] Para melhor entender os procedimentos de construção dos poliedros de Johnson, visitar site em http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/johnsonp.htm