
# RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO ELETRÔNICO COM CABRI GÉOMÈTRE II[1]

*Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano*[2]

**RESUMO**

Motivado pelas construções dos "macros operações" onde todas as operações elementares da álgebra para os números *a* e *b* podem realizar-se com régua e compasso eletrônico, (Sanguino, 2003a, 649). Pretendemos neste trabalho aplicar os resultados anteriores na solução de alguns problemas: equação de segundo grau, sistema de equações, desta forma mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria e álgebra.

**Palavras chave:** Cabri Géomètre II, construção com régua e compasso, equação de segundo grau, sistemas de equações, ensino de matemática, álgebra.

**ABSTRACT**

Motivated for the constructions of the macros operations, where all the elementary operations of algebra for numbers *a* and b can become realizarce with ruler and electronic compass, (Sanguino, 2003a, 649). We intend in this work to apply the previous results in the solution of some problems: equation of second degree, system of equations, this form to show to its importance as instrument auxiliary in the learning of Geometry and algebra.

**Words key**: Cabri Geometry II, construction with ruler and compass, equation of second degree, systems of equations, education of mathematics, algebra.

## 1. INTRODUÇÃO

A introdução da informática no processo de ensino e aprendizagem depende da existência de professores preparados para lidar com a crescente inserção da tecnologia nas escolas, tanto do ponto de vista do preparo técnico, quanto do preparo pedagógico. Não é suficiente ter o domínio da tecnologia ou do software a ser utilizado. É preciso saber como usar essa tecnologia a favor da aprendizagem.

Trabalhar dessa forma implica que o professor precisa estar preparado: Ter domínio dos conceitos de sua área e conhecer o programa com o qual trabalhará com seus alunos.

Pretendemos mostrar aos professores de ensino médio e alunos de licenciatura que as construções são instrumento de grande utilidade no ensino da geometria e da álgebra, explorando amplamente um software de construção, que oferece "régua e compasso eletrônicos" que nos permitirá recriar

---

[1] Trabalho apresentado na sessão de Informática na Matemática. Formato mini-curso: Dia 27, 28 e 29. Hora 16:00 às 18:00.

[2] Doutor em Matemática pelo IM-UFRJ. Grupo de Ensino e Pesquisas em Educação Matemática. GEPEM, Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – Unidade Sudoeste - Campus Pato Branco - PR. E-mail: srichardwsb@yahoo.com.br.

dinamicamente atividades que já foram realizados antigamente. Devemos lembrar que estas construções tiveram importância no desenvolvimento da Matemática.

Conta a lenda que, em 429 a.C., os atenienses dirigiram-se ao célebre oráculo de Apolo na ilha de Delfos, suplicando a graça de fazer cessar uma peste que então assolava a sua cidade. O oráculo respondeu, exigindo que fosse construído um outro altar no templo da divindade, com o dobro do tamanho do que lá existia. Os atenienses construíram então o novo altar dobrando a aresta do antigo (em forma de um cubo), o que, naturalmente, multiplicou o volume do altar por oito (a nova aresta, claro, deveria ser $\sqrt[3]{2}$ vezes a anterior). Devido a esta falha, a peste continuou e dizimou um grande número de atenienses. Assim, o problema de “duplicar o cubo” ficou conhecido como o “problema de Delfos”.

As construções com régua e compasso já aparecem no século *V* a.C. (época dos pitagóricos), e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Na Grécia antiga, a palavra número era usada só para os inteiros. Na época de Euclides (século *III* a.C.) uma nova idéia apareceu. As grandezas associadas a segmentos de reta.

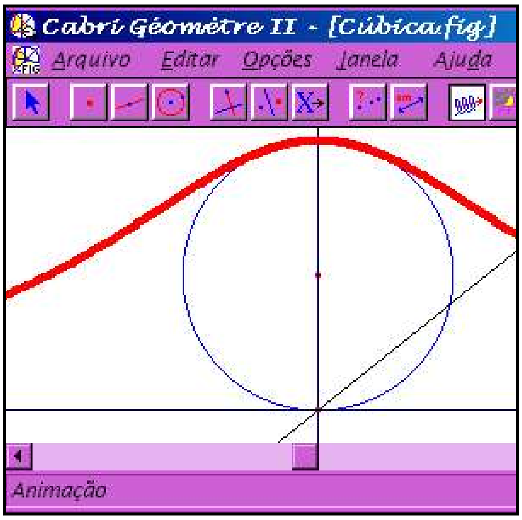
Assim, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Nasce então nesse período uma nova álgebra, completamente geométrica, onde a palavra *resolve*r era sinônimo de *construir.*

## 2. CABRI GÉOMÈTRE II

O Cabri Géomètre II permite construir e explorar objetos geométricos interativamente. Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain desenvolveram o Cabri Géomètre II no “Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG)”, um laboratório de pesquisa da “Université Joseph Fourier” em Grenoble, França, em cooperação com o “Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS)” e a “Texas Instruments”.

Cabri é uma sigla composta pelas iniciais dos termos: **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteratif. Uma tradução livre é cadernos de rascunhos interativos. O software é apresentado com um menu e uma lista desdobrável de 11 botões. Esta lista é auto instrutiva, no sentido de auxiliar as tarefas que executa. (Sanguino, 2001, 70).

**2.1 Tela do Cabri Géomètre II:** A ilustração abaixo mostra a janela do Cabri Géomètre II. Esta janela contém os elementos essenciais do software Cabri Géomètre II.



## 3. CONSTRUÇÕES SIMPLES COM RÉGUA E COMPASSO

Antes de estudar os problemas de construção com régua e compasso, faremos algumas considerações.

(1) Quando falamos de uma régua e compasso, queremos dizer uma “régua ideal” e um “compasso ideal”, que traçam linhas retas e círculos exatamente. Onde a grossura das marcas de lápis e as aproximações incluídas no desenho não interessam.

(2) A régua euclidiana não é graduada. Podemos usar para traçar uma linha através de dois pontos dados e unicamente para isso. Não pode ser usada para medir distâncias entre pontos, nem para dizer se dois segmentos são congruentes.

(3) O compasso euclidiano pode ser usado do seguinte modo: Dado um ponto P e um ponto Q (no plano), podemos traçar o círculo que tem centro em P e que contém o ponto Q, ou seja, esta é a única maneira de ser usado. Isto é, dado um terceiro ponto P’, não se permite mover a agulha do compasso a P’ e logo traçar o círculo com centro em P’ e raio PQ. Esta é a razão pelo que chamamos “*pegadiça*”, ou seja, não se pode usar o compasso como se fosse compasso de ponta.

(4) Ao estudar construções com régua e compasso não tentamos construir os fundamentos da geometria.

(5) Quando dizemos que uma linha está dada queremos dizer que foi dado pelo menos dois pontos da linha.

Note o leitor que uma vez que tenhamos realizado as construções mais simples, (Sanguino, 2001, 71) somos livres de esquecer a propriedade “*pegadiça*” de nosso compasso. O ponto é que a régua e o compasso, em combinação, nos proporcionam, de fato, um compasso de pontas.

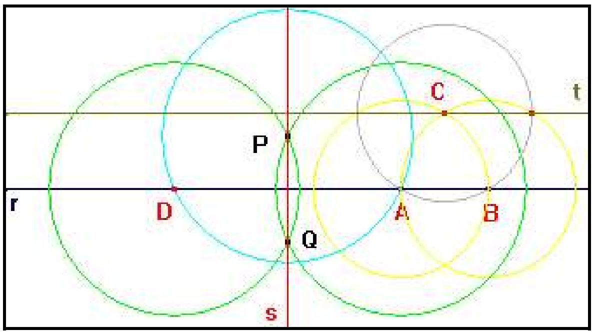



Figura. Construções simples: dada uma reta *r*, traçar uma paralela *t* ou uma perpendicular *s*.

Portanto temos liberdade para usar diretamente os seguintes botões do Cabri.


Figura. Botão que será o compasso eletrônico


Figura. Botão que será a régua eletrônica


Figura. Botões que podemos usar livremente.

## 4. CONSTRUÇÕES DOS MACROS DAS OPERAÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção vamos construir os “Macros” das operações elementares da álgebra, usando régua e compasso eletrônico, estas são: (a) Macro da soma de dois segmentos; (b) Macro do inverso de um segmento; (c) Macro do produto de segmentos; (d) Macro da raiz quadrada de um segmento. Veja (Sanguino, 2003a, 649).

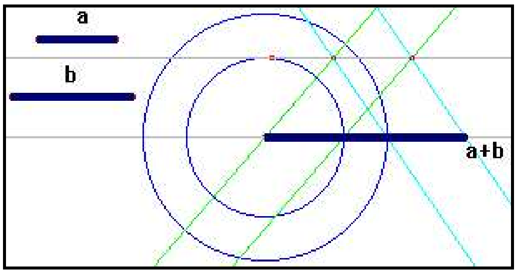



Figura 1. Macro Soma.

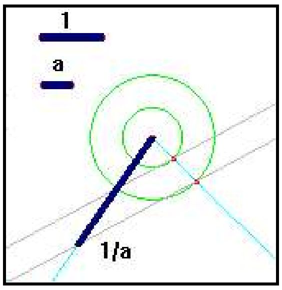



Figura 2. Macro Inverso.

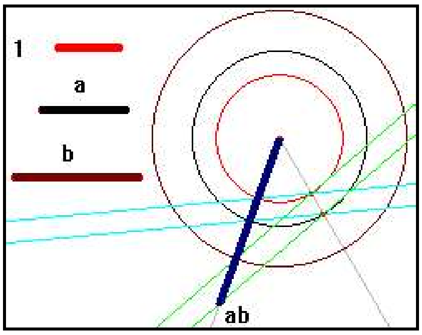



Figura 3. Macro produto.

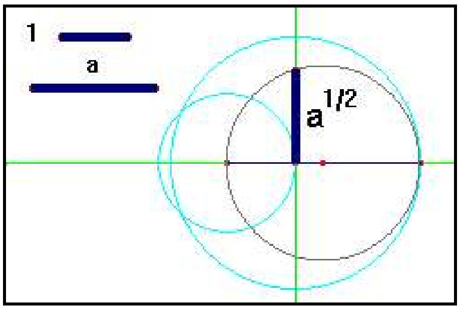



Figura 4. Macro raiz.

Observamos que o quociente de segmentos é realizado usando Macro do inverso de um segmento, logo usando o Macro do produto de segmentos.

Faremos a seguinte consideração: se $a$ e $b$ são segmentos, o que significa a expressão $a/b$? Certamente não é um segmento porque se $a/b=c$ então $a=bc$ e um segmento não é igual a uma área? Portanto estabelecemos um segmento unitário, quer dizer, um segmento a que associaremos o número 1, assim a expressão $a/b$ poderá ser representada por um segmento.

Dizemos então que estando estabelecido um segmento unitário, a expressão $x=a/b$ é *construtíve*l. Da mesma forma, expressões como $1/a$, $a^2$, e $\sqrt{a}$ que antes não faziam sentido, poderão ser construídas, ou seja, poderão ser representadas por outros segmentos.

## 5. CONSTRUÇÃO DOS MACROS SOBRE UM SISTEMA DE COORDENADAS

Determinamos na seção anterior que com régua e compasso podemos: somar, multiplicar, dividir e obter raízes quadradas de segmentos. Consideremos agora um sistema de coordenadas no plano.

Desejamos conhecer que ponto podemos determinar com régua e compasso dados os pontos com coordenadas 1, *a* e *b* sobre o eixo *x,* (figura 5).

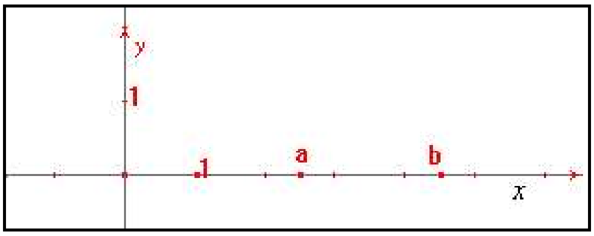


Figura 5. Sistema de coordenada

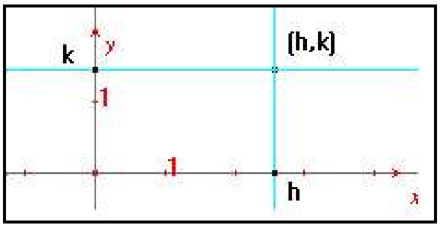
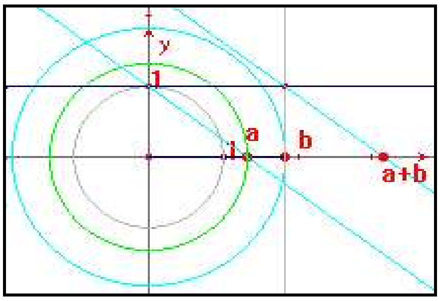


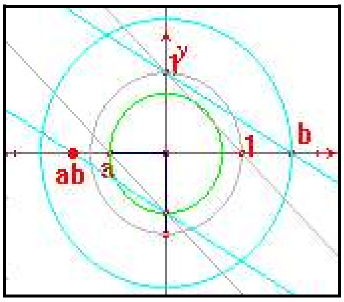
Figura 6.

Observamos que os números negativos não foram considerados na figura 5. Mas *a* e *b* podem ser negativos, pois isto não é problema, se podemos traçar o ponto com coordenada *b*, então podemos traçar o ponto com coordenada *-b*, usando o Macro produto do segmento unitário negativo com *b.* Portanto podemos traçar *b-a*, usando Macro produto para obter *-a,* logo Macro soma, *a-b,* e assim sucessivamente *(-b)a* e b*(-a).*

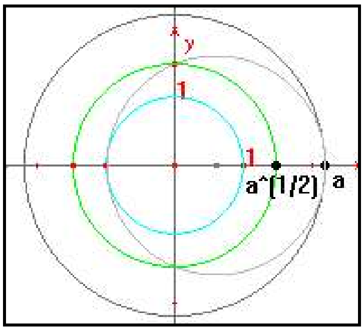
A seguir apresentaremos os "Macros" da seção anterior, veja (Sanguino, 2003b), construídas sobre um sistema de coordenadas as quais serão usados na seção seguinte.



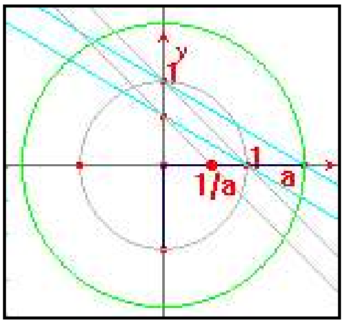
Macro soma.



Macro produto



Macro raiz quadrada



Macro inverso

Isto significa que com régua e compasso podemos realizar todas as operações descritas nos postulados de um corpo ordenado de Euclides. Em todos os casos onde estas operações sejam algebricamente possíveis. Daqui a diante, quando falamos de "*traçar um número*", entendemos traçar o ponto correspondente sobre o eixo *x*.

Portanto, assim podemos traçar *h* e *k*, como o ponto *(h,k)* no plano coordenado simplesmente construíndo perpendiculares como na figura 6, obtendo sua interseção e inversamente, se *P(h,k)* está dado, podemos traçar perpendiculares aos eixos.

Por esta razão, em muitos casos podemos resolver problemas algébricos efetuando construções com régua e compasso que de outro modo seriam verdadeiramente difíceis. Neste trabalho nós resolvemos os seguintes problemas usando os Macros construídos sobre um sistema de coordenadas.

## 5.1. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

**Problema 1.** Sejam os pontos com coordenadas *a, b, c* sobre o eixo *x*, com $b^2 - 4ac > 0$. Desejamos traçar, com régua e compasso eletrônico, as raízes $x_1$ e $x_2$ da equação $ax^2+bx+c=0$.

Algebricamente resolvemos o problema da seguinte forma, se $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \text{ logo}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observamos que existe $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se $b^2 - 4ac > 0$.

Para resolver o problema 1 usando régua e compasso, traçamos os pontos de coordenadas *a, b* e *c* sobre o eixo *x*. Notamos que a origem e estes pontos determinam segmentos, desta forma podemos construir usando régua e compasso. Iniciamos usando o Macro do produto de segmentos, do quadrado de um segmento, da soma de segmentos, da raiz de um segmento, desta forma construímos $\sqrt{b^2 - 4ac}$, logo usamos Macro da soma de segmentos e do inverso de um segmento e construímos as raízes como se pode observar na figura seguinte.

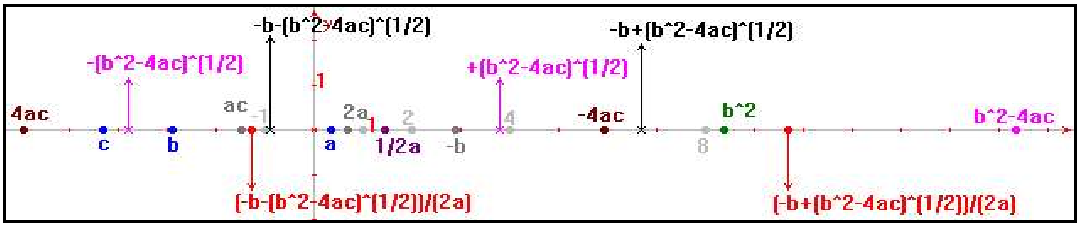



Figura 7. Construção de $-b$, $-\sqrt{b^2 - 4ac}$, $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ e as raízes $x_1$ e $x_2$.

Verifiquemos agora a validade, considerando sempre que $b^2-4ac>0$:

Tomemos o caso $b \neq 0$. Não existe as raízes $x_1$ e $x_2$ quando: $a = 0$

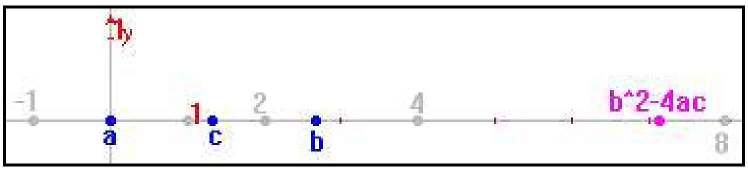



Figura 8. $a = 0, \quad c > 0, \quad b > 0$.

Existe as raízes $x_1$ e $x_2$ quando: $a < 0$ e $a > 0$

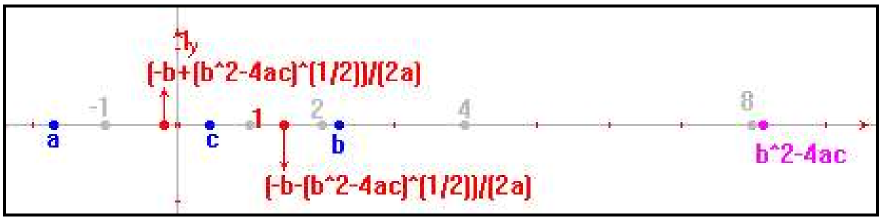



Figura 9. $a < 0, \quad c > 0, \quad b > 0$.

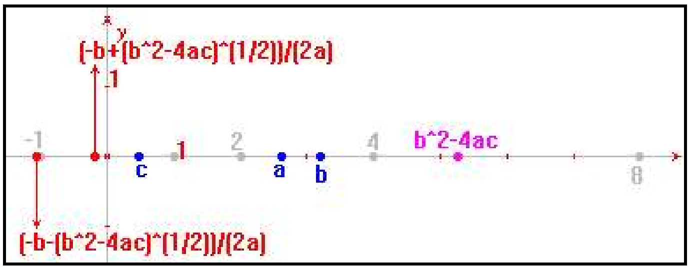



Figura 10. $a > 0, \quad c > 0, \quad b > 0$.

Também existe as raízes $x_1$ e $x_2$ quando: $c < 0$

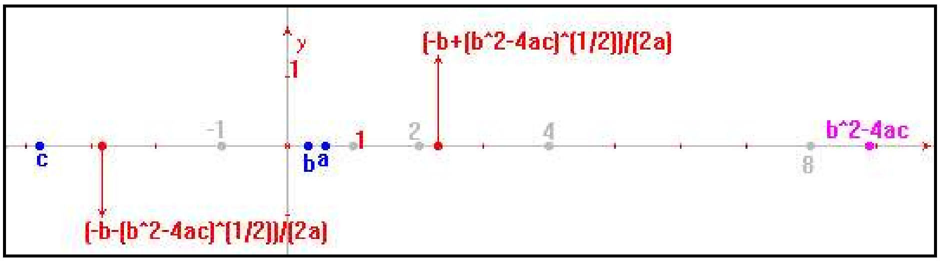



Figura 11. $c < 0$

Consideremos o caso $b = 0$. Existe as raízes $x_1$ e $x_2$ quando:

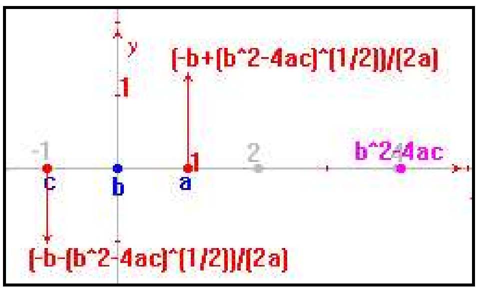



Figura 12. $c < 0$

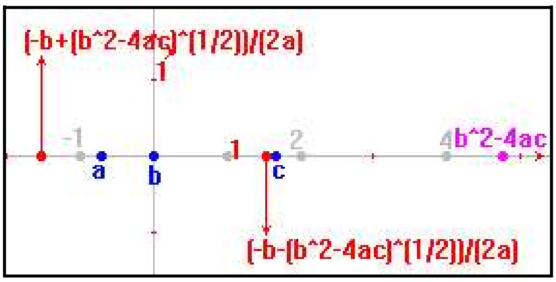



Figura 13. $a < 0$

Não existe as raízes $x_1$ e $x_2$ quando:

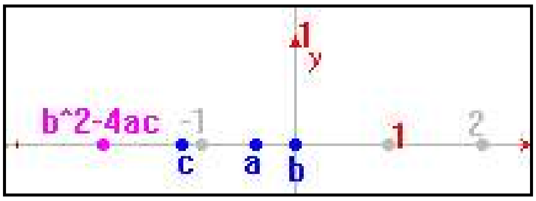



Figura 14. $a < 0$ e $c < 0$

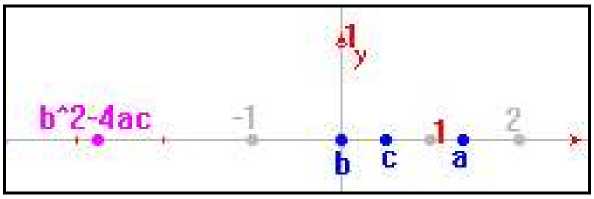



Figura 15. $a > 0$ e $c > 0$

**Desafio.** Construir um Macro que determine as raízes $x_1$ e $x_2$ da equação $ax^2+bx+c=0$, quando é dado *a, b e c.*

## 5.2.RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS VARIÁVEIS

**Problema 2.** Sejam os pontos sobre o eixo *X* com coordenadas *A, B, C, A', B',* e *C'*. Desejamos traçar os números que são soluções do sistema.

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Observamos que cada equação deste sistema representa geometricamente uma linha reta, portanto estamos interessados no caso onde as linhas retas não são paralelas e se interceptam em um ponto, isto ocorre quando $AB' - BA' \neq 0$. Neste caso, pelos métodos elementares usuais, obtemos à solução na forma:

$$x_1 = \frac{BC' - B'C}{AB' - BA'} \text{ e } y_1 = \frac{A'C - AC'}{AB' - BA'}.$$

Todas as operações aqui necessárias podem realizar-se com régua e compasso. Portanto $x_1$ e $y_1$ podem traçar-se.

Por outro lado determinamos um método mais curto que consiste, primeiro em construir a reta *Ax+By+C=0,* dados os coeficientes *A, B* e *C,* ou seja, se podemos traçar os coeficientes *A, B* e *C* podemos traçar a reta *Ax+By+C=0*, faremos isto usando os macros construídos na seção anterior, assim temos uma construção de linha reta usando régua e compasso a partir de seus coeficientes, como observamos na figura 16.

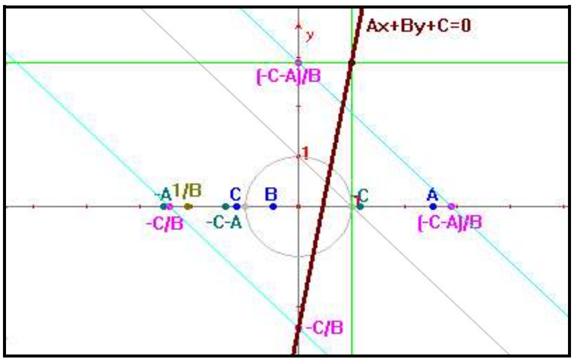



Figura 16. Reta Ax+By+C=0.

Assim podemos traçar os coeficientes *A, B, C,* e *A', B', C'*, das linhas retas, podemos traçar a solução, usando régua e compasso, (ou seja, usando os macros construídos na seção anterior) como mostramos a seguir.

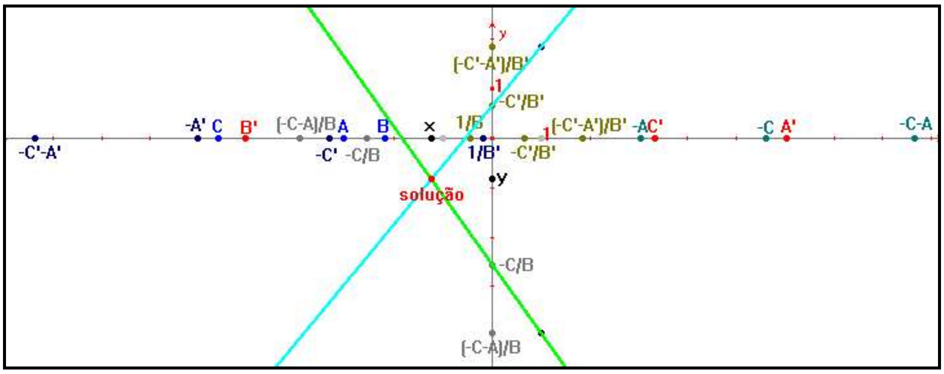



Figura 17. Solução do sistema.

Dessa forma, a solução do sistema consiste em construir as retas com régua e compasso e pegar o ponto da interseção que determina as soluções procuradas.

**Desafio.** Construir um macro que determine a reta *Ax+By+C=0* quando é dado *A, B* e *C.*

## 5.3. RESOLUÇÃO DA INTERSEÇÃO DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

A mesma idéia da seção anterior, nos leva a uma economia muito grande em casos mais difíceis, como veremos.

**Problema 3.** Suponhamos que se tracem *a, b, r, A, B* e *C*. Desejamos traçar as soluções comuns das equações.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$Ax+By+C=0.$$

A primeira equação do sistema, geometricamente é uma circunferência e a segunda uma linha reta, logo a solução é a interseção de ambos. Neste caso obter algebricamente as soluções comuns das equações já não é uma tarefa fácil. Por exemplo, tente determinar as soluções?

Para determinar as soluções do sistema primeiro devemos construir a reta *Ax+By+C=0*, como na seção anterior, quando são dados os coeficientes *A, B e C.* A seguir construímos uma circunferência $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, dados as coordenadas do centro e o raio respectivamente: *a, b,* e *r* , como observamos a seguir.

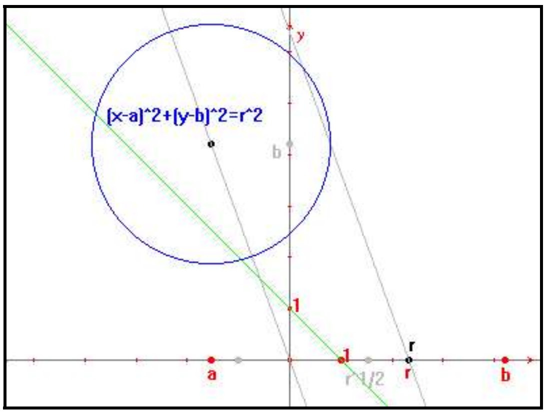



Figura 18. Construção da circunferência $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

Portanto, a solução do sistema consiste em tomar à interseção da reta e da circunferência, como vemos na figura 19.

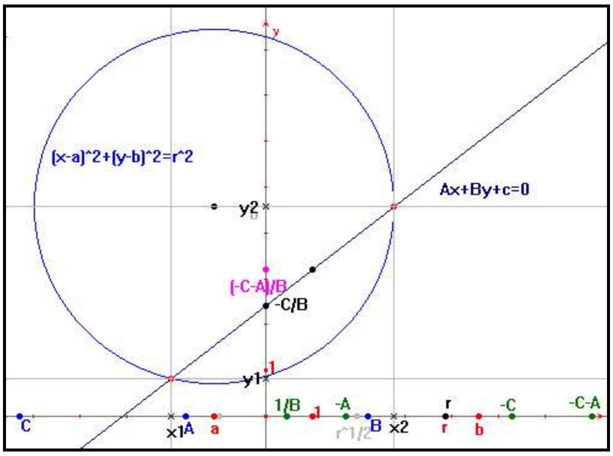



Figura 19. Solução do sistema $(x_1, y_1)$.e $(x_2, y_2)$

**Problema 4.** Suponhamos que se tracem *A, B, C; D, E* e *F*. Desejamos traçar as soluções comuns das equações nos casos onde existem.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$Dx + Ey + F = 0$$

Para nós obtermos as soluções do sistema, primeiro devemos determinar que significa a equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, quando são dados *A, B* e *C,* para realizar isto precisamos completar quadrados.

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \text{ ou } \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4},$$

comparando esta equação com a equação da circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Concluímos que $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ é uma circunferência com o centro $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ e seu raio $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ se $A^2 + B^2 - 4C > 0$, desta forma podemos proceder como na seção 5.3.

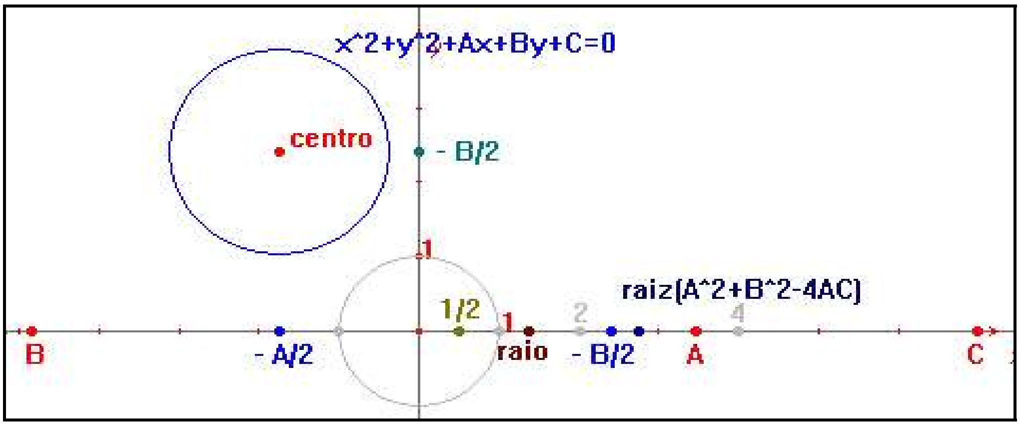



Figura 20. Construção da circunferência $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Para determinar a solução do sistema, devemos agora construir a reta $Dx+Ey+F=0$, como no caso da seção 5.2, quando são dados *D, E* e *F.* onde a solução do sistema consiste na interseção da reta e da circunferência.

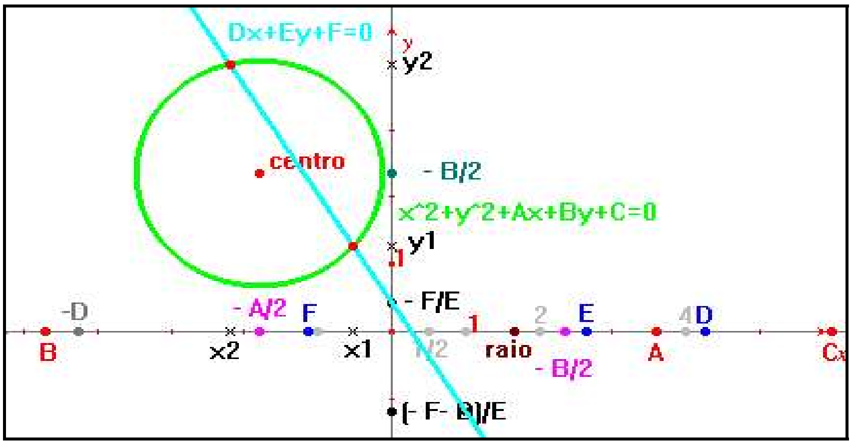



Figura 21. Solução do sistema $(x_1, y_1)$.e $(x_2, y_2)$

## 5.4. RESOLUÇÃO DA INTERSEÇÃO ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

**Problema 5.** Suponhamos que se tracem *A, B, C; D, E* e *F.* Desejamos traçar as soluções comuns das equações nos casos onde existem.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para nós obtermos as soluções do sistema primeiro devemos construir as circunferências de forma análoga ao realizado no problema 4, logo a solução é a interseção das circunferências.

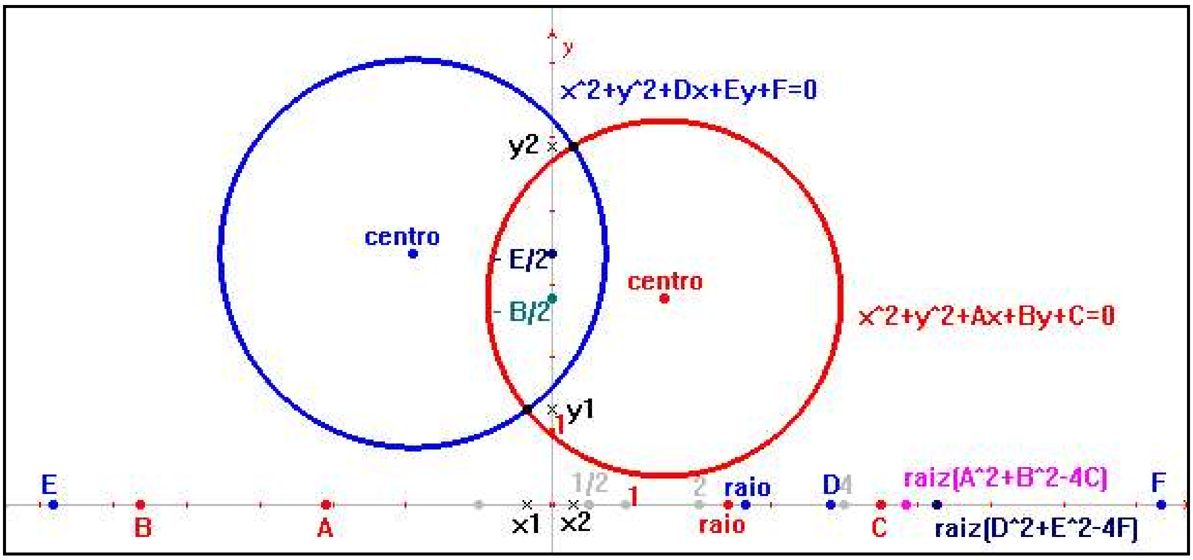



Figura 22. Solução do sistema $(x_1, y_1)$.e $(x_2, y_2)$

## 6. DESAFIO

Sejam três circunferências $C_1$, $C_2$ e $C_3$ no plano. O problema de Apolônio é construir, com régua e compasso, todas as circunferências possíveis $C$ que sejam tangentes aos três círculos $C_1$, $C_2$ e $C_3$.

Por exemplo uma destas circunferências $C'$ se mostra na figura 23.

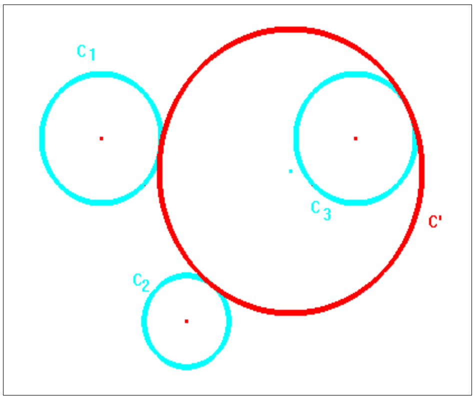


Figura 23

Usando os métodos da seção anterior determinar todas as circunferências possíveis $C$ com régua e compasso.

## 7. CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos concluimos que com régua e compasso podemos construir: retas que são dadas em sua forma geral, $Ax+By+C=0$ e circunferências dadas em sua forma geral, $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ . Portanto viemos influenciar em um novo tratamento para o estudo de linhas retas e circunferências sobre um sistema de coordenadas cartesianas usando um ambiente informático.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOISE, E. E., 1968. ***Geometria Elemental desde um ponto de vista Avanzado.*** Compañia Editorial Continental, S. A., Mexico.

SANGUINO, S. R. W. B., 2001. *Cabri Geometry II: Construções com régua e compasso.* Parte I**. 7 Encontro de Estudantes de Matemática da Região sul,** Pato Branco Pr. p. 68-73, 2001.

SANGUINO, S. R. W. B., 2002. *Introdução ao Cabri Géomètre II***. VIII Semana Acadêmica de Matemática e I encontro de Educação Matemática,** Pato Branco Pr. p. 35-48, 2002.

SANGUINO, S. R. W. B., 2003a. *Resolução de Equações com Régua e Compasso. Parte I.* **Anais do Evento Cientifico 2003 SAEPE/JICC.** Pato Branco Pr. (CD-ROM). V3. p. 647-651, 2003.

SANGUINO, S. R. W. B., 2003b. *Resolução de Equações com Régua e Compasso. Parte II. Palestra*. In: **9 Encontro de Estudantes de Matemática da Região sul.** Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) **10,11e 12 de outubro de 2003**. Florianópolis.

Coordenação de Matemática.
CEFET/PR –Unidade Sudoeste - Campus Pato Branco.
Caixa Postal: 571
85505 – 390.
Pato Branco PR.
srichardwsb@yahoo.com.br