Texto para Mini-Curso: A Metodologia de Pogorelov para ensino de construções geométricas, revista com geometria dinâmica[1]

II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática[2]
25 a 29 de Outubro de 2004, UFBA, Salvador, BA.

Yuriko Yamamoto Baldin
Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos
Rod. Washington Luiz, km 235
13565-905 São Carlos, SP.
BRAZIL
e-mail: yuriko@dm.ufscar.br

Resumo: A Metodologia proposta por Pogorelov para a resolução de problemas de construções geométricas com régua e compasso concilia de forma didática os conceitos de geometria euclidiana e a geometria das transformações. Na era de programas de geometria dinâmica, tal metodologia se mostra sobremodo atual, com o entendimento de conceitos facilitado por meio de visualização, experimentação, conjeturas, explorações e validação dos métodos de construção. Estas etapas de resolução de problemas de natureza geométrica são partes naturais de um ensino eficaz da Matemática. O objetivo deste mini-curso é desenvolver atividades didáticas para o ensino de geometria e construções geométricas com uso de programas computacionais, baseadas numa metodologia que auxilia o estudo de propriedades da geometria das transformações. As atividades são apresentadas de maneira que possam ser usadas como auxiliar didático em cursos de licenciatura, cursos de atualização de professores, e mesmo nas salas de aula de nível médio.

Palavras-chave: construções com régua e compasso, geometria das transformações, preparação de professores.

Introdução:

Este texto é uma elaboração do artigo apresentado no Congresso Internacional de Cabri-Géomètre, Cabriworld 2004 (Baldin, 2004-a), e é uma versão revisada do texto apresentado durante a II Bienal da SBM, com correções e melhoramentos.

O texto foi escrito para um Mini-Curso de 6 horas, e é constituído de três partes:

1- Significado da metodologia de Pogorelov no contexto de ensino de geometria; o papel de programas de geometria dinâmica na resolução de problemas de construões geométricas; primeiros exemplos;
2- Exemplos de problemas de construções geométricas: método do lugar geométrico e método da semelhança; propriedades da reflexão e aplicações em problemas de construção.

[1] Texto com pequenas alterações em relação ao apresentado durante a Bienal.
[2] A autora agradece os organizadores da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade de apresentar este Mini-Curso.

3- Propriedades de rotação, translação e inversão, aplicações aos problemas de construção geométrica.

Parte 1

1.1. A metodologia de Pogorelov e o ensino de geometria:

Explicamos brevemente o lugar ocupado pela "*Metodologia de Pogorelov para o ensino de problemas de construções geométricas*" dentro do currículo de Matemática do ensino básico, e em especial no contexto de ensino de geometria.

A "resolução de problemas" é parte importante de um currículo de Matemática, em particular do ensino básico (fundamental e médio), porque, além de ser essencial para propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico, a motivação dos alunos para o estudo desta disciplina está relacionada primeiramente aos problemas no contexto da vida real.

Algumas das nossas idéias sobre o papel de "resolução de problemas" num currículo de Matemática do ensino básico (fundamental e médio) estão na referência (Baldin, 2004-b). Nesta referência discutimos também os diversos tipos de problemas que devem ser trabalhados no ensino de Matemática, e que atendem a diferentes etapas do processo de ensino/aprendizagem.

Os princípios da metodologia proposta em (Pogorelov, 1987) para o ensino de resolução de problemas de construção geométrica são: 1) *Análise*: Compreensão do problema por meio da visualização de uma possível solução; 2) *Análise*: Descoberta das propriedades essenciais de uma solução para estabelecer uma estratégia para sua construção; 3) *Construção*: Execução da estratégia para obtenção da solução; 4) *Investigação*: Análise da solução e da estratégia da construção, provando matematicamente que a solução obtida é correta, explorando possíveis restrições ao método de construção utilizado, conjecturando variações e generalizações prováveis do problema.

É imediato reconhecer nesta metodologia a sistematização das etapas de resolução de problemas proposta por G. Polya em (Polya, 1954, 1975, 1986).

Dentro do currículo de Matemática do ensino básico, o ensino de geometria ocupa um lugar importante, pelo fato que o ensino desta contribui para o desenvolvimento da habilidade de abstração, a partir de modelos concretos da vida real para conceitos matemáticos. As propriedades das figuras geométricas, que representam as primeiras abstrações, são estudadas de forma a propiciar o raciocínio dedutivo e a capacidade de especulação, por meio de teoremas que são provados e verificados.

As atividades de construções geométricas fazem parte essencial da etapa de modelagem matemática de problemas de aplicação, tão importantes para a contextualização do ensino/aprendizagem de Matemática, em nível básico. Então, as construções geométricas com régua e compasso constituem uma estratégia básica de ensino de geometria, e contribuem para alcançar os objetivos educacionais.

A metodologia de Pogorelov não é apenas o uso de resolução de problemas para ensinar geometria, mas propõe o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático, aplicando conjuntamente os conceitos e teoremas de geometria num ambiente que favorece a compreensão da geometria das transformações do plano.

Portanto, a proposta de Pogorelov reúne vários aspectos importantes do ensino de geometria.

1.2. O conceito de Matemática experimental e o uso de tecnologia.

O conceito de Matemática Experimental (Weisstein, 2003) (Borwein-Bailey, 2003), como resultado do uso de tecnologia no ambiente educacional, acrescenta alternativas às metodologias de ensino/aprendizagem nas resoluções de problemas.

De acordo com (Borwein-Bailey, 2003, pp 2-3),

> *"o termo "matemática experimental" significa a metodologia de fazer matemática que inclui o uso de tecnologia para: 1) ganhar intuição e inspiração; 2) descobrir novos padrões e relações; 3) usar dispositivos gráficos para intuir propriedades matemáticas subjacentes; 4) testar conjeturas e, especialmente, invalidar as falsas; 5) explorar um resultado possível para estabelecer a necessidade de uma prova formal; 6) sugerir caminhos para uma prova formal; 7) substituir manipulações longas e complicadas por atividades baseadas em computadoress; 8) confirmar analiticamente os resultados."*

Portanto, os programas computacionais educacionais possuem potencial para tornar a tecnologia um aliado no processo de abstração, descoberta, especulação, confirmação, validação e conjeturas que são partes integrantes de resolução de problemas.

No aspecto particular de resolução de problemas de construção geométrica, os programas de geometria dinâmica, como Cabri-Géomètre e Tabulae para citar apenas dois, são poderosos auxiliares didáticos, por possuírem as facilidades de visualização, manipulação, rastreamento das etapas de construção, além de muitas outras particularidades.

Sobre o papel da tecnologia como mediador no ensino de matemática, citamos (Laborde, 2003), em que a autora faz importantes considerações, destacando o potencial do ambiente computacional que permite desenvolver experiências que correspondem a experiências mentais executadas com objetos abstratos. A autora argumenta com a teoria de Vygotsky de mediação de ferramentas no processo de construção de conceitos.

Laborde chama a atenção ao fato que simples interação com tecnologia não propicia uma aprendizagem efetiva dos estudantes, destacando o planejamento de atividades adequadas e o preparo dos professores como ingredientes críticos e definitivos do sucesso na integração da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem (Laborde, 2003) (Lagrange et al., 2001). Ainda em (Laborde, op. cit), vemos indicação do trabalho (Mariotti, 2002) sobre a influência que o ensino de problemas de construção geométrica num ambiente de geometria dinâmica exerce sobre o processo de apreensão de conceitos matemáticos pelos estudantes.

As considerações acima fundamentam a proposta deste Mini-Curso.

Apresentamos uma seqüência organizada de problemas de construção geométrica desenvolvida com metodologia de Pogorelov, num ambiente de geometria dinâmica que enaltece as etapas de resolução de problemas e permite maior entendimento da geometria de transformações.

O objetivo principal deste texto é contribuir como material de apoio para cursos de licenciatura e para professores e alunos de nível médio.

Os programas de geometria dinâmica considerados no curso são Cabri-Géomètre II e Tabulae. Entretanto, o método do curso se aplica a qualquer ambiente de geometria dinâmica.

1.3. Exemplos da Metodologia de Pogorelov.

Vamos trabalhar dois problemas simples para entender a metodologia. Os problemas de construção geométrica seguem as normas de construção com instrumentos de régua (sem medida) e compasso. Após delinear a estratégia de construção, as construções macro dos programas serão utilizadas, desde que façam parte destas normas.

Uma referência básica para uso de Cabri-Géomètre II nas construções com régua-compasso é (Baldin e Villagra, 2002).

Exemplo 1:

Problema: Construir um triângulo, sendo dados um lado, um ângulo adjacente a este lado e a soma de outros dois lados.

Estabelecemos primeiro o ambiente de trabalho com geometria dinâmica, construindo os dados: um segmento AB como o lado fixado, um segmento qualquer PQ que represente a soma ‘l’ dos outros lados e uma semi-reta com vértice A para representar, junto com AB, o ângulo dado em A.

Notemos bem que os dados do problema não possuem medidas pre-estabelecidas. O importante é o conceito básico de ângulo e de segmento que possui um comprimento definido. O problema é de construção geométrica e não de cálculos algébricos. Num ambiente de ensino básico, este problema poderá ser retomado posteriormente com uso de medidas, em situações de aplicação.

Passo 1: Suponha que a solução tenha sido construída. Esta será um triângulo ABC com terceiro vértice C sobre a semi-reta, satisfazendo AC + BC = l.

Portanto, a solução será determinada com a construção do vértice C.

Passo 2: Transferindo o comprimento l sobre a semi-reta com a função “Compasso”, determinamos o ponto X sobre a semi-reta tal que AX tenha comprimento l. O ponto C procurado estará entre A e X. Qualquer ponto X’ do *segmento* AX satisfaz a condição AX’+ X’X = l. A condição AC + BC = l = AC + CX implica que BC = CX, isto é, C é eqüidistante dos pontos B e X. Portanto, C deve estar sobre a mediatriz de XB.

Acabamos de fazer uma ‘análise’ da possível solução e uma ‘estratégia de construção’ é naturalmente delineada.

A construção “régua-compasso” da mediatriz é usada no ambiente de lápis e papel, mas com geometria dinâmica vamos usar a facilidade de construção macro. Os pontos importantes são o conceito matemático que é destacado na resolução e o reconhecimento de que a mediatriz é uma construção “régua-compasso”.

A intersecção da mediatriz de XB com a semi-reta é o ponto C procurado. A ‘prova’ de que o triângulo ABC é a solução baseia-se na propriedade geométrica que caracteriza a mediatriz de um segmento. ESCREVER A PROVA AGORA É PARTE ESSENCIAL DA RESOLUÇÃO!

A Figura 1[3] ilustra este problema.

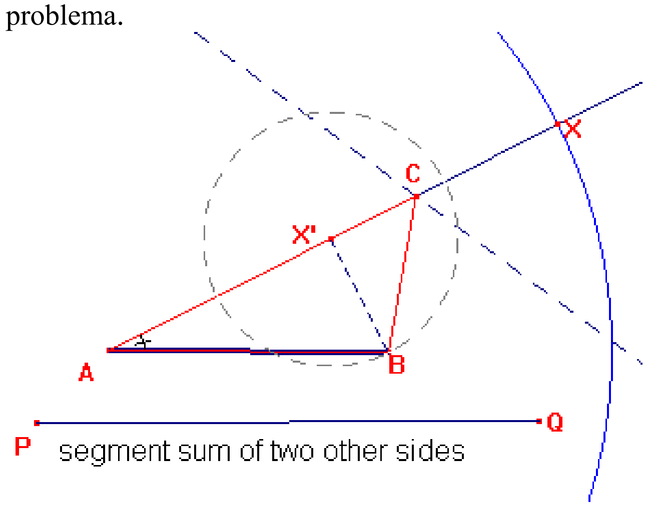

Figura 1. Problema 1

[3] Por este texto ter sido elaborado a partir de um artigo escrito em inglês, os textos dentro das Figuras aparecem nesta língua, pelo que a autora pede desculpas ao leitor. Espera-se que o texto em si seja explicativo suficiente para evitar mal - entendidos.

A resolução *não terminou ainda*. Vamos fazer uma atividade de 'investigação'.

O ambiente de geometria dinâmica permite executar experiências didáticas sobre as possíveis restrições do problema e desta construção. Manipule o segmento AB, a semi-reta ou ainda o segmento PQ (de comprimento l). Deduza e justifique teoricamente as eventuais restrições observadas. É muito importante fazer uma redação adequada dos passos das experiências.

Responda as seguintes questões:

A construção da solução é sempre possível? Qual é o significado da manipulação da semi-reta? Quais teoremas de geometria euclidiana podem ser utilizados para justificar cada passo da construção e do experimento acima?

Nas atividades escolares em geral, a parte final da 'investigação' é negligenciada. Os alunos consideram um problema resolvido quando acabam de construir o último objeto e não refletem sobre a justificativa que fundamenta o processo de construção. A atividade de 'investigação' com recursos da geometria dinâmica acrescenta novos significados à "resolução de problemas", de maneira rápida e concreta se comparada com atividades com lápis-papel.

Exemplo 2.

Problema: Construir um triângulo sendo dados um lado, a mediana e a altura relativas a este lado.

Observemos novamente que os dados não possuem medidas pre-estabelecidas.

Construção dos dados: três segmentos arbitrários, representando respectivamente o lado fixado (chamemos de AB), a mediana e a altura relativas a AB.

Passo 1: Uma análise do problema. A solução é um triângulo ABC, sendo que AB está dado. Então, o problema consiste em construir o terceiro vértice C. Os outros dados se referem à altura e à mediana.

O que se sabe sobre a altura relativa ao lado AB, de um triângulo ABC? O que se sabe sobre o conceito de mediana?

Passo 2: Construa inicialmente um triângulo qualquer ABC (AB dado do problema) e verifique que as definições dos conceitos de altura e da mediana são essenciais para vislumbrar uma estratégia de construção para o vértice C.

Temos que a mediana deve passar por C e pelo ponto médio de AB, e neste caso seu comprimento deve ser a medida do segmento fixado pelo dado do problema. Então, usando o ponto médio de AB como referência, sobre que figura geométrica se localizaria o ponto C?

Temos que a altura relativa ao lado AB é o segmento perpendicular à reta suporte de AB com extremos em C e C'sobre a reta suporte. Se temos como dado do problema um segmento que representa tal altura, que figura geométrica representa o conjunto de pontos que possuem a altura dada relativa ao segmento AB?

Respondendo corretamente a estas questões teremos a estratégia de construção. Execute e justifique os passos da construção.

Passo 3: Investigue a solução. A solução sempre existe? Quais são as eventuais condições para sua existência? Quantas soluções pode haver para quais dados? Existe alguma relação entre a mediana e a altura que implica em situações particulares da solução?

Este problema pode ser retomado com uso de medidas nas situações de aplicação. É muito importante a valorização do raciocínio matemático frente à freqüente dependência de alunos e professores sobre dados numéricos de problemas geométricos.

Exercício: Sejam dados uma reta que passa por pontos A e C e um ponto B fora da reta. Construir um ponto X sobre a reta de modo que AX + XB tenha a medida de um segmento previamente fixado.

Parte 2

2.1 O método do Lugar Geométrico:

A metodologia de construção por Lugar Geométrico consiste no seguinte: suponha que a solução de um problema de construção satisfaça duas propriedades geométricas, isto é, que um ponto da solução pertença a duas figuras geométricas distintas F1 e F2, satisfazendo cada qual as propriedades estabelecidas. Isto significa que a solução é o lugar geométrico dos pontos que pertencem à interseção de duas figuras.

As construções geométricas básicas ensinadas no ensino fundamenral e médio são lugares de pontos obtidos das interseções de retas e círculos, que são objetos da construção régua-compasso. Exemplos: círculos, pontos eqüidistantes de uma reta, pontos eqüidistantes de dois pontos (a mediatriz), pontos eüidistantes de duas retas concorrentes (as bissetrizes), arco capaz de um segmento segundo um ângulo, e muitos outros. Para uma construção simples de cônicas por este método consulte (Baldin e Villagra, 2002), usando Cabri.

Vamos estudar aqui uma construção do Círculo de Apolônio como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos estão em uma razão dada m : n ($m/n \neq 0,1$).

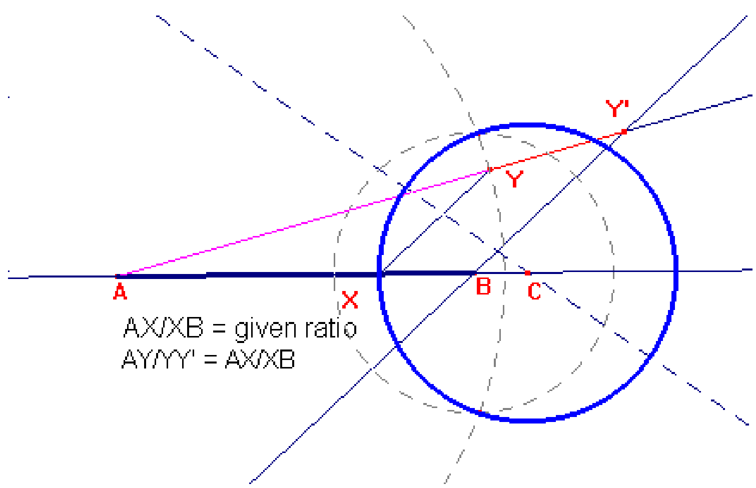

Figura 2. Círculo de Apolônio

Em princípio, não é evidente pelo enunciado que a solução deste problema seja um círculo. Vamos fazer uma *análise* dos dados para encaminhar os passos da construção.

Primeiro, um segmento AB é fixado. É necessário entender que, se uma razão m:n é dada, existe um ponto X entre A e B que representa a razão dada como AX/XB. Justifique! Que significa geometricamente quando a razão é próxima de zero? É possível existir X no segmento AB que corresponda a uma razão extremamente grande? Quando isto ocorre? Qual é o caso quando a razão for 1?

Uma vez que esteja clara a existência de X sobre o segmento AB satisfazendo a razão dada, a idéia seguinte é procurar pontos fora do segmento que satisfaça a mesma propriedade.

Se um ponto P fora de AB satisfizer a condição, ele determinará uma semi-reta com origem A que o contém, de modo que a distância AP medida sobre a semi-reta estará na razão dada com a distância PB. Portanto P pertenceria à interseção de dois círculos: um com centro A e raio AP, e o segundo com centro B e raio PB.

Logo, a *estratégia* de solução é construir o lugar geométrico dos pontos de interseção de dois círculos com as propriedades acima.

Passo 1: sobre uma semi-reta arbitrária com origem em A, vamos construir dois pontos Y e Y'tal que AY/YY' seja a razão dada. Para construi-los, usaremos a semelhança de triângulos: se Y é um ponto qualquer da semi-reta, o ponto Y' é o único ponto da semi-reta tal que BY' é paralelo a XY. Pela semelhança de triângulos, temos AY/YY' = AX/XB.

Para executar este passo, basta seguir o raciocínio feito: construa uma semi-reta a partir de A, e sobre ela um ponto Y. Construa o segmento XY, e a reta paralela a XY pelo ponto B. O ponto de interseção entre essa reta e a semi-reta é o ponto Y'. Construa os segmentos AY e YY'.

Passo 2: construa dois círculos, o primeiro com centro A e raio AY, o segundo com centro B e raio YY'. Os dois pontos de interseção dos círculos pertencem à solução.

Passo 3: construa o Lugar Geométrico dos pontos de interseção, quando Y percorre a semi-reta. No Cabri, ative a função "Lugar Geométrico", e então clique sobre um dos pontos de interseção e em seguida sobre o ponto Y. Este passo é feito duas vezes, uma para cada ponto de interseção. Manipule o ponto Y sobre a semi-reta. O que observa? Manipule agora a semi-reta. O que observa?

Esse passo mostra que o lugar geométrico tem o formato de um círculo e que passa pelo ponto X, como de fato deveria ocorrer. Para completar a construção, vamos efetivamente encontrar o centro do círculo. Este, por sua vez, pertence a um diâmetro, portanto sobre a reta-suporte de AB, e também pertence à mediatriz de qualquer corda, por exemplo XP. Que teoremas de geometria justificam este passo?

Passo 4: construa o centro C sugerida pela análise acima, e construa o círculo com centro C e raio CP. Está construído o Círculo de Apolônio.

Prove cada passo da construção, justificando com teoremas da geometria euclidiana.

Para *investigar*, as atividades de manipulação são utilizadas para confirmar que a construção depende somente dos dados do problema, e portanto a construção é validada. Observe ainda, o efeito que provoca a manipulação do ponto X sobre o lugar geométrico construído. Existe algum caso particular que possa ser observado?

Exercício: Construir o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a duas retas estão em uma razão dada. Pense primeiro na posição relativa entre duas retas.

Exercício: Dado um círculo de centro O, seja AB um diâmetro. Seja P um ponto do círculo eqüiditante de A eB. Para cada ponto X sobre o círculo considere o ponto M do raio OX com a propriedade de que a reta PM seja perpendicular ao raio OX. Determinar o lugar geométrico dos pontos M e provar suas propriedades.

2.2 Método da Semelhança.

Este método é o primeiro que utiliza a geometria das transformações. Neste mini-curso, evitaremos o uso carregado de linguagem simbólica ou formal da teoria, mas daremos destaque às propriedades geométricas de cada transformação.

Uma Semelhança no plano é uma aplicação injetiva que preserva os ângulos entre figuras correspondentes e em que as distâncias entre pontos correspondentes mantêm uma razão constante.

Nos programas de geometria dinâmica, por exemplo Cabri, encontramos a função “Homotetia”, porém não a usamos nos problemas de construção geométrica, porque tal função depende de dado numérico da razão da homotetia. No lugar de dado numérico que representa uma razão, iremos utilizar a semelhança geométrica como trabalhada no problema anterior.

O método de Semelhança é usado quando a solução pode ser obtida aplicando uma semelhança conveniente sobre a solução mais simples do problema original, em que alguma hipótese tenha sido desconsiderada.

Como exemplo, considere o seguinte:

Problema: Dados um ângulo e um ponto no interior convexo dele, construir um círculo que passa pelo ponto dado e que seja tangente aos lados do ângulo.

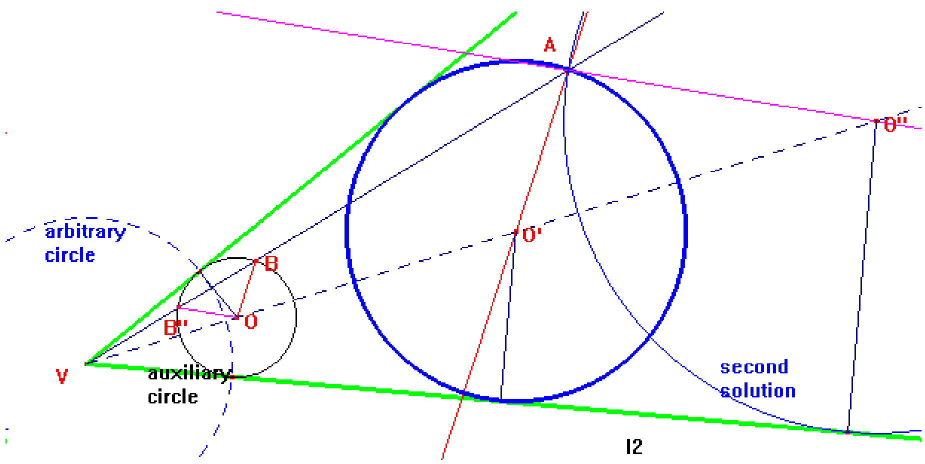

Figura 3 Círculo tangente a um ângulo, passando por A.

A idéia principal é reconhecer no problema que todos os círculos tangentes aos lados de um ângulo fixado são semelhantes. Então, uma vez construído um círculo qualquer que seja tangente aos lados, a solução é obtida construindo uma semelhança adequada, de modo que a imagem do círculo pela semelhança seja a verdadeira solução passando por A.

Portanto, o problema é reduzido à construção de um círculo tangente auxiliar e depois à construção da semelhança adequada.

Para a construção de círculo tangente auxiliar, lembremos que o centro de um círculo tangente a lados de um ângulo pertence à bissetriz interna (Por que? Justifique). Os pontos de tangência determinam raios que são perpendiculares aos lados do ângulo (Por que?).

Com fundamentos nestas considerações básicas podemos proceder como segue.

Passo 1: Pelo vértice V do ângulo trace um círculo arbitrário determinando dois pontos sobre os lados do ângulo dado. Por um destes pontos trace a reta perpendicular ao lado que o contém.

Passo 2: Trace a bissetriz interna do ângulo. Obtenha o ponto O como interseção da reta do Passo 1 com a bissetriz.

Passo 3: Construa o círculo de centro O que seja tangente aos lados do ângulo. Quais são os pontos de tangência? Qual é o raio? Justifique sua resposta.

Precisamos agora construir a semelhança que transforme este círculo auxiliar num círculo que passe pelo ponto dado A, mantendo a propriedade de ser tangente aos lados do ângulo. Então, é evidente que o centro do círculo solução é um ponto O' que pertence à bissetriz interna.

Passo 4: Construa a semi-reta VA. Considere B um ponto de interseção desta semi-reta com o círculo auxiliar.

Observe a formação do triângulo VOB. Então, o centro O' procurado deve ser o vértice do triângulo VO'A, semelhante ao triângulo VOB. Assim, damos o passo seguinte:

Passo 5: Construa o segmento OB. Construa a reta paralela a OB pelo ponto A. Construa O' como ponto de interseção entre esta reta e a bissetriz interna.

Passo 6: Pelo ponto O' construa a reta perpendicular a um dos lados do ângulo. Obtenha o ponto de interseção sobre o lado considerado.

Passo 7: Construa o segmento com extremos O'e o ponto construído no Passo 6. Construa o círculo de centro O'e este segmento como raio.

O círculo é tangente a ambos os lados? Passa por A, dado? *Prove* que ele é de fato solução do problema. Manipule o ângulo e o ponto A para confirmar que a construção está correta. Manipule também a construção auxiliar para validar a resolução.

Para *investigar* ainda esta construção, observamos que o ponto B de interseção da solução auxiliar com a semi-reta VA não é único. Então, poderíamos considerar a mesma construção tomando outro ponto B'. Realmente a solução não é única. Confira. O uso de geometria dinâmica acrescenta nova dimensão às atividades de investigação de um método de construção.

2.3 Reflexão relativa a uma reta.

Dada uma reta l, a Reflexão relativa a l é uma transformação injetiva do plano tal que um ponto A e sua imagem A'pela reflexão são eqüidistantes da reta l, isto é, para cada ponto A, a reta l é a mediatriz dos pontos A e sua imagem A'.

Podemos utilizar o ambiente da geometria dinâmica para explorar as propriedades geométricas essenciais de uma reflexão.

O primeiro passo de um estudo preliminar deve ser o de construir inicialmente a imagem de um ponto A pela reflexão segundo uma reta dada l, utilizando a definição geométrica dada. Depois, utilizar a função "Mediatriz" do programa para confirmar a propriedade geométrica. Uma vez compreendido que a construção da imagem refletida segue as normas da metodologia "régua-compasso", pode-se utilizar a função "Simetria axial" ou correspondente nos programas de geometria dinâmica.

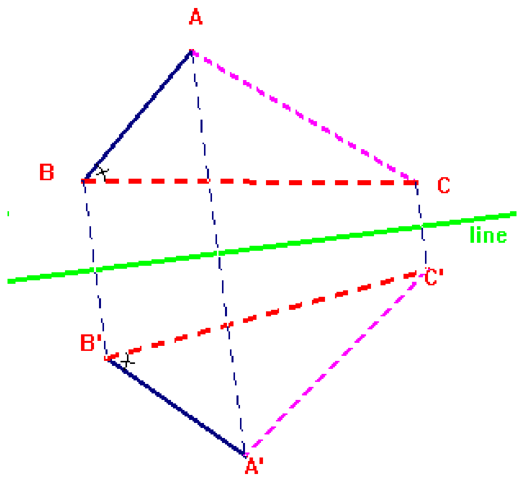

Figura 4: Propriedades da reflexão segundo uma reta.

Os pontos A', B' e C' da Figura 4 são obtidos usando a função do Cabri. Para completar o estudo, a manipulação das figuras deve ser utilizada para concluir a propriedade fundamental da reflexão ser uma Isometria, isto é, a reflexão preserva os ângulos e as distâncias das figuras correspondentes. Assim, uma figura geométrica e sua imagem por uma reflexão são *figuras congruentes*.

Os pontos da reta são claramente invariantes pela reflexão. Também, temos que a reflexão é uma involução, isto é, a composição da reflexão por ela mesma é a identidade do plano. Uma reflexão é inversível? Por que?

Vamos trabalhar um problema em que a solução é construída usando as propriedades básicas de uma reflexão.

Problema: Dadas três retas distintas *a, b* e *c*, construir um segmento AB, que seja perpendicular a *c*, com extremos respectivamente sobre *a* e *b*, e ponto médio sobre *c*.

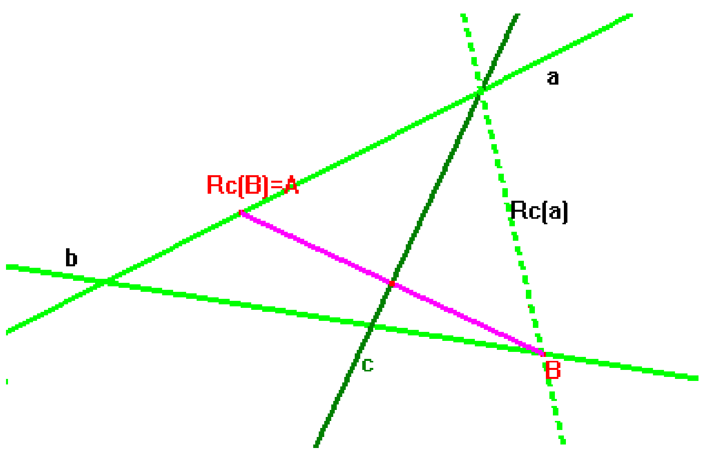

Figura 5: Segmento AB, perpendicular a c, A sobre a, B sobre b, ponto médio sobre c.

Dadas três retas quaisquer a, b e c, a idéia principal está em reconhecer no problema o conceito de simetria relativa à reta c, sugerida pela condição do "ponto médio" da solução estar sobre c.

Portanto, a estratégia para conduzir didaticamente uma argumentação é reforçar o conhecimento de que a imagem da reta ‘a’ pela reflexão Rc é a reta Rc(a), com a propriedade de que os pontos da reta ‘c’ são eqüidistantes das retas ‘a’ e Rc(a). Logo, sendo B o ponto de interseção entre ‘b’ e Rc(a), B e algum ponto da reta ‘a’ são eqüidistantes da reta ‘c’.

A compreensão da propriedade essencial de uma reflexão leva naturalmente a deduzir que o extremo A procurado deve ser o ponto Rc(B).

A estratégia de construção está pronta.

Execute os passos da estratégia montada. *Prove* que a solução está correta.

Qual poderia ser uma *atividade investigativa* neste problema? Poderia considerar, por exemplo, as posições relativas das retas dadas e suas relações com o problema. A matemática experimental favorece os processos de aprendizagem de conceitos.

Parte 3

3.1 Rotação em torno de um ponto.

Dado um ponto O, a composição de duas reflexões com respeito a duas retas concorrentes em O produz uma isometria, tal que um ponto A e sua imagem rot(A) são eqüidistantes de O e o ângulo AÔ rot(A) mede o dobro do ângulo formado pelas retas em O. Em particular, o ponto O é o único ponto fixo da transformação.

Embora “Rotação” ou “Girar” sejam funções disponíveis nos programas de geometria dinâmica, não as usamos nos problemas de construção geométrica, por razões já citadas. Em particular, observamos que a opção de girar com “Ponteiro” no Cabri não é função que permite construção geométrica e a função “Rotação” depende de dados numéricos.

Uma atividade preliminar das propriedades geométricas de uma rotação, em torno de um ponto fixo O e determinado ângulo, deverá ser feita antes de poder usar a técnica de rotação num problema de construção.

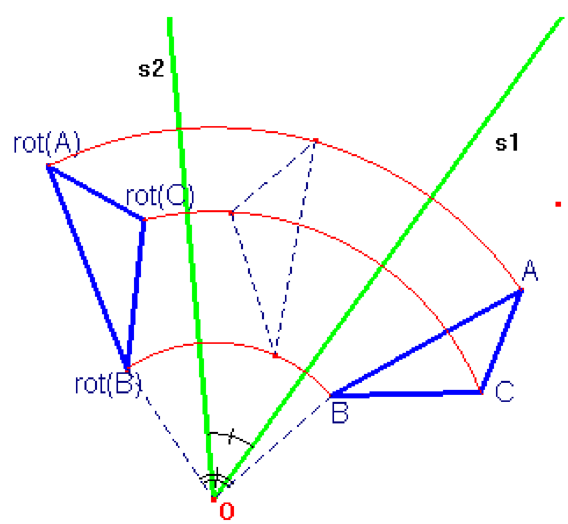

Figura 6: Propriedades essenciais de uma rotação, como composição $(Rs_2)o(Rs_1)$.

É importante estabelecer nesse estudo a rotação como uma isometria, e também a dependência do ângulo de rotação sobre o ângulo entre as retas cujas reflexões compõem a rotação. A escolha de particulares retas concorrentes em O não altera o resultado da composição de reflexões, desde que o ângulo entre as retas seja mantido igual para cada par de retas. A não comutatividade da composição de duas reflexões também é importante, sendo que a ordem da composição altera o sentido da rotação, seja horário ou anti-horário em torno do ponto O. É claro também que o ponto O é o único ponto fixo da rotação.

O método da Rotação é usado em problemas de construção geométrica quando os dados sugerem que, aplicando uma rotação adequada sobre uma das figuras dadas, uma parte essencial da solução poderia ser construída, sendo o resto da construção obtida executando uma outra rotação conveniente.

Considere como exemplo o seguinte:

Problema: Dados dois círculos e um ponto A, construir um triângulo isósceles com os extremos da base sobre cada um dos círculos, e tendo no vértice A um ângulo pré-estabelecido.

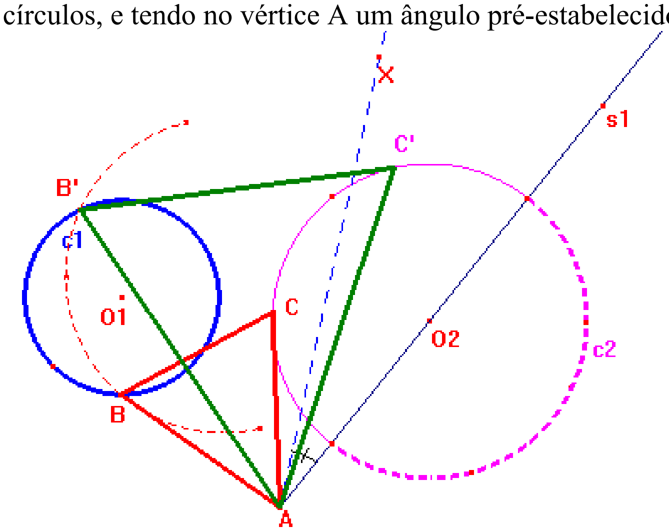

Figura 7: Triângulo isósceles com extremos da base sobre c1 e c2, e com um ângulo fixado no vértice A.

A idéia da construção é sugerida pela propriedade requerida da solução apresentar o ângulo pré-estabelecido no vértice A. De fato, se aplicarmos a rotação em torno de A por este ângulo sobre uma possível solução, um dos lados do triângulo isósceles se transforma exatamente no outro lado da solução. Determine o argumento desta afirmação.

A estratégia de construção é, portanto, obter uma rotação que produza um dos pontos da base da solução.

Passo 1: Construa dois círculos c1 e c2, com centros respectivamente O_1 e O_2, e um ponto A.

Passo 2: Por A construa duas semi-retas, sendo uma passando pelo centro O_2 e outra AX, de modo que o ângulo $O_2\hat{A}X$ represente a metade do ângulo fixado pelo problema.

Passo 3: Execute a rotação do círculo c2, pela composição das reflexões relativas às semi-retas, de modo a produzir como imagem um círculo que intercepta o círculo c1, em geral, em dois pontos B e B', como na Figura 7. Atenção à ordem da composição.

Um conselho neste passo da construção é usar um dos *arcos* de c2 determinados pela semi-reta AO_2 para rotacionar, em vez do círculo todo. A razão para este procedimento é que o círculo é simétrico em relação ao diâmetro, e por isso a primeira imagem de c2 pela reflexão segundo a semi-reta AO_2 coincide com o próprio círculo, quando na realidade os arcos são revertidos. Este fenômeno não é percebido em geral e pode provocar interpretações erradas no momento de construir a solução. Este procedimento torna a atividade mais evidente e eficiente como uma ferramenta didática.

Passo 4: A rotação inversa, executada como composição de reflexões na ordem reversa, devolve os pontos obtidos para o círculo original c2, produzindo os pontos C e C'respectivamente.

Prove que os triângulos ABC e AB'C' são soluções do problema. A prova desta construção é o objetivo principal deste problema, reforçando a compreensão das propriedades geométricas de uma rotação, e também das propriedades que caracterizam um triângulo isósceles.

Para *investigar* esta construção, considere questões como:
Qual é o significado da manipulação da semi-reta AX? Existem restrições para a existência de soluções com as condições dadas? Se sim, quais são? Existe algum caso de solução única? O resultado se alteraria de alguma forma se tivéssemos rotacionado c1 em vez de c2, com esta estratégia? A escolha da primeira semi-reta como aquela que contém o centro O_2 é alguma restrição ao método?

Terminamos essa seção, observando que quando as retas cujas reflexões compõem uma rotação em torno de um ponto O são perpendiculares em O, a rotação produzida é de 180 graus.
Neste caso, a rotação leva o nome especial de "Simetria pontual" em relação a O. A simetria pontual em relação a um ponto O é, portanto, uma isometria que transforma cada ponto P do plano em seu simétrico P' relativo a O, isto é, o ponto O é o ponto médio do segmento PP'.
Os programas de geometria dinâmica possuem a função "Simetria", que pode ser usada nas construções "régua-compasso" por essa razão.

O seguinte problema pode ser resolvido usando o método de rotação, no caso particular de Simetria pontual.

Problema: Dadas duas retas *a* e *b* e um ponto O, construir um segmento AB com extremos em *a* e *b* respectivamente e O como ponto médio.

3.2 Translação por um vetor.

Dado um vetor não nulo v, a translação por v é uma transformação injetiva tal que um ponto A e sua imagem Tv(A) = A' formam um segmento orientado AA' = v.
Na linguagem vetorial, dizemos que o segmento AA' representa o vetor v, ou ainda que o ponto A' é determinado por A'= A + v. O segmento orientado A'A representa o vetor oposto (–v).
Geometricamente, uma translação desloca uma figura na direção paralela ao vetor dado para uma posição de distância correspondente ao comprimento do vetor. O sentido do deslocamento é determinado pela orientação do vetor.

Um estudo preliminar de translação e de suas propriedades precisa ser feito, antes de aplicá-la em problemas.

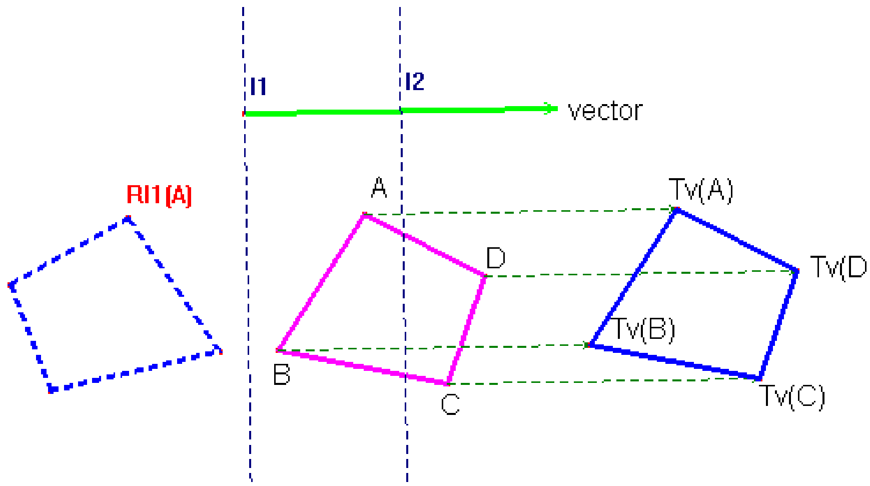

Figura 8: Translação e suas propriedades geométricas.

Em ambiente de geometria dinâmica, podemos construir um vetor como um segmento orientado. Com Cabri podemos usar a função “Vetor” que estabelece a orientação de um segmento que o representa.

A função “Translação” aplicada sobre qualquer figura permite facilmente estudar as propriedades desta transformação. As principais propriedades são: ela é uma isometria sem pontos fixos, a transformação inversa é a translação pelo vetor oposto, o qual pode ser construído usando a função “Simetria” relativa à origem do segmento orientado de v.

As atividades propostas são todas de fácil execução. Entretanto, propomos uma atividade essencial para exibir o caráter estrutural desta transformação, permitindo inclusive mostrar que a Translação é um método válido nas construções “régua-compasso”.

A atividade que pode ser executada no próprio arquivo anterior consiste em mostrar o seguinte:

A translação pelo vetor XY pode ser obtida como a composição de duas reflexões $(Rl_2)o(Rl_1)$ onde l_1 é a reta perpendicular a XY por X, e l_2 é a reta mediatriz do segmento XY. A troca na ordem da composição reverte o sentido da translação de mesma distância, a qual é na verdade o dobro da distância entre as duas retas paralelas. É um fato que o par de retas paralelas que produzem a translação por meio de suas reflexões não é único que produz este movimento, mas o que importa é que a translação é determinada pela distância entre as retas do par e a direção perpendicular às mesmas. A construção sugerida apenas facilita a execução da composição e a interpretação dos resultados.

O problema a seguir ilustra uma construção que utiliza totalmente as propriedades de uma translação.

Problema: Dados dois círculos e um segmento, construir um segmento com extremos em cada círculo, paralelo ao segmento dado e de mesmo comprimento.

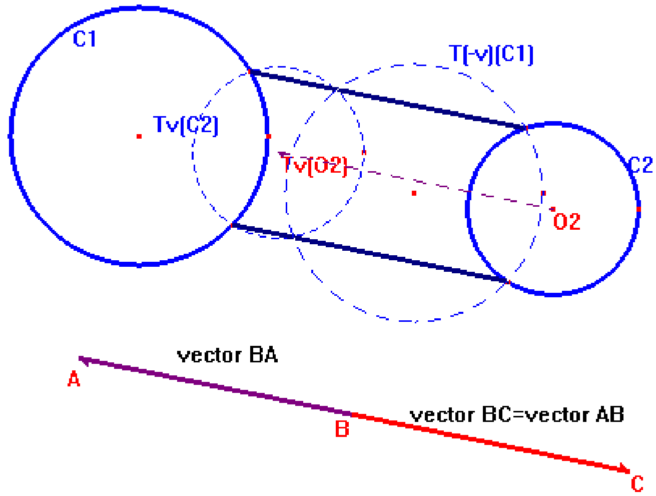

Figura 9: Segmento paralelo a AB, com mesmo comprimento
e com extremos sobre dois círculos.

Análise do problema: Como sabemos que a translação por um vetor transforma uma figura em imagem congruente, deslocada à distância igual ao comprimento do vetor, se transladarmos um dos círculos por um vetor dado BA, o círculo c2 na Figura 9, por exemplo, os pontos de interseção da imagem com outro círculo forneceriam candidatos para extremos do segmento solução. Revertendo a translação por vetor AB = vetor BC (obtido de BA por simetria) os pontos retornariam ao círculo inicial, mantendo a distância e a direção de AB.

Temos uma estratégia pronta.

Aplicação clara da função "Translação" sobre os dados do problema, seguindo os passos planejados acima, permite a construção do segmento solução. A justificativa teórica dos passos da construção é parte importante da resolução do problema.

As atividades investigativas por meio de manipulações adequadas enriquecem este problema.

Além de manipulações que ajudam a confirmar as propriedades da solução, sugerimos algumas questões como: Existe algum caso de solução única? Nenhuma solução? Existem restrições a este método de construção? Quais?

Experimente o método de construção, transladando o círculo c1 em vez de c2. Quais são as diferenças? A solução seria diferente?

Utilize o método da translação para resolver o seguinte:

Problema: Construir um trapézio, sendo dadas as bases e as diagonais.

Até agora, vimos transformações do plano obtidas por composições de reflexões segundo retas, que resultam ser isometrias. Um resultado importante da Geometria de Transformações é o teorema de classificação de isometrias no plano. Um estudo com Cabri das transformações isométricas do plano, classificando-as como composições de reflexões, está feito em (Baldin-Villagra, 1999).

3.3 Inversão com respeito a um círculo com centro O e raio R.

Dado um círculo com centro O e raio R, a inversão é definida como segue: para cada ponto A distinto de O, sua imagem Inv(A) é o ponto A'que satisfaz a relação $OA.OA' = R^2$.

Esta propriedade não é imediatamente compreendida ou visualizada, e um estudo preliminar com geometria dinâmica é altamente proveitoso.

Uma construção ilustrada na Figura 10 é simples de entender e usa diretamente as propriedades requeridas pela definição.

Passo 1: Construa um círculo de centro O e raio qualquer. Tome um ponto A qualquer, inicialmente fora do círculo.

Passo 2: Construa a semi-reta OA e o ponto médio do segmento OA.

Passo 3: Construa um círculo auxiliar com centro neste ponto médio e diâmetro OA. Obtenha os pontos de interseção dos dois círculos. Construa as semi-retas que partem de A e passam pelos pontos obtidos sobre o círculo inicial.

Os passos acima constituem procedimento padrão para a construção de retas tangentes a um círculo por um ponto dado fora deste. *Prove* que de fato estas semi-retas são tangentes ao círculo dado.

Passo 4: Construa a corda que une os pontos de tangência, assim construídos. Obtenha o ponto de interseção deste segmento com a semi-reta inicial OA. Chame-o de A'.

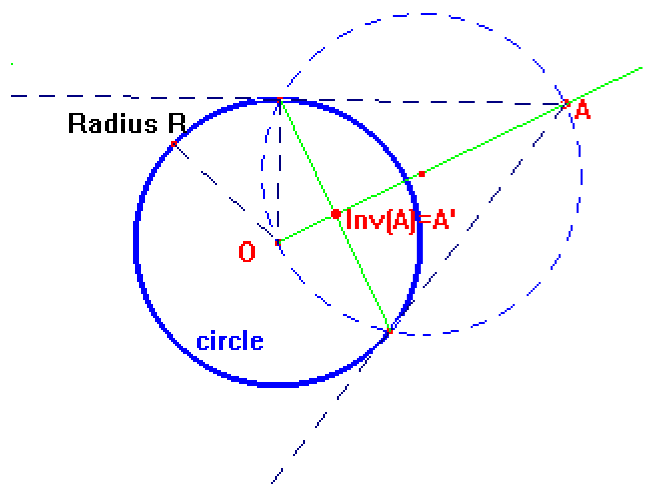

Figura 10: Construção geométrica da Inversão de um ponto relativa a um círculo.

Passo 5: Prove que A' é Inv(A).

Lembre-se dos teoremas de semelhança de triângulos retângulos. A própria construção sugere quais triângulos deve considerar.

Dado um ponto A' distinto de O dentro do círculo, a construção prévia mostra o caminho óbvio para retornar a ponto A, como a imagem pela inversão de A'.

Temos então que a Inversão segundo um círculo de centro O é uma transformação bijetora do plano menos o ponto O, sendo ela própria sua inversa, isto é, ela é uma involução. Além disso, os pontos do círculo são todos fixos pela inversão.

A construção acima é sugerida em (Pogorelov, 1987). Apresentamos uma construção alternativa que permite um estudo mais versátil das propriedades desta transformação, que claramente não é uma isometria.

Passo 1: Construa um círculo qualquer de centro O e um ponto A qualquer que não seja O.

Passo 2: Construa a reta que liga O e A. Por O construa a reta perpendicular à reta construída. Chame de P e P' os pontos de interseção desta reta perpendicular com o círculo.

Passo 3: Construa a semi-reta AP'. Construa a reta perpendicular a esta reta por P.

Passo 4: Construa o ponto de interseção da reta perpendicular construída com a reta OA. Chame-o de A'.

Passo 5: Prove que A' é Inv(A), mostrando que satisfaz a propriedade da definição.

Passo 6: Manipule o ponto A e observe a imagem Inv(A). Observe o que ocorre quando A é interno ou externo ao círculo. Em particular, observe o que ocorre quando A pertence ao círculo.

As duas construções mostram que a Inversão faz parte da metodologia "régua-compasso". Portanto, num ambiente de geometria dinâmica a função "Inversão" pode ser utilizada para construir imagens de figuras por esta transformação.

As propriedades importantes desta transformação não são intuitivas, mas um dos objetivos deste Curso é evidenciar o uso de tecnologia como facilitador da compreensão delas, por meio da visualização e confirmação das mesmas. A prova formal das propriedades não é fácil, em geral, e está além do escopo deste Mini-Curso.

Uma característica importante da inversão é que ela inverte círculos e retas em círculos e retas, de diferentes maneiras que dependem das posições relativas com o círculo base e seu centro. A seguinte Figura 11 ilustra alguns desses casos.

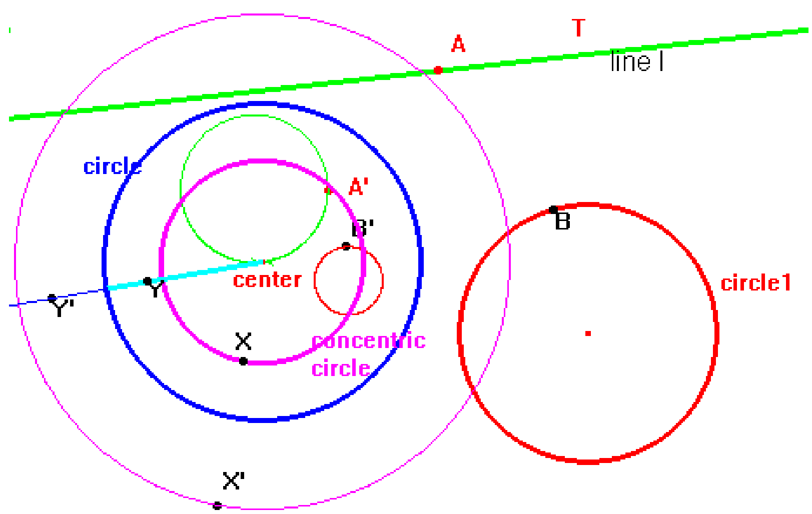

Figura 11: Propriedades da Inversão.

Na Figura 11, temos ilustrações de alguns casos notórios da Inversão: a) uma reta que não contém o centro do círculo base é transformada num círculo que contém o centro; b) um círculo concêntrico é transformado num círculo também concêntrico; c) um círculo não concêntrico que não passa pelo centro do círculo base é transformado em círculo e não contém o centro do círculo base; d) um segmento que é um raio do círculo, sem conter o centro, é transformado em semi-reta exterior ao círculo com origem na extremidade do raio e mesma direção radial. Lembre-se de que a Inversão é involutiva, portanto os casos recíprocos são também válidos.

Em particular, uma interpretação fácil da versão no plano da conhecida projeção estereográfica de um círculo a partir do seu polo Norte sobre a reta tangente ao círculo pelo polo Sul pode ser feita, como um caso da Inversão.

Uma propriedade importante da Inversão é de preservar o ângulo entre curvas, o que implica que a Inversão é um conceito da Geometria Conforme.

Uma ilustração dessas duas afirmações está na Figura 12.

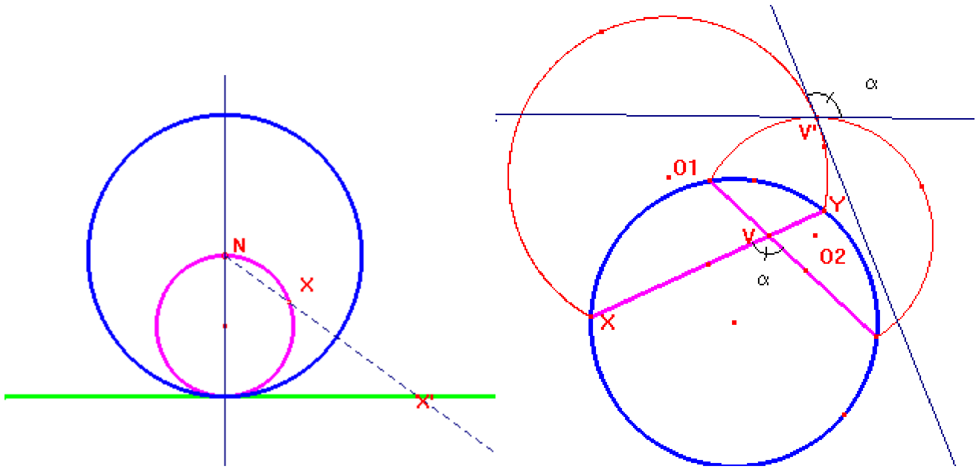

Figura 12: Projeção estreográfica como inversão; Propriedade de preservação de ângulos.

A propriedade fundamental de uma Inversão é que ela preserva a tangência entre figuras, isto é, se duas curvas são tangentes em um ponto P então a Inversão transforma-as em curvas tangentes no ponto inverso de P.

Esta propriedade é fundamental nas aplicações.

Consideremos o seguinte problema.

Problema: Dados dois círculos que se intersectam e um ponto A, construir um círculo que passa por A e é tangente aos círculos dados.

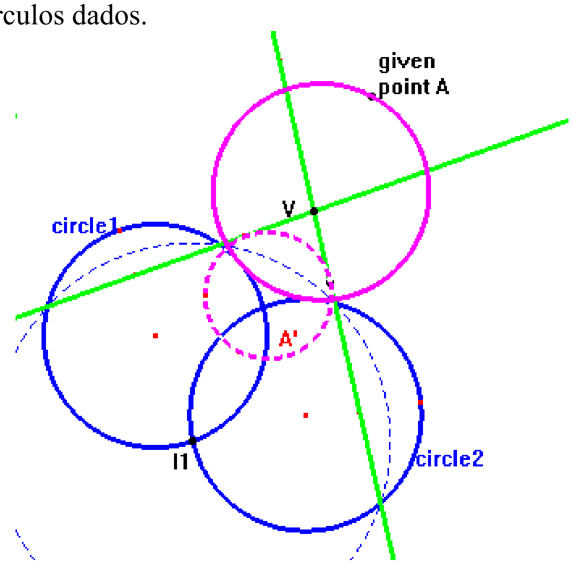

Figura 13: Círculo passando por A, tangente a dois círculos.

A solução deste problema é uma aplicação fina da propriedade fundamental da Inversão, repetidamente.

Ao analisar o problema, observamos imediatamente que a condição a ser satisfeita pela solução é a de ser tangente aos círculos dados. Portanto, a imagem inversa da possível solução deve necessariamente satisfazer a condição de tangência às imagens dos círculos pela mesma inversão.

Então o problema consiste em considerar uma Inversão adequada ao problema.

Uma hipótese chave é que os círculos se intersectam. Logo, temos por exemplo um ponto de interseção I1, que se distingue no cenário.

Se considerarmos um círculo auxiliar qualquer com centro I1, como na Figura 13, a imagem dos círculos dados pela Inversão correspondente são retas que se intersectam em V= Inv(I1).

Considerando agora A'=Inv(A), o problema se transforma no caso já estudado em 2.3 Método de Semelhança, isto é, de construção de um círculo tangente a duas retas e que contém o ponto A'.

A propriedade fundamental implica que a imagem inversa deste círculo é o círculo solução que passa por A e é tangente aos círculos dados inicialmente.

Notemos que a argumentação acima segue de perto a metodologia de Pogorelov, e é um exemplo claro da vantagem metodológica aliada à exploração da geometria das transformações, mediada pela tecnologia.

O seguinte problema é uma variação ligeiramente mais complicada do problema estudado, e constitui um dos problemas que prepara o estudo para resolução dos famosos Problemas de Apolônio, que consistem em problemas de tangência envolvendo três objetos (círculos e retas).

Problema: Construir um círculo tangente a três círculos dados, sendo que dois dos quais se intersectam.

A Inversão é rica em aplicações e exerce papel fundamental na construção de modelos de Geometria Hiperbólica, que não será tratada neste Mini-curso.

3.4 Aplicação

Para terminar, apresentamos um exemplo de como a metodologia de Pogorelov pode auxiliar o estudo de um problema de construção geométrica, destacando as vantagens de trabalhar num ambiente computacional.

O problema a seguir é adaptado do enunciado em (Arconcher, 2002), e é um dos problema "sangaku", da Matemática japonesa antiga. Sobre o significado do termo "sangaku" e seu valor histórico e cultural, indicamos a referência (Fukagawa-Pedoe, 1989).

Problema: "Dado um triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, inscrito num círculo (diâmetro AB), construir um círculo tangente ao círculo e aos catetos AC e BC."

Este é um problema bastante difícil de atacar diretamente com a metodologia "régua-compasso" usando lápis e papel. Apesar de não ser legitimado por esta metodologia, o estudo a seguir conduz claramente as idéias matemáticas acerca da possível solução, mostrando o valor didático da metodologia de Pogorelov para o ensino da geometria.

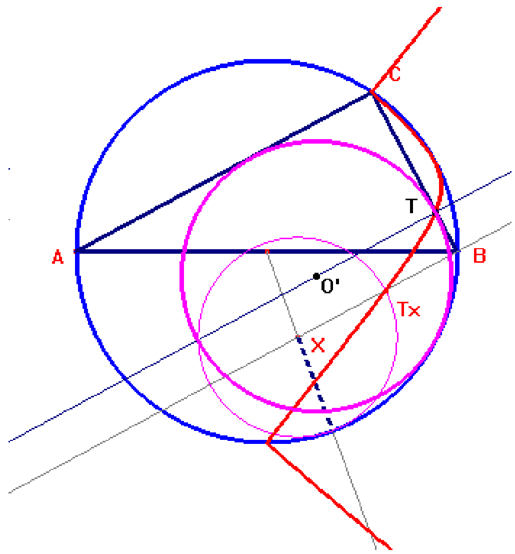

Figura 14: Aplicação a um problema sangaku.

Para analisar a solução deste problema, a propriedade que se destaca é a de tangência simultânea a um círculo e a dois lados retos de um triângulo. A tangência entre o círculo solução e o círculo dado implica que seus centros precisam ser colineares. A tangência da solução aos lados AC e BC implica que o centro da solução é eqüidistante de AC e BC, isto é, o centro da solução estará na bissetriz do ângulo C.

Usando um ambiente de geometria dinâmica (no caso, Cabri) podemos proceder a um estudo passo a passo, em que a argumentação matemática pode ser experimentada e verificada.

Começamos com um ponto X sobre a bissetriz do ângulo C. Construimos uma semi-reta OX, onde O é o centro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. A interseção desta semi-reta com o círculo é um ponto Q.

O círculo de centro X e raio XQ é tangente ao círculo dado. Para que esse círculo seja a solução, é necessário que XQ seja igual à distância entre X e os lados AC e BC. Tal distância é medida sobre a perpendicular a um dos lados, digamos BC, que passa por X.

Seja então Tx o ponto de interseção desta reta perpendicular ao lado BC com o círculo de centro X. O círculo de raio XQ seria a solução somente se este ponto Tx estivesse sobre o lado BC.

Portanto, o ponto T de tangência do círculo solução com o lado BC pertence ao lugar geométrico de todos pontos Tx quando X percorre a bissetriz de C, e também ao lado BC. Confira a Figura 14. Observamos que a versão *plus* do Cabri II é capaz de construir um ponto de interseção entre um lugar geométrico e um segmento, enquanto que na versão Cabri II é necessária uma manipulação para localizar a posição do ponto T.

O centro O' da solução é obtida agora como interseção da bissetriz em C com a reta perpendicular a BC pelo ponto T.

A geometria dinâmica é absolutamente útil para executar esta experiência. A manipulação dos dados do problema ajuda a visualizar os passos deste raciocínio. Se usássemos o lado AC no lugar de BC, a simetria do lugar geométrico em relação à bissetriz implica que a solução obtida é a mesma.

Observamos assim que o uso de tecnologia valoriza a metodologia de Pogorelov, e acrescenta alternativas às tradicionais aplicações do lugar geométrico, legitimado apenas por construções "régua-compasso". Apesar de não ser considerada completa como resolução, esta experiência evidencia as propriedades geométricas da solução, cuja existência é sugerida pela própria experiência.

Além disso, uma vez visualizada a possível solução, este estudo leva ao reconhecimento de que o problema é uma variação do Problema de Apolônio. De fato, a Inversão do triângulo respeito ao círculo circunscrito leva o problema à construção de um círculo tangente a três círculos, em um dos casos degenerados da forma clássica do Problema de Apolônio. A solução real do problema é então obtida como a inversa desta solução auxiliar. Aplicando a inversão à solução visualizada confirma esta idéia.

Uma estratégia de solução se delineia com este raciocínio, e isto é um exemplo da metodologia investigativa de Pogorelov com uso de geometria das transformações.

Para terminar, uma questão que pode ser levantada é a seguinte:

Não usamos a hipótese de que o triângulo é retângulo. Então, o problema é possível se ABC não fosse um triângulo retângulo? Poderíamos considerar a experiência num caso geral, levando em consideração o teorema do círculo circunscrito a qualquer triângulo?

A resposta é afirmativa, conforme a experiência pode confirmar. A Figura 15 ilustra o caso geral.

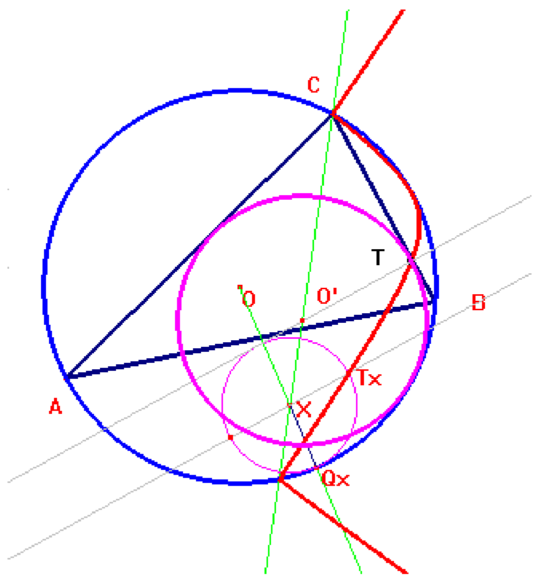

Figura 15: Caso geral.

Referências:

Arconcher,C, Sangaku, A Geometria Sagrada, Revista do Professor de Matemática, 49, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002, pp 3-10.

Baldin, YY, Villagra, G L, Um estudo visual dos movimentos rígidos do plano com Cabri-Géomètre, Anais do 1º. Cabriworld, PUC-SP, 1999.
http://www.cabri.com.br/anais_cabriworld/pa/pa_yurikobaldin.htm

Baldin, YY, Hasegawa, R, Villagra, G L, Focal properties of conics and applications, Proceedings of 2nd Cabriworld, Université du Quebec à Montréal, 2001, CD-ROM.

Baldin, YY, Villagra, GL, Atividades com Cabri-Géomètre II para Cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio, EdUFSCar, 2002.

Baldin, YY, Resolution of Geometric Construction Problems with dynamic geometry, after Pogorelov, submetido para Proceedings of Cabriworld 2004, Università di Roma, 2004.

Baldin,YY, Resolução de Problemas e o Ensino de Geometria, Texto de Mini-Curso, SBPC-Teresina, 2004.

Borwein, J, Bailey, D, Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century, Natick, MA, A K Peters, 2003.

Fukagawa, H, Pedoe, D, Japanese Temple Geometry Problems, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada, 1989.

Laborde, C, Technology Used as a Tool for Mediating Knowledge in the Teaching of Mathematics: The Case of Cabri-geometry, in Proceedings of 8th Asian Technology Conference in Mathematics, Vol 1, Taiwan, 2003, pp 23-37.

Lagrange, J.-B., Artigue, M, Laborde, C, Trouche, L, Meta study on IC technologies in education. Towards multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics, in M.v.d. Heuvel-Panhuizen (ed), Proceedings of the 25th conference of international group for psychology of mathematics education, Vol 1, Utrecht, 2001, pp 111-122.

Mariotti, A, Technological advances in mathematical learning, in L. English (ed) Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ, 2002, pp 695-723.

Pogorelov, A, Geometry, Mir Publishers, 1987.

Polya, G, How to Solve It, A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, 1st Edition 1954, 2nd Edition 1975; A arte de resolver problemas, Editora Interciência, 1986.

Weisstein, E W, "Experimental Matrhematics", From Mathworld – A Wolfram Web, http://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html