II Bienal da SBM

Texto preliminar de mini-curso laboratório

Comparação de ensino matemática no Brasil, Rússia e outros países

André Toom
Departamento de Estatística, CCEN
Universidade Federal de Pernambuco
E-mail toom@de.ufpe.br, andretoom@yahoo.com

Sou matemático de origem russa. Passei os primeiros quarenta anos de minha vida em Moscou. Estudei na escola pública, depois na Universidade de Moscou, depois trabalhei como pesquisador na Universidade de Moscou, depois passei vários anos nos Estados Unidos e no Brasil e agora sou professor na Universidade Federal de Pernambuco. Como é típico dos matemáticos russos, sempre tive interesse no ensino de matemática. A lista das minhas publicações inclue uma centena de itens, metade em pesquisa matemática, metade sobre ensino de matemática. Tive oportunidade de comparar o ensino de matemática na Rússia, nos Estados Unidos e no Brasil com base nas minhas experiências. Também estudei vários documentos nacionais e internacionais sobre o ensino de matemática em vários países.

Nas últimas décadas várias comparações internacionais mostraram diferenças enormes na qualidade do ensino entre os países. Vamos falar de TIMSS, a mais importante destas pesquisas.

País	*Média*
Cingapura	601
Coréia (do Sul)	577
Japão	571
Hong Kong	564
Bélgica (flamengo)	558
República Tcheca	523
Holanda (*)	516
Bulgária (*)	514
Áustria (*)	509
Eslováquia	508
Bélgica (francês)	507
Suíça	506
Hungria	502
Rússia	501
Irlanda	500
Austrália (*)	498
Eslovênia (*)	498
Tailândia (*)	495
Canadá	494
França	492
Alemanha (*)	484
Suécia	477
Inglaterra	476
Estasos Unidos	476
Nova Zelândia	472
Dinamarca (*)	465
Escócia	463
Letônia (letão)	462
Noruega	461
Islândia	459
Romênia (*)	454
Espanha	448
Chipre	446
Grécia (*)	440
Lituânia	429
Portugal	423
Irã	401
Colômbia (*)	369
África do Sul (*)	348

Tabela 1.

Em 1995 o Departamento de Educação dos Estados Unidos, com ajuda de órgãos análogos de outros países, promoveu o **TIMSS (Third International Mathematics and Science Study, i.e. Terceiro Estudo Internacional sobre Matemática e Ciências)**. O objetivo do estudo foi comparar a qualidade de ensino em Matemática e outras Ciências em vários países. A tabela

1 nostra um dos resultados do TIMSS - média dos pontos ganhos por alunos da 7a série de vários países do mundo. Os países que não cumpriram todas as condições da pesquisa são identificados com sinal (*). Seus dados são duvidosos, mas contudo úteis.

Os países latinos-americano quase não participaram do TIMSS e quando participaram, fracassaram completamente. (Olhe a posição da Colômbia quase embaixo de toda a lista.) O Brasil não participou do TIMSS, mas podemos adivinhar que se participasse, o resultado seria péssimo. O Brasil participou de uma pesquisa international PISA e tomou o último lugar em todos os assuntos. Porém, os resultados de PISA são duvidosos pois parece que os problemas usados foram estranhos. Olha artigo de Bastiaan Braams no internete com endereco
http://www.math.nyu.edu/mfdd/braams/links/pisa0207.html

Os brasileiros têm o hábito de compara-se com a Europa. TIMSS mostra que vários países asiáticos, a saber Cingapura, Coréia do Sul, Japão, Hong Kong mostram desempenho mesmo melhor que a Europa. Isto é uma nova razão para os brasileiros preocupar-se para não acabar embaixo de todo mundo.

A tabela 2 mostra desempenho em matemática na 12-a série. Como antes, os países que não cumpriram todas as condiçõessão marcados com sinal (*).

País	*Média*
Holanda (*)	560
Suécia	552
Dinamarca (*)	547
Suíça	540
Islândia (*)	534
Noruega (*)	528
França (*)	523
Nova Zelândia	522
Austrália (*)	522
Canadá (*)	519
Áustria (*)	518
Eslovênia (*)	512
Alemanha (*)	495
Hungria	483
Itália (*)	476
Rússia (*)	471
Lituânia (*)	469
República Tcheca	466
Estados Unidos	461
Chipre (*)	446
África do Sul (*)	356

Tabela 2.

Esta tabela mostra o mais surpreendente resultado de TIMSS do ponto de vista americano: os Estados Unidos são quase embaixo da toda lista. O TIMSS mostrou a queda no desempenho dos alunos americanos ao longo da escola: na 4a série eles foram acima da média mundial, nas 7a e 8a séries eles foram abaixo da média mundial; na 12a série eles foram quase embaixo de toda a lista. Observe que os "tigres asiáticos" não participaram na 12-a série. Se participassem, o fracasso americano seria mesmo mais profundo. Um jornalista americano observou, "quanto mais nossos filhos permanecem na escola, tanto pior é seu desempenho". Este fracasso provocou muita polêmica nos Estados Unidos com manchetes do tipo "Falta de Matemática", "Um Pesadelo Americano: Educação Matemática" e "Alunos do Ensino Médio e Ratos de Laboratório". Isto aconteceu apesar do fato que todos os problemas de TIMSS foram preparados por educadores americanos e combinam com o estilo americano. Por exemplo, TIMSS não contém quase nenhum problema teórico, onde é necessário provar alguma coisa.

Também vale a pena examinar a situação com a “elite”, i.e. alunos que estudam matemática avançada. **(Achievement in Advanced Mathematics Content Area.)** Veja a tabela 3.

Números e equações

País	*Média*
Rússia (*)	586
França	548
Lituânia (*)	547
Grécia	539
Suécia	523
Austrália (*)	517
Suíça	514
Canadá (*)	519
Chipre (*)	510
Dinamarca (*)	504
Eslovênia (*)	491
Rep. Tcheca	460
Itália (*)	460
EUA (*)	459
Alemanha (*)	457
Áustria (*)	412

Cálculo

País	*Média*
Chipre (*)	561
França	560
Grécia	538
Rússia (*)	537
Austrália (*)	530
Itália (*)	520
Suíça	512
Dinamarca (*)	508
Canadá (*)	508
Lituânia (*)	498
Suécia	480
Eslovênia (*)	471
Alemanha (*)	454
EUA (*)	450
Rep. Tcheca	446
Áustria (*)	439

Geometria

País	*Média*
Rússia (*)	548
Suíça	547
França	544
Dinamarca (*)	527
Chipre (*)	517
Lituânia (*)	515
Canadá (*)	499
Grécia	498
Austrália (*)	496
Rep. Tcheca	494
Suécia	492
Alemanha (*)	487
Itália (*)	480
Eslovênia (*)	476
Áustria (*)	462
EUA (*)	424

Tabela 3.

Como antes, os países que não cumpriram todas as condições, são marcados com sinal (*). Aqui encontramos o fracasso dos Estados Unidos mais visivel. Isto parece um paradoxo: um país tal poderoso como os EUA tem desempenho muito abaixo em estudos avançados de seus alunos. Nas próximos páginas vamos tentar resolver-lo, mas mesmo agora podemos concluir que apesar de poder dos EUA o Brasil não deve seguir ensino americano. É melhor buscar exemplos do ensino bom nos outros lugares. Por exemplo, ensino avançado é bastante bom na Rússia. Preste atenção para desempenho ótimo da Russia nas todas três colunas.

Hoje em dia existe muita preocupação em todo o mundo sobre ensino de Matemática. É bem conhecido que o ensino brasileiro precise melhoramento. Mas o que é melhoramento? É claro que Brasil deve olhar o ensino dos outros países e seguir exemplos melhores. Mas quais são os melhores? Neste artigo quero comparar o ensino brasileiro de matemática com o mesmo em outros países e fazer algumas conclusões.

Recentemente Lawrence Summers, o ex-secretário do Tesouro americano, atual reitor de Harvard, visitou o Brasil e deu entrevista para a Veja (31 de março de 2004, pp.11-15), onde ele declarou: *“Nos mercados de trabalho nacionais, as recompensas para aqueles que têm capacidade de aprender e aplicar seus conhecimentos não param de aumentar. No mercado global, a qualidade da mão-de-obra de um país tornou-se um fator central no cálculo das empresas, quando elas têm de decidir onde investir seu dinheiro.”*

Uma tendência atual importantíssima é desenvolvento de países asiaticos onde ensino de matemática as vezes é melhor que nos Estados Unidos. Um resultado disto é que companhias grandes mudam a sua produção e vagas para outros países. Quando criticadas por isto, elas criticam o sistema educacional americana.

Se os EUA realmente pretendem preservar empregos dentro do país, - disse Carly Fiorina, presidente da Hewlett Packard, - o país tem que melhorar sua educação escolar, dobrando despesas federais para pesquisa, e formando uma política nacional para permitir mais lares e oficinas ter acesso as redes rápidas de dados.

Craig Barrett, o gerente da Intel Corp., declarou que os EUA não têm mais o controle de trabalhos de alta tecnologia. "As 3 bilhões de pessoas na China, Índia e Rússia estão rapidamente integradas na economia global, disse, e muitas delas são altamente educadas, logo podem fazer praticamente qualquer trabalho no mundo." Segundo Barrett, os novos trabalhos, que a Intel está abrindo nos EUA, precisam de dois anos de faculdade "só para entrar na porta."

Preste atenção que ele não mencionou o Brasil. Os dois gerentes criticavam o ensino escolar nos EUA, dizendo que escolas fazem mais para bloquear talentos em matemática e ciência que apoiar-los.

Como aconteceu que o ensino do país mais poderoso do mundo ficou atrás das necessidades da sua própria indústria? Talvez, o ensino americano necessitava de reformas? Durante todo o seculo XX o ensino americano foi reformado várias vezes, mas alguns destas reformas prejudicaram mais de que melhoraram. Um ótimo livro, o qual apareceu recentemente, a saber **"Held Back"** de Diane Ravitch, descreve estas reformas ruins com muitos detalhes.
(Diane Ravitch. Held Back. A Century of Failed School Reforms. Simon & Schuster, 2000).

No p. 16 do seu livro Ravitch escreve:
"Tanto logo que o currículo acadêmico perdeu sua importância como o foco central do sistema das escolas públicas, elas perderam sua âncora, seu sentido de missão, seu compromisso moral intensivo para desenvolvimento intelectual de cada criança. Tanto logo que isto aconteceu, os movimentos reformadores da escola começam vir e sair com rapidez surpreendente, quase casualmente, cada deixando sua marca nas escolas. Neste modo, após algum tempo, os educadores esqueceram como dizer "não", mesmo para as mais esquisitas noções do que as escolas devem fazer. Cada presumida necessidade, interesse, preocupação, problema ou pergunta achou seu lugar no currículo escolar ou forneceu um argumento para incluir novos especialistas no pessoal da escola.

Minha impressão depois de ler este livro é que a idéia mais prejudicadora foi que a escola deve ensinar exatamente e literalmente o que as pessoas vão fazer quando trabalhar. *Exemplo:* Um educador americano fez listas de atividades de trabalho e propô ensinar estes atividades na escola. Por exemplo, um funcionário dum departamento de crédito duma loja deve:

1. Encontrar pessoas que querem abrir uma conta;
2. Perguntar a elas sobre seus dados e preencher uma ficha;
3. Escrever cartas ou telefones para referência;
4. Preencher fichas;
5. Encontrar juros em livros referenciais;
6. Colocar pedidos temporariamente enquanto pareceres chegam;
7. Anotar referencias em fichas e dar elas para o chefe;
8. Escrever nomes, endereços e números de pedidos num índice;
9. Responder pedidos de pareceres de outras lojas.

Logo as escolas deven abandonar assuntos tradicionais e concentrar-se nas operações "úteis" como nesta lista.

Este exemplo é extremal, mas a tendência geral ficou no ensino americano durante várias décadas. No lugar dos cursos acadêmicos, considerados inuteis, apareceram cursos "práticos". Nas várias páginas do seu livro Ravitch menciona:

“Proteção e Conservação da Vida”, “Propriedade e Resursos Naturais”, “Produção de Bens e Serviços e Distribuição de Volta da Produção”, “Consumação de Bens e Serviços”, “Expressão de Impulsos Esteticos”, “Expressão de Impulsos Religiosos” (p.241), como fazer compras nas lojas, compras em prestações, seguros, impostos e orçamento caseiro (p. 329), cursos como dirigir carros, fazer compras, estudos correcionais, ensino do consumidor, treinamento para casamento e vida adulta, ensino de saúde, datilografia e economia caseira (p. 404), “cheerleading”, “governo dos alunos”, “comunicações” (p. 408), “teclagem”, “conhecimento cultural”, “como arrumar a casa”, “introdução ao gerenciamento do restaurante”, “comida para solteiros”, “estudos da criançada”, “vestidos” (p. 408-409),
conversa de meninas, o que acontece, relações pessoais, homem para homem.

Tudo isto foi feito sob pretexto que assuntos acadêmicos (álgebra, geometria) são irrelevantes na vida real. No começo das reformas educadores americanos queriam separar os alunos segundo suas possibilidades e ensinar assuntos acadêmicos só para alunos mais inteligentes e interessados. Mas outros alunos poderiam ficar zangados, logo os educadores acabaram não ensinando a ninguém.

Todo o tempo existiram críticos. Um deles lamentou que “ todas crianças é esperado estudar somente o que é visualmente atrativo, engraçado e emocionalmente agradável” (p. 311).

As vezes os pais lutaram contra idéias esquisitas. Uma destas lutas foi organizada pelo famoso escritor Robert Penn Warren, o qual acusou educratas de “democracia arrogante num lado e seu autoritarismo altivo no outro”. (p. 342)

Em 1983 os educadores americanos publicaram *“Uma Nação Arriscada” (A Nation at Risk)*, um livro famoso, que criticou o ensino americano muito duro. Ele escreveu: *“Se um poder estrangeiro inimigo tentasse impor na América a performance medíocre educacional, a qual existe hoje, poderíamos considerar isto como um ato de guerra.”* É claro que na realidade nenhum poder estrangeiro não impôs nada deste tipo. A performance medíocre educacional foi criada na própria América.

Queremos emfatizar que a importância da escolarização é muito mais profunda de que alguns educadores acham. Uma pessoa escolarizada pode estudar assuntos novos durante toda vida. Isto foi confirmado recentemente num encontro de especialistas em programação sobre contratasão de programadores.
Veja **Como entrevistar um programador (How to Interview a Programmer) http://artima.com/wbc/interprog.html)**
Um participante, Dave Thomas, conhecido como expert em software, declarou: *Contrata por talento. Um dos maiores erros de companhias é contratar segundo uma lista da loja: preciso de um programador com seis anos de Java, três anos de Oracle, e dois anos de EJBs. O mundo muda, logo você tem que contratar pessoas que mudam com ele. Recrute pessoas que sabem* computação, *não necessariamente assuntos particulares e pequenos. Eles vão não somente adaptar-se melhor no futuro. Mesmo agora provavelmente eles serão inovadores.*

Mostramos um exemplo de pragmatismo bobo nos EUA agora na área da matemática. O problema seguinte é bastante razoável:

Sally é cinco anos mais velha que seu irmão Bill. Quatro anos depois a idade dela sera o dobro da idade de Bill na mesma época. Qual é a idade de Sally agora?

Talvez, os EUA seja o único país no mundo onde este problema é despresado pela seguinte razão: “Uma vez, quem fazeria tal pergunta! Quem quer saber isto? Se Bill e Sally não sabem suas idades, isto é uma familia boba. **Michael K. Smith. Humble Pi. "Prometeus Books", 1994, p. 85.**

Como um exemplo de atitude muito mais produtiva, referimos para um livro russo **Ya. I. Perelman. Álgebra recreativa. "Nauka", Moscou, 1976**, onde o segundo capítulo, chamado "A linguagem da álgebra", contém 25 sessões, cada uma dedicada a um problema. Um deles, chamado "Equação pensa no lugar de nós", começa assim: "Se você tem dúvidas que uma equação é as vezes mais precavida que nós, resolve o problema seguinte:

O pai tem 32 anos de idade, o filho tem 5 anos. Quantos anos depois a idade do pai será dez vezes mais do que a idade do filho?

Uma equação é feita e resolvida, mas a resposta é negativa: -2. O que isto significa? Perelman explica: "Quando fizemos a equação, não pensamos que a idade do pai nunca será dez vezes maior do que a idade do filho no *futuro* - esta relação foi possível somente no *passado*. A equação tornou-se mais pensante que nós e lembrou-nos da nossa omissão." Eu acredito que este comentário é interessante, e constitue uma razão suficiente para discutir este problema.

A atitude negativa para problemas verbais é bastante típica nos Estados Unidos. Por exemplo, a revista americana para professores do ensino médio "Mathematics teacher" publicou um artigo dum educador americano com influencia, Zalman Usiskin, onde ele declarou: *Problemas verbais tradicionais (moedas, idade, misturas, distância-velocidade-tempo, e algarismos) foram incluidos no curriculo por uma meta muito valiosa, a meta de translação do mundo real para matemática. Mas, com exceção de problemas com misturas, eles não ajudam alcançar esta meta.*
Zalman Usiskin. What Should *Not* Be in the Álgebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students? *Mathematics Teacher, v. 88, n. 2, February 1995, pp. 156-164.*

Para entender melhor as atitudes de alguns educadores americanos, imaginemos que num país professores futuros de literatura são doutrinados que todos contos de fadas, fábulas, histórias fantásticas são inúteis. Quando ouvir uma fábula, onde animais falam com um outro, eles não podem compreender e desfrutar-la normalmente como todas crianças, mas esforçam-se para caber esta fábula na vida real: talvéz, os animais foram especialmente treinados para falar? talvez, alguma operação foi feita com eles? talvez, isto foram pessoas disfarçados? etc. Isto é análogo da atitude de alguns educadores americanos para problemas verbais: eles insistem que o problema deve ser possível na realidade. Estes educadores sofrem de um jeito de deficiência mental, que não é inata mas criada artificialmente através de sua preparação profissional.

A América tem uma tradição forte de inventar problemas interesantes. O jogo "Quinze" (Sam Loyd) e o jogo "Vida" (J. Conway) pertencem aos mais valiosos entretenimentos intelectuais. Porém, agora esta grande tradição é abandonada por educadores doutrinados no espírito da "vida real". Do seu ponto de vista a famosa fábula "O corvo e a raposa" é útil somente para pessoas que uma vez vão ficar numa arvore com um pedaço de queixo em suas bocas.

Do que depende a qualidade do ensino de matemática? **George Polya**, um famoso matemático e educador, achava problemas verbais muito importantes e explicou porque no seu ótimo livro **Descobrimento Matemático. Como entender, estudar e ensinar a resolver problemas.** *George Polya. Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined edition. John Wiley & Sons, 1981, p.59.*

Por quê problemas verbais? Eu espero pasmar só um pouco de pessoas afirmando que a tarefa importantíssima de ensino escolar é ensinar a fazer equações para resolver problemas verbais. Porém, existe um argumento forte em favor desta opinião. Quando resolver um problema verbal fazendo equações, o aluno traduz uma situação real para termos matemáticos; ele tem a oportunidade de experimentar que conceitos matemáticos podem ser relacionados com as realidades, mas estas relações devem ser elaboradas cuidosamente.

Vamos examinar e comparar o nível de problemas verbais nos livros didáticos em três países: Rússia, Cingapura e Brasil.

Livros didáticos da Rússia

Um destaque importante do ensino russo é a abundância de problemas verbais e crescimento regular da dificuldade destes problemas através das séries. Observamos isto citando vários livros didáticos russos.

Matemática 2.

Livro didático russo para 2-a série. Moscou, 1995.

O livro tem 160 páginas, 2 ou 3 problemas em cada página. A maioria dos problemas são com um passo, mas no final do livro começa a transição suave para problemas com dois passos. Exemplos:

Problema 1 na p. 142.

Num aquário há 8 peixes, noutro aquário há outro tanto. Quantos peixes há em dois aquários?

Este problema é no meio caminho entre um e dois passos.
Solução com dois passos: 1) entender que há 8 peixes no segundo aquario; 2) Somar 8 e 8.
Solução com um passo: multiplicar 8 por 2.
Este problema ajuda entender que multiplicar por dois é mesmo que somar dois números iguais.

Os proximos problemas são com dois passos:

Problema 4 na p. 145.

Um lojista tinha 20 m de fita branca e 18 m de fita vermelha. Ele vendeu 10 m de fita vermelha. Com quanto metros de fita ele acabou totalemente?

Problema 2 na p. 146.

Foram 75 passageiros num navio. Num porto 25 passageiros desceram, mas 20 passageiros novos subiram no barco. Quantos passageiros ficaram no navio depois disto?

Problema 3 na p. 143. (conectado com linguagem e imaginação.)

Faça um desenho para cada problema e responda a pergunta. **1) 6 lápis foram distribuídos entre três alunos igualmente. Quanto lapis cada aluno recebeu?** **2) 6 lápis foram distribuídos para alunos tal que cada aluno recebeu três lápis. Quantos alunos receberam lápis?**

Matemática 3.

Livro didático russo para 3-a série. Moscou, 1988.

O livro tem 190 páginas, 4 ou 5 problemas em cada página, alguns com um passo, alguns com dois, mas no final do livro começa a transição suave para problemas com três passos. Exemplos:

Problema 28 na p. 184.

6 cadeiras foram vendidas por 36 rublos e 2 poltronas foram vendidas por 60 rublos. Por quantos rublos uma poltrona é mais cara que uma cadeira? Quantos vezes uma cadeira é mais barata que uma poltrona? Quantos vezes uma poltrona é mais cara que uma cadeira?

Problema 32 na p. 185.

Um teatro tinha 480 bilhetes. O bilheteiro vendeu bilhetes para 5 espetáculos, 16 bilhetes para cada. Com quantos bilhetes o bilheteiro acabou?

Problema 34 na p. 185.

Numa rua foram construídas 2 casas com 50 apartamentos em cada e 3 casas com 30 apartamentos em cada. Quantos apartamentos há nestas casas juntas?

Problema 36 na p. 185.

Quantos minutos um jogo de futebol é mais longo que um jogo de basquetebol, se um jogo de futebol tem dois períodos, cada um com 45 minutos e um jogo de basquetebol tem dois períodos, cada um com 20 minutos?

Matemática 4.

Livro didático russo para 4-a série. Moscou, 1992.

O livro tem 220 páginas, 4 ou 5 problemas em cada página. Nesta série todos problemas têm pelo menos dois passos, alguns três, mas no final do livro começa transição suave para problemas com quatro passos.

Prestemos atenção especial para o problema seguinte:
Problema 702 na p. 152:

Numa caixa cabe 20 kg de cenoura. Quantas caixas são necessárias para levar 675 kg de cenoura?

Na primeira vista parece que este problema pode ser resolvido com só uma operação, a saber divisão. Mas na realidade ele é um pouco mais sofisticado. Se dividimos 675 por 20, obtemos 33 3/4. Devemos apresentar este número como a resposta? Claro que não: número de caixas deve ser inteiro. Logo devemos arredondá-lo, mas para qual lado? Claro que para o lado maior, logo a resposta é 34 caixas. Vários problemas deste tipo foram discutidos em todo mundo, pois às vezes alunos apresentaram a resposta não inteira.

Problema 762 na p. 167.

Dois pedaços de fio elétrico foram comprados por 16 rublos. Um pedaço tinha 12 metros, outro pedaço tinha 8 metros. Quanto foi pago por cada pedaço?

Este problema precisa de quatro operações para ser resolvido:
a) 12+8 = 20.
b) 16/20 = 0,8.
c) 12 $\times$ 0,8 = 9,6 rublos,
d) 16 - 9,6 = 6,4 rublos.

Este problema pertence a classe chamada na Rússia *problemas com partes*. Todos estes problemas têm a mesma dificuldade: precisamos introduizir uma "*parte*" para resolvé-los. Isto ajuda no desenvolvimento do *pensamento proporcional* muito útil na matemática.

Problema 800 na p. 177.

Resolva os problemas e compare as soluções.
1) Um navio viajou 375 km em dois dias. No primeiro dia ele mudou durante 8 h e no segundo dia 7 h. Qual distância ele viajou em cada dia se sua velocidade foi constante?
2) Um navio navegou durante 15 horas em dois dias. No primeiro dia ele viajou 200 km e no segundo dia 175 km. Quantos horas ele viajou em cada dia se sua velocidade foi constante?

Problema 863 na p. 188.

Um terreno de forma retangular tem comprimento 25 m e largura 24 m. Uma décima parte dele é ocupada com construções. Uma quarta parte dele é ocupada com horta e o resto é ocupado com árvores. Qual é a área ocupada com árvores?

Problema 916 na p. 197.

Uma biblioteca precisa encadernar 4500 livros. Uma oficina pode encadernar estes livros em 30 dias, outra em 45 dias. Em quantos dias estas oficinas podem cumprir a tarefa se trabalharam ao mesmo tempo?

Este problema também precisa de quatro operações:
a) 4500/30 = 150.
b) 4500/45 = 100.
c) 150+100=250.
d) 4500/250=18.

Problema do mesmo tipo:

Problema 42 na p. 209.

Para trazer 180 t de tijolos para uma construção, um caminhão tem que fazer 30 percursos e outro 20 percursos. Em quantos percursos os dois caminhões podem trazer os tijolos se irem juntos?

Então, na 5a série alunos russos já resolvem problemas aritméticos com vários passos, o que é boa preparação para álgebra. Na 6a série eles já resolvem problemas que precisem álgebra. Vamos para um livro didatico para 6-8 séries.

Coletânea de problemas em álgebra.

Livro didático russo para 6-8 séries. Moscou, 1970.

O livro tem 320 páginas e 1950 problemas. A maioria destes problemas precisa de álgebra para resolver. Exemplos:

Problema 1244 na p. 168.

Tome qualquer número, dobrá-lo, aumenta o resultado por 30, divide o resultado por 2, subtrai o número original e você receberá 15. Explique, por quê o resultado sempre será 15.

Solução: Se o número original é X, logo os números obtidos são 2X, 2X+30, X+15, 15.

Problema 1698 na p. 252.

Há dois portos num rio com distância de 30 km entre eles. Um barco passa ida e volta entre eles em 6 horas, dos quais ele gasta 40 minutos nas paradas. Descobrir a velocidade própria do barco (i.e. sua velocidade em água parada) se a velocidade da corrente no rio é 3 km por hora.

Solução: Se X é velocidade própria do barco, logo X+3 e X-3 são velocidades com e contra a corrente. Pois 40 minutos = 2/3 hora, o tempo de viagem sem parada é 6 - 2/3 = 16/3 h. Logo temos a equação

$$\frac{30}{X-3}+\frac{30}{X+3}=\frac{16}{3}$$

que conduz a equação quadrática

$$4X^2-45X-36=0.$$

Neste tempo os alunos já podem resolver equações quadráticas. Logo eles obtém

$$X_1=12,\ X_2=-\frac{3}{4}.$$

Só a primeira raíz tem sentido, logo a única resposta é 12 km/h.

Problema 1725 na p. 255.

A altura dum cilindro é 2 cm mais que o raio de sua base. Descobrir esta altura se a área de superfície deste cilindro é aproximadamente 704 cm quadrados. Apresentar a resposta com exactidão de 1 mm.

Solução: denotamos R o raio da base em centímetros. Logo altura é R+2. Logo obtemos a equação

$$2\pi R^2+2\pi R(R+2)=704$$

ou

$$4\pi(R^2+R)=704.$$

Dividimos tudo por 4π e aproximamos $704/(4\pi)\approx 56$:

$$R^2+R-56=0,$$

de onde $R_1=7$, $R_2=-8$. Só a resposta positiva tem sentido, logo $R=7$ e a altura é 9 cm.

Problema 1736 na p. 257.

Um trem saiu duma estação e, mudando com aceleração constante numa distância de 2,1 km, acabou com velocidade 54 km/h. Descobrir sua aceleração e o tempo desta mudança.

Solução: do curso de física os alunos sabem que em movimento com aceleração constante a velocidade média é a média aritmética da velocidade inicial e a velocidade final. Em nosso caso elas são zero e 54 km/h, logo a velocidade média é $(0+54)/2 = 27\ km/h$. Logo o tempo é $2,1 \div 27 \approx 4,67$ minutos. A aceleração é aumento da velocidade dividida pelo tempo, i.e.

$$54 \div 4,67 \approx 11,6\ qm/h^2.$$

Problema 1741 na p. 257.

Numa solução, que contou com 40 g de sal, 200 g de água foram adicionadas, logo sua concentração diminuiu por 10%. Quanto água a solução contava e qual foi sua concentração anteriormente?

Solução: Denotamos de X a quantidade inicial de água pura em gramas. A massa total é (X+40), a concentração de sal é 40/(X+40) e a mesma em percentagem é $100 \cdot 40/(X+40)$. Por mesma razão a concentração final de sal em percentagem é $100 \cdot 40/(X+240)$. Logo temos a equação

$$\frac{100 \cdot 40}{X+40} - \frac{100 \cdot 40}{X+240} = 10,$$

que transformamos para equação quadrática

$$X^2 + 280X - 70400 = 0,$$

de onde $X_1 = 160$, $X_2 = -440$. É claro que só resposta positiva tem sentido, logo $X = 160\ g$. A concentração inicial de sal foi $100 \cdot 40/(160+40) = 20\%$.

Prestamos atenção para um tipo de problemas, i.e. problemas onde na primeira vista não há bastante informação. Lembramos um problema para 4a série citado anteriormente:

Uma biblioteca precisa encadernar 4500 livros. Uma oficina pode encadernar estes livros em 30 dias, outra em 45 dias. Em quantos dias estas oficinas podem cumprir a tarefa se trabalharam ao mesmo tempo?

Na realidade um dado neste problema é supérfluo: podemos resolver este problema sem usar o número de livros. Uma oficina pode encadernar $1/30$ de todos os livros por dia e outra pode encadernar $1/45$ de todos os livros por dia. Logo, trabalhando juntas, elas pode encadernar

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{3}{90} + \frac{2}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

de todos os livros por dia. Logo elas precisam de 18 dias.

Conexão com estudos avançados

Isto é um outro problema do mesmo tipo dum livro escolar russo: Problema 1436 na p.208 do mesmo livro.

Um homem está nadando contra a corrente dum rio. Na altura do ponto A ele perde um cantil, mas não repara isto e continua a nadar na mesma direção. Só 20 minutos depois ele repara a perda, começa a nadar a favor da corrente com o mesmo esforço e pega o cantil na altura do ponto B. Descobrir a velocidade da corrente, se a distância entre os pontos A e B é 2 quilômetros.

Na primeira vista pode parecer impossível resolver este problema. Mas usamos uma idéia física: se você viaja num trem, pode imaginar que o trem fica no mesmo lugar, mas todas as casas visíveis através da janela mudam na direção oposta. Nesta maneira consideramos o sistema de coordenadas conectada com a corrente, na qual a água é parada, mas as beiras mudam na direção oposta. Neste sistema o cantil fica parado e o nadador primeiro muda fora dele e depois na direção dele com a mesma velocidade todo o tempo. Pois ele nadou fora dele durante 20 minutos, precisa dos mesmos 20 minutos para voltar. Logo ele nadou em ambas direções durante 40 minutos. Logo o cantil tomou 40 minutos, o que é mesmo que 2/3 hora para fazer 2 quilômetros de A para B. Logo sua velocidade foi 2:(2/3) = 3 km/hora. Isto é a velocidade da corrente.

Acima de livros didáticos, existe uma muito importante literatura recreativa, útil para entusiasmar jovens a interessar-se em matemática. Malba Tahan, Martin Gardner e Perelman são os mais famosos autores deste tipo no Brasil, Estados Unidos e na Rússia respectivamente. Os mesmos títulos de livros de Perelman "Aritmética divertida", "Álgebra divertida", "Geometria divertida", avisam aos jovens que a matemática escolar é interessante e a gente pode encontrar assuntos interessantes perto dela.

Um destaque favorável do ensino de matemática na Rússia é que o crescimento regular da dificuldade no currículo russo permite conexão suave do ensino escolar com a matemática recreativa e estudos avançados: círculos e olimpíadas e com pesquisa na Matemática. Os mais difíceis problemas na escola aproximam-se para mais fáceis problemas nas olímpiadas, logo não há abismo entre escola e olimpíadas.

Exemplo: problema usado na olimpíada de Moscou em 1963 na 9 série.

Dado um retângulo com relação de lados 9:16. É possivel inscrever nele um outro retângulo com relação de lados 4:7 tal que cada lado do primeiro retângulo contém um vértice do segundo retângulo ?

A resposta é negativa, o que é possível provar pela contradição: supor que isto é feito, denotar os pedaços dos lados do retângulo grande de $4x, 7y, 4y, 7x$ e observar que $4x+7y : 4y+7x = 9 : 16$, o que é impossível pois x e y devem ser positivos. Este problema foi muito parecido num problema do livro didático de geometria escolar, só com números diferentes.

Um exemplo mostrando que na Rússia problemas escolares podem entusiasmar um cientista futuro. Vladimir Arnold, um famoso matemático russo, lembra numa entrevista como ele resolveu um problema verbal deste tipo na escola e como isto foi sua primeira experiência na Matemática.

Lui, S. H. An Interview with Vladimir Arnold. Notices of the AMS, vol. 44, n. 4, pp. 432-438.

Duas pessoas levantam-se ao raiar do Sol e começam andar, cada uma com velocidade constante. Uma andou de A para B, outra de B para A. Elas encontram-se ao meio-dia e continuam a andar nas mesmas direções. Uma alcança B às quatro horas da tarde, a outra alcança A às nove horas da tarde. Em qual hora foi a ascenção do Sol nesta dia?

Arnold disse: *Eu passei toda a dia pensando neste problema velho e uma solução (baseada no que é chamado agora argumentos de escala, análise de dimensão, ou teoria de variedades tóricas dependente do seu paladar) chegou como uma revelação. O sentido de descobrimento que eu tinha nesta época (ano 1949) foi exatamente o mesmo como nos todos problemas seguintes, muito mais sérios* $<\cdots>$ *Isto é desejo experiênciar este sentido maravilhoso mais e mais vezes, qual foi e ainda é minha motivação maior em matemática.*

A experiência de Arnold não foi única. Desde o seculo XIX a Rússia tem tradição de usar problemas bons no ensino de Matemática.

O problema seguinte apareceu na olimpíada de Moscou em 1940:

Há dois portos num rio, A em cima e B embaixo. Uma lancha precisa de 5 horas para ir de A a B e 7 horas para voltar. Quantos horas uma balsa precisa para ir de A a B ?

Vários anos depois este problema apareceu no livro didático de álgebra escolar. Este problema apresenta a mesma dificuldade: não é claro como fazer mesmo o primeiro passo. Porém, podemos introduizir uma unidade *ad hoc* - esta mesma distância. Chamemos esta distância de *percurso*. Logo podemos introduzir a unidade de velocidade: um percurso por hora, abreviado como p/h. Seja a velocidade da lancha em água parada é X p/h e a velocidade da corrente Y p/h. Quando a lancha vai para baixo do rio, sua velocidade é X+Y p/h e quando voltar, sua velocidade é X-Y p/h. Logo

$$X+Y=\frac{1}{5} \text{ e } X-Y=\frac{1}{7}.$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$X=\frac{6}{35} \text{ e } Y=\frac{1}{35}.$$

A velocidade de balsa é Y, logo o tempo para a balsa ir de A para B é a distância dividida pela velocidade, a saber

$$1\div\frac{1}{35}=35 \text{ horas.}$$

Acho que neste sentido o ensino de Matemática nas escolas russas realmente é melhor que nas escolas americanas. Perguntei a vários matemáticos americanos, como eles começaram a amar a Matemática e nenhum mencionou programa escolar. Judith Roitman, uma educadora americana bem conhecida, declarou: "O curso de álgebra no 2o grau, qual eu fiz (avançado também) foi nada mais que tabelas impodos e algoritmos impodos. Isto foi chato, chato, chato e se qualquer um dissesse para mim que eu tornaria-me matemática, eu riria dele."

Minha filha sempre foi interessada em artes, mais do que em ciência, mas, quando mudou da Rússia para a América e começou a estudar em escolas americanas, foi surpreendida pela pobreza de conteúdo de Matemática em comparação com as escolas russas. Na série dela foi tres turmas: lenta, média e rápida. Minha filha foi colocada ma turma média. Todos problemas foram com um passo. Minha filha pediu mudar-la na turma rápida, mas foi recusada pois seu inglés ainda foi fraco. Vários mezes depois consegiu mudar para turma rápida, mas encontrou ali os mesmos problemas com um passo! Nas escolas russas, os alunos resolvem problemas com vários passos já na 4^a série.

Nas escolas americanas mesmo na 6^a série os alunos ainda resolvem problemas com apenas um passo. Pode imaginar como isto chato é para alunos inteligentes.

Livros didáticos de Cingapura

Crescimento gradual bem preparado encontramos também em livros didáticos de Cingapura. Observamos vários livros didáticos.

Primary Mathematics 3A. Third Edition.
Curriculum Planning & Development Division
Ministry of Education. Singapore

O livro é chamado "textbook" e tem 104 páginas. Isto não e o único livro usado nesta série. Tem também dois "workbooks" e guia do professor.

A maioria dos problemas tem só um passo, o que é menor que nos livros russos, mas números são mais complicados que nos livros russos. Também, encontram-se problemas intermediários entre um e dois passos. O livro tem cinco capítulos chamados:

1. Números até 10000. (No livro didático russo da 3a série todos os números não excedem mil e nos parámetros brasileiros para 1-4 séries todos os números não excedem cem.)
2. Adição e subtração.
3. Multiplicação e Divisão.
4. Tábuas de Multiplicação de 6,7,8 e 9.
5. Dinheiro.

O último problema no livro.

Cik Faridah comprou 8 pacotes de biscoitos para uma festa. Foi 12 biscoitos em cada pacote. Depois de festa 28 biscoitos ficaram deixados. Quantos biscoitos foram comidos na festa?

Este problema precisa de duas operações para ser resolvido.

Primary Mathematics 4A. Third Edition.
Curriculum Planning & Development Division
Ministry of Education. Singapore

Este livro tem 96 páginas e 7 capítulos chamados:

1. Números naturais.
2. Multiplicação e Divisão de números naturais.
3. Frações.
4. Tabelas e Grafos.
5. Ângulos.
6. Retas Perpendiculares e Paralelas.
7. Área e Perímetro.

Contudo, problemas verbais não são esquecidos. O último problema no livro:

Sr. Chen importou 138 caixas de mangas. Foram 24 mangas em cada caixa. Ele reservou 72 mangas para seus amigos e vendeu os outros para três compradores. Se cada comprador comprou o mesmo número de mangos, quantos mangos cada comprador comprou?

Este problema precise três operações para resolver.

Primary Mathematics 5A. Third Edition.
Curriculum Planning & Development Division
Ministry of Education. Singapore

O livro tem 96 páginas e 6 capítulos:
1. Números naturais. (Apesar da semelhança com o 1o capítulo do livro da 4a série, o conteúdo é novo; ele contém assuntos novos incluindo aproximação e estimação.)
2. Multiplicação e Divisão por Número Natural com 2 algarismos.
3. Frações. (Também todo conteúdo é novo.)
4. Área dum Triângulo.
5. Razão.
6. Ângulos. (Também assuntos novos.)

Um dos últimos problemas no livro.

O razão do comprimento dum campo retangular e sua largura é 4:3. O comprimento do campo é 20 m. Encontra sua área e perímetro.

Primary Mathematics 6A. Third Edition.
Curriculum Planning & Development Division
Ministry of Education. Singapore

O livro tem 96 páginas e 5 capítulos:
1. Álgebra.
2. Figuras sólidas.
3. Ratio.
4. Porcentagem.
5. Velocidade.

Um dos últimos problemas no livro.

Ben e David viajaram com bicicletas na distância de 24 km. Eles começaram na mesma hora. David completou a viagem 20 minutos antes de Ben. Se a velocidade média de David foi 9 km/h, qual foi a velocidade média de Ben?

Solução:
Tempo de David foi $24/9 = 8/3$ horas.
Tempo de Ben foi $1/3$ hora mais, a saber $8/3 + 1/3 = 3$ horas.
Logo sua velocidade foi $24/3 = 8$ km/h.
Este problema precisa só de três passos, mas tem dificuldades novas: lidar com horas e minutos e com velocidade.

Conclusão: os livros didáticos da Rússia e Cingapura são escritos segundo parâmetros claros e lógicos, tal que repetições inúteis são excluídas; alunos avançam todo o tempo. A atenção dos alunos não é esticada em todas as direções, mas concentrada em assuntos cuidosamente escolhidos, onde eles alcançam bom entendimento e esperteza. Problemas verbais na Rússia tem um pouco mais passos que na Cingapura, mas os números usados na Cingapura são maiores que na Rússia.

Logo na Rússia e na Cingapura ensino em primeiras séries é razoavelmente bom. Vamos ver que no Brasil a situação é pior.

Parâmetros Curriculares e Livros Didáticos do Brasil

Nos últimos anos o Ministério da Educação do Brasil decidiu publicar documentos para organizar o ensino. Li os parâmetros brasileiros de Matemática das primeiras quatros séries chamados:

Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática.
Volume 3. 2a edição. Brasília, 2000.

Ainda que este livro pertence a 1-4 séries, não descobri nenhuma dica disto na capa. (Estilo irresponsável e evasivo, típico de educratas.) Também, não há nenhuma dica sobre o que fazer em cada série. Observei que todos os problemas neste livro precisam de só uma operação aritmética para resolver. Exemplo:

Na p. 110:

Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes?

Solução: $3 \times 8 = 24$ reais.

Marta pagou R$ 24,00 por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote?

Solução: $24 \div 3 = 8$ reais.

Marta gastou R$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R$ 3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou?

Solução: $24 \div 3 = 8$ pacotes.

Na p. 111:

A área de uma figura retangular é de 54 cm^2. Se um dos lados mede 6 cm, quanto mede o outro lado?

Solução: $54 \div 6 = 9$ cm.

Na p. 110:

Dois abacaxis custam R$2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis?

Formalmente a solução precisa de duas operações:
a) 2,50 / 2 = 1,25.
b) 1,25 $\times$ 4 = 5.
Porém, os números são tal pequenos, que é possivel entender que 4 é o dobro 2, logo o problema pode ser resolvido em uma operação: 2,50 $\times$ 2 = 5.

Na p. 112:

Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?"

Solução: $12 \div 3 = 4$ rapazes.
Comentário: para burocratas do ministério este problema parece do mesmo nível dos outros, mas na realidade é muito mais difícil e não deve ficar aqui.

Quase todos os números que acontecem nos problemas deste livro são inteiros, positivos, menos que cem, ainda que o livro menciona muito mais.

Então, os parâmetros do ministerio são bastante lamentáveis. Isto pode ter conseqüências ruins. A maioria dos professores são influenciados por avisos do governo. Talvez, eles poderiam usar problemas mais complicados, mas se autoridades dizem que problemas com um passo são suficientes, por quê esforçar-se?

Como estas recomendações do governo são realizadas na prática?

Abrimos um livro didático para 4a série:

Marcha Criança
Matemática
Maria Teresa, Maria do Carmo, Maria Elisabete, Armando Coelho
Ensino Fundamental
4a série
Edição Reformulada
Editora Scipione

O livro tem mais de trezentas páginas e 16 capítulos:
1. Números naturais.
2. Sistemas de numeração.
3. Geometria.
4. Sistema monetário brasileiro.
5. Operações com números naturais.
6. Figuras geométricas.
7. Sentenças matemáticas.
8. Números racionais: representação fracionária.
9. Medidas de tempo.
10. Números racionais: representação decimal.
11. Porcentagem.
12. Medidas de comprimento.
13. Medidas de superfície.
14. Medidas de massa.
15. Medidas de volume.
16. Medidas de capacidade.

Glossário.
Sugestões de leitura para o aluno.
Bibliografia.
Caderno de leituras.
Caderno de passatempos.
Caderno de apoio.

Presto atenção a uma diferença: o livro brasileiro contém 16 assuntos e o livro de Cingapura para a mesma série contém só 7 assuntos. O mesmo fenômeno é visivel se comparar livros dos Estados

Unidos, onde o número dos assuntos é enorme, e livros de Cingapura e Japão, onde o número dos assuntos é estritamente limitado. Na primeira vista pode parecer que quanto mais assuntos, tanto melhor. Mas tudo tem seu lado oposto. Quanto mais assuntos, tanto menos atenção para cada assunto. Depois de TIMSS educadores americanos observaram que (como conseqüência inevitável do número enorme de assuntos) o tratamento de todos os assuntos é superficial em livros didáticos americanos. A frase **"milha de largura, polegada de profundidade" (mile wide, inch deep)** foi usada nesta conexão muitas vezes como descrição de um dos maiores desméritos do currículo americano. Agora observamos a mesma coisa no Brasil. Por quê? Porque no Brasil, como nos Estados Unidos, o governo não faz seu trabalho - ele não estabelece parâmetros curriculares claros. Na ausência de avisos claros de autoridades, os autores de livros didáticos têm medo de excluir alguma coisa. Talvez, eles excluem algum assunto e no proximo dia o governo vai anunciar que este assunto é o mais importante! É claro que é impossível estudar tantos assuntos com profundidade em um ano. O que sofre mais desta repleção de assuntos é o entendimento e a solução de problemas.

O próximo problema parece o mais difícil neste livro. Problema 5 na página 265, um dos últimos problemas no livro:

Quantos litros de água ainda restam em uma caixa que mede 12 m de comprimento, 6 m de largura e 5 m de altura se foram gastos 20% de sua capacidade?

Este problema é bom e precisa de vários passos para ser resolvido. O número de passos é de três até cinco dependendo do que consideramos um passo. Os primeiros dois passos permitem encontrar o volume: 12 x 6 x 5 = 360 litros. O terceiro e quarto passo: 20 porcentos de 360 é 360 x 20/100 = 72 litros. O último passo: 360 - 72 = 288 litros. Todos os outros problemas no livro são muito mais fáceis. Contudo, este livro é melhor que avisos do ministério. O ministério deve ir em frente mostrando o caminho. No lugar disto ele fica atrás da realidade.

Nas próximas séries a diferença entre currículos brasileiro e russo é mesmo mais vísivel. Podemos observar isto usando parâmetros brasileiros para 5-8 séries:

Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 5a a 8a série. Brasília, Secretaria de Educação Fundamental/ 1998. Observamos vários problemas deste livro.
Na p. 108 encontramos o problema tal:

Há um ano atrás Carlos média 1,57 m. Neste último ano ele cresceu 0,12 m. Qual é altura de Carlos hoje?

Solução: 1,57 + 0,12 = 1,69 m.

Este problema precisa de só uma operação, o que faz impressão estranha. Os líderes do ensino brasileiro realmente querem alunos ficar com problemas deste nível até 8a série?

Um problema n p. 109:

Um prédio tem duas caixas d'água com capacidades de 5000 litros cada. Uma deles está com 1/4 de sua capacidade e a outra está com três vezes mais. De quantos litros de água o prédio dispõe?"

Solução: a) 5000/4 = 1250. b) 1250 $\times$ 3 = 3750. c) 1250 + 3750 = 5000.

Este problema é melhor, pelo menos precisa de três operações, mas este problema é sozinho no livro e para 8a série ele é bastante simples.

Na p. 81 o livro recomenda "resolver situações-problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação." Também, "resolver situações-problemas por meio de equações e inequações de primeiro grau, empreendendo os procedimentos envolvidos."

Contudo, não encontrei neste livro nenhum problema envolvendo números irracionais, nem potenciação, nem radiciação, nem inequações.

Agora olhamos, como estes parametros são aplicados na realidade. Isto é um dos mais usados livros didáticos para mesmos séries:

Giovanni, Catrucci, Giovanni Jr. **A Conquista da Matemática** **5** **FTD** **Com Projeto Interdisciplinar**

O livro contém 300 páginas e 53 assuntos - quantidade enorme! Lembra que o livro de Cingapura para 5a série contém só 6 assuntos! As crianças da 5a série podem estudar 53 assuntos novos em um ano com profundidade? É claro que não. Por quê tanto assuntos? Porque ninguém sabe o que é necessário. Imagine que os autores excluem qualquer assuntinho e amanhã o ministerio declara que este assuntinho é o mais importante. O livro não será vendido.

O que é estranho também é que os assuntos na 5-a série não são novos! A maioria deles são os mesmos que no livro da 4a série. É claro porque: recomendações do ministerio para 5-8 séries são quase as mesmas que para 1-4 séries. Logo não devemos surpreender-se que os capítulos 6-9 do livro de Giovanni e.a. são dedicados as idéias associadas à adição, subtração, multiplicação e divisão. (Como nas séries anteriores.) Todos problemas nestes capítulos são de um passo, a solução precisa só de uma operação. Por quê? Por quê o governo nunca avisou o contrário. Por quê superar os avisos do governo?

Discussão de problemas verbais

Enfatizamos que problemas verbais com vários passos são indispensáveis para o desenvolvimento intelectual dos alunos. Um problema com quatro operações não é o mesmo que quatro problemas com uma operação cada. Quanto mais é o número de operações, tanto mais importante é *escolher*, qual operação e com quais números fazer em cada passo. Isto precisa de planejamento de nível mais alto que fazer operações isoladas. Para entender melhor esta idéia, lembramos o xadrez. Ali, para resolver um problema *"os brancos começam e vencem em quatro passos"*, é necessário escolher o jeito correto de jogar entre uma quantidade enorme de todas as seqüências de sete decisões (quatro de brancos e três de negros). O número de estratégias cresce exponencialmente como função do número de passos: se em cada passo o jogador tem que escolher entre C decisões possíveis nesta posição, em n passos o número de combinações é C^n, um número que cresce rapido quando n cresce. Na realidade o número de passos possíveis é diferente em posições diferentes, mas isto é um fato bem conhecido que o número de combinações é demais grande mesmo para computadores modernos. Isto é a maior dificuldade para desenvolver programas em computadores que jogam xadrez.

É claro, que pessoas humanas, diferente dos computadores, não examinam todas as combinações, elas fazem coisas menos chatas e mais criativas. Criatividade parecida é necessária quando crianças resolvem problemas verbais: também é necessário decidir, quais operações fazer, com quais dados e na qual ordem sem examinar todas conbinações possíveis, cuja quantidade é enorme, mas a maioria são bobas. Por esta causa a solução de problemas verbais contribue no desenvolvimento da inteligência. Falando de criatividade não quero dizer de uma coisa misteriosa. Criatividade é muito conectada com cultura de pensamento, a qual se desenvolve em estudos. Nas escolas russas criatividade é possivel em todos os níveis incluindo ensino elementar. Um herói da literatura russa, Vitya Maleev, não consegue receber nota aceitável na 3a série e promete para sua professora estudar matemática no recesso acadêmico. Ele tenta resolver o problema seguinte:

Problema de Vitya Maleev. **Um garoto e uma garota coletaram 120 nozes na floresta. O garoto coletou duas vezes mais nozes que a garota. Quanto nozes cada um coletou?**

Primeiro Vitya não sabe o que fazer. Ele divide 120 em duas partes iguais, recebe 60 e pensa que talvez cada um coletou 60 nozes. Mas logo depois ele lenbra que o garoto coletou mais que a garota, logo esta resposta é falsa. Ele desenha o garoto e a garota e pensa como apresentar o fato que o garoto coletou duas vezes mais que a garota. Ele desenha dois bolsos na calça do garoto e um bolso no vestido da garota. Logo ele olha seu desenho e encontra **três bolsos!** Logo uma idéia "como relâmpago" aparece na sua mente: dividir 120 por três. Ele divide e obtem 40, que é o número de nozes em cada bolso. Então a garota tem 40 nozes. O garoto tem duas vezes mais, a saber 40 x 2 = 80 nozes. Para checar sua resposta Vitya soma 40 e 80 e obtém 120, o que confirma que sua resposta é certa. Esta história realistica de criatividade duma criança é típica do ensino russo. Ela mostra o uso de problemas verbais para estimular a criatividade de alunos mesmo na escola elementar.

Problemas verbais nos Estados Unidos

Logo depois de chegar nos Estados Unidos eu comecei a participar de várias listas eletrônicas americanas dedicadas a discussão o ensino de Matemática. Eu reparei que a atitude americana para problemas verbais é muito diferente da atitude russa. Nos EUA problemas verbais (também chamados problemas com palavras e problemas com histórias) são considerados difíceis e frustradores, mas ao mesmo tempo são considerados incompatíveis com qualquer criatividade. Numa destas listas (chamada math-teach) eu perguntei, por quê os problemas verbais são tal difíceis para os alunos americanos, ainda que eles são fáceis para os alunos russos. Isto provocou uma discussão agitada.

Uma participante mandou uma piada triste chamada **"Guia falso para resolver problemas"**:

Regra 1. Se possível, evite ler o problema. Ler o problema é só perda de tempo e causa de confusão.

Regra 2. Extraia os números do problema na ordem em aparecem. Preste atenção para os números escritos com palavras.

Regra 3. Se a regra 2 fornece três ou mais números, a melhor idéia é somar todos.

Regra 4. Se há só dois números, aproximadamente da mesma quantidade, subtrair pode dar o melhor resultado.

Regra 5. Se há só dois números, dos quais um é muito menor que o outro, divide; se o resultado parece mal, multiplique.

Regra 6. Se o problema parece necessitar de uma fórmula, escolha uma fórmula que tem bastante letras para usar todos os números do problema.

Regra 7. Se as regras 1-6 parecem não functionar, faça uma última tentativa desesperada. Tome todos os números fornecidos pela regra 2 e complete duas páginas de operações casuais usando estes números. Você deve contornar em volta de cinco ou seis respostas em cada página ao acaso que uma delas pode acontecer correta. Pode receber crédito parcial pelo esforço.

Isto é uma piada, mas uma piada triste, pois é muito parecida como realidade. Outros membros da lista confirmaram que alunos americanos realmente têm grandes dificuldades com problemas verbais. Eu perguntei, por quê, e um outro participante respondeu: "Uma pessoa perguntou, por quê problemas verbais são tão raros em livros didáticos de Matemática. A razão deve ser evidente - eles assustam professores do primeiro grau até a morte. Por quê, você acha, tinhamos uma discussão sobre "palavras-chaves"?

Devo explicar, o que são **palavras-chaves (key words)**. São palavras usados por professores e alunos americanos para decidir, qual operação usar. Por exemplo, se encontra-se a palavra "vezes", isto é um sinal que provavelmente é necessário multiplicar. A palavra "mais" é sinal de adição, "menos" é sinal de subtração etc. Uso de palavras chaves significa inabilidade de entender a língua natural, o que é emergência mais séria que a fraqueza em Matemática. Guias de palavras-chaves estão presentes em livros americanos e encontram-se na internet.

No endereço **http://purplemath.com/modules/translat.htm** encontrei a tabela seguinte:

Adição	aumentado por mais que combinado, junto totalmente soma ajuntado ao
Subtração	diminuir por menos, menor diferença entre/de menos que, mais pouco
Multiplicação	de vezes, multiplicado por produto de aumentado/diminuido tanto vezes um fator de (este tipo pode envolver adição, subtração e multiplicação)
Divisão	por, em de razão de, fator de porcentagem (divide por 100)
Iguais	é, são, foi, foram, será, serão dá, fornece vendido por

Todos os educadores americanos com os quais eu me comuniquei sempre trataram o método das palavras-chaves com raiva e desprezo. Contudo, este método desprezado floresce todo o tempo. Vale a pena perguntar, o que é realmente o mal das palavras-chaves? Não devemos explicar os sentidos das palavras para as crianças? Devemos! Bebês não nascem com sabedoria de qualquer linguagem. Eles estudam a sua linguagem natal através dos anos e fazem muitas perguntas, onde todos bons pais respondem com cuidado e atenção. É natural quando os pais ou professores da escola elementar explicam para as crianças os conexões das palavras e operações matemáticas. **Não há nada vicioso em explicar os sentidos das palavras para as crianças.** Mas por quê os educadores americanos ficam tal nervosos com o método das "palavras-chaves"? Acho que eles têm duas razões.

Primeira razão - idade. Alunos americanos fazem Álgebra I na idade em volta de 12 anos. Nesta idade explicar o que significa "quantos" ou "vezes" é bastante tarde.

Segunda razão - estas explicações lidam só com palavras ou frases isoladas e não falam da sintaxe. Mas a linguagem sem sintaxe é muito primitiva, logo o pensamento correspondente é também primitivo. Lidando com palavras-chaves, talvez é possível resolver problemas verbais com só uma operação, mas não mais.

Por quê este método desprezado floresce todo o tempo? Porque ele **realmente** ajuda os alunos fracos a resolver problemas verbais com um passo, os quais ainda enchem a maior parte de currículo americano. No lugar da raiva impotente os americanos deveriam incluir problemas mais sofisticados no seu currículo. Mas isto é dificil de fazer e ainda muitos professores americanos não podem lidar com problemas com um passo.

Isto é uma confirmação triste. Recentemente uma professora americana de origem chinesa **Liping Ma** publicou um ótimo livro *Sabedoria e Ensino da Matemática Elementar*
Liping Ma. Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Lawrence Erlbaum Associates, 1999.
Este livro mostra o despreparo dos professores americanos. Vários professores americanos e chineses da escola elementar foram convidados fazer o seguinte:

a) calcular $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

b) inventar um problema verbal, cuja solução necessita desta operação.

De 23 professores americanos, que participaram, só 9 (menos da metade) completaram o item a) e só um completou o item b). Outros ou não inventaram nada ou inventaram problemas, que precisaram de outras operações. Os professores chineses e mesmo os alunos chineses do ensino médio mostram resultados muito melhor.

Este resultado é mesmo mais chocante se entendemos que os professores americanos que concordaram em participar desta experiência foram mais fortes que a média; outros tinham medo de participar.

Apesar desta fraquesa existe uma idéia estranha dos educadores americanos que os problemas verbais são demais uniformes e não precisem criatividade. Em 1989 os educadores americanos editam um livro de tipo de parametros curriculares conhecido como *"estandardos"*. Na realidade não há estandardos ali; há recomendações vagas e duvidosas. A parte chamada **Boletim de mudanças em conteúdo e emfasis em matemática de 9-12 séries (Summary of changes in content and emphases in 9-12 mathematics)** avisam diminuir a atenção dos *"problemas verbais típicos" (word problems by type).* Como distingur um problema típico de um problema não-típico? Existem problemas verbais não-típicos? Existem problemas não-verbais típicos? Os autores não explicam nada. Participei em muitas discussões nas listas eletronicas sobre o que "estandardos" queriam dizer, encontrei muitas opiniões diferentes e nenhuma explicação certa. Esta recomendação mostra que os autores adivinham que existe alguma coisa errada no ensino de problemas verbais, mas não podem analizar, o que exatamente é errado. Eles não dizem nada sobre a qualidade do ensino, ainda que agora é bem conhecido que esta qualidade precisa melhorar muito nos EUA.

Num sentido todos problemas são típicos. O agrupamento de problemas em tipos é inevitável. Apresente um problema o qual é fora de tipos na sua opinião e vou inventar dez problemas parecidos que colocam este problema num tipo. De fato, eu tinha que fazer isto no meu ensino em graduação nos EUA: primeiro eu resolvi um problema na lousa, depois nós resolvemos um problema parecido na aula, depois eu mandei um problema parecido como dever de casa, depois eu inclui um problema parecido na próxima prova e talvez na prova final. Todos estes estágios (às vezes, mais) foram necessários, caso contrário muitos alunos não compreendem o método.

De fato, no nível escolar há *muito mais* problemas verbais diferentes de que não-verbais. Problemas verbais *ampliam* enormemente a variedade de problemas resolvidos na escola. Sem problemas verbais o currículo escolar tem só um pouco de formalismos. Com eles a aula recebe uma multidão de imagens, incluindo moedas, botões, pálitos e nozes (para estudar números inteiros), tempo e idade, trabalho e taxa, distância e velocidade, comprimento, largura, perímetro, área e volume, fios e cabos, campos, caixas, barris, bolas e planetas, preço, porcentagem, juros e desconto, massa e mistura, navios, balsas e corrente, aviões e vento, bombas e piscinas e muitas outras. Isto é experiência inestimável para as crianças destacar as características destas imagens, as quais é necessario tomar em conta (e desprezar todas as outras) para resolver um problema. De fato, esta tarefa de crianças na escola é uma versão diminuida da tarefa de cada cientista envolvido na modelagem de qualquer fenômeno da natureza.

O que é mesmo mais importante na minha opinião é que resolvendo problemas verbais, crianças têm que compreender e traduizir na linguagem da matemática uma multidão de verbos, advérbios e outras partes da liguagem que indicam *ações organizadas e relações entre objetos*, incluindo colocar, dar, tomar, trazer, encher, despejar, mudar, encontrar, alcançar, mais, menos, mais tarde, mais cedo, antes, depois, de, para, entre, através, fora e muitíssimos outros. Ainda que eu falo de "crianças", de fato eu quero dizer todas as idades, incluindo alunos de graduação, para os quais tudo isto pode ser bastante difícil. (Veja abaixo meu conto de como eu ensinei problemas verbais para alunos americanos.)

Como esta idéia estranha de uniformidade de problemas verbais apareceu na América? Eu acho que vários professores e educadores, demais incompetentes para lidar com a riqueza de problemas verbais, reduziram-los para poucos tipos, e esta redução foi aceitada por engano como destaque inevitável de problemas verbais.

Ainda que os problemas verbais são baseadas nas suposições simplificadas, estas suposições não devem ser evidentemente absurdas. Por exemplo, em problemas sobre taxas de funcionamento é melhor usar máquinas e objetos não-animadas, como bombas ou canos, não pessoas humanas, que são demais imprevisíveis. Por exemplo, o problema seguinte é mal formulado:

Manoel pode fazer um trabalho em quatro horas. Joaquim pode fazer o mesmo trabalho em seis horas. Quanto tempo eles precisem para fazer este trabalho se trabalhar juntos?

Estes amigos são bem conhecidos de anedotas e quando se encontram, provavelmente irão beber cerveja no lugar de trabalhar. É melhor apresentar a mesma estrutura algébrica numa situação mais acreditável:

Duas torneiras despejam água numa piscina. Se só a primeira torneira está aberta, ela pode encher a piscina em quatro horas. Se só a segunda torneira está aberta, ela pode encher a piscina em seis horas. Quanto tempo é necessário para encher a piscina se ambas as torneiras estão abertas?

Neste caso é acreditável que cada torneira tem uma taxa constante, o que é necessário para a solução bem-conhecida. O professor deve anunciar esta suposição no começo do estudo.

Um grande mérito dos problemas verbais é a oportunidade de ensinar *quantidades científicas*, as quais apresentam-se na escola como *números concretos*, a saber números com nomeação: um metro, duas horas, três quilogramas etc. Neste sentido, problemas verbais preparem alunos não somente para a matemática, mas também para a física. Por exemplo, um metro é a mesma quantidade de distância que cem centímetros, ainda que os números um e cem são diferentes. Quando alunos resolvem problemas verbais, atenção para unidades ajuda escolher quais operações fazer e com quais números, pois só alguns delas têm sentido. Por exemplo, não vale pena somar metros e horas ou multiplicar bicicletas e laranjas.

Mesmo na escola elementar é possivel e útil atrair atenção dos alunos para nomeações. Por exemplo, eu sempre precisei apresentar respostas com nomeação. Se um aluno, depois de resolver um problema verbal, apresenta resposta "cinco" sem nomeação, eu pergunto: "Cinco do que? Cinco doces você comeu ontem?" É importante observar que para vários alunos isto é um desafio; eles não têm hábito de esclarecer, do que falam.

Clareza com nomeações é necessária para conectar a matemática com a física. Também, ela ajuda alunos a entender que todas as unidades são criados por pessoas humanas e afinal das contas são arbitrárias. Logo cada pessoa pode criar unidades ad hoc se isto ajuda a resolver problemas.

O que pode ser ensinado na escola?

O que pode e o que deve ser ensinado na escola? Talvez, tudo mais importante? Não, existem coisas importantíssimas, as quais não podem ser ensinadas de maneira acadêmica. Um exemplo. Eu espero que todos concordem que *amor* é importante. Porém, pode imaginar uma disciplina escolar chamada *amorologia* com todos atributos acadêmicos, a saber aulas, livro didático, provas, exercícios, notas? É claro que isto é bobagem. Amor é informal por sua própria natureza e pode ser ensinado só informalemente. Todos bons pais ensinam a seus filhos amor através do mesmo processo da vida; eles amam um outro e seus filhos e *ipso facto* ensinam amor para eles. Mas isto acontece na maneira informal, não através do ensino organizado. O mesmo é verdade de várias outras noções importantissimas. Não existem e não podem existir livros didáticos ou coletâneas de exercícios sobre *senso comum, experiência de vida ou sabedoria de viver*. Tudo isto crianças adquirem no processo da vida na maneira informal. É impossível escrever um livro didático sobre experiência. Experiência pode ser obtida só através de experiência.

Contudo, hoje em dia educratos em todo o mundo tendem a excluir da escola matêrias acadêmicas e substitui-los com várias versões de amorologia. Um exemplo brasileiro. Recentemente o Ministério de Educação do Brasil lançou um programa chamada ENEM descrito da maneira seguinte: *O ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, que foi implantado em 1998, é uma avaliação diferente das avaliações já propostas pelo Ministério da Educação. Isto porque se dirige a quem deseja conhecer suas possibilidades individuais de enfrentar problemas do dia a dia, sejam eles de natureza pessoal, relacionados ao trabalho, envolvendo tarefas previstas para a universidade, ou até mesmo, de relacinamento social.*

Acho que esta tarefa é demais ampla. Se um rapaz sofre de amor não compartilhado, a escola não pode ajuda-lo e deve admitir isto honestamente.

Contudo, eu não vou criticar esta promessa gigantesca em todos os lados. Vou dizer somente que ela não pode funcionar como preparação para cientistas futuros. O cientista é uma pessoa cujos interesses vai muito longe dos "problemas do dia a dia" ou de "natureza pessoal". Durante os séculos a matemática desenvolveu-se com perguntas longe dos problemas do dia a dia, como "existe uma medida comum de lado e diagonal de um quadrado?", "é possivel resolver equações de todos graus em radicais?" ou "é verdade que P=NP?" Presto atenção que todos estes problemas não são ditadas por necessidades da prática diretamente. A relação da diagonal para de quadrado lado foi aproximada por babilonianos bastante bem para as suas tarefas praticas. As equações podem ser resolvidas aproximadamente. A maioria dos algoritmos úteis têm tempo linear ou quase linear; algoritmos com tempo polinomial com grau 100 são taõ pouco úteis que com tempo exponencial. Contudo, todos estes problemas (e vários outros) têm importância enorme - teórica.

Para preparar cientistas e engenheiros é necessário ensinar a eles problemas que são muito distante dos problemas do dia a dia ou de natureza pessoal. Por exemplo, números complexos não são conectados com problemas do dia a dia. É lógico que não são apresentados no ENEM. Mas sem números complexos é impossível estudar processos estocásticos pois matrizes de cadeias de Markov têm auto-valores complexos. É facil apresentar muitos exemplos deste tipo. Se o ENEM atual for aprovado, teremos que ensinar toda matemática da escola de 2o grau nas universidades.

A escola deve imitar a vida cotidiana?

Não, pois não vale a pena imitar ao custo caro o que já existe grátis. O contrário, a escola deve fazer o que a vida cotidiana não pode fazer - desenvolver o pensamento abstrato das crianças.

Uma série de experiências interessantíssimas feitas no Brasil mostrou muito bem que o pensamento abstrato e rigoroso não se desenvolve na vida do dia a dia, sem ensino organizado. Esta pesquisa foi primeiramente publicada em portuguès como uma coletânea de artigos intitulada *"Na vida dez, na escola zero"* e depois em inglês como livro *"Matemática da rua e matemática da escola. ("Street mathematics and school mathematics". Cambridge University Press, 1993.)* Uma experiência típica foi comparar como crianças que vendem frutas nas ruas do Recife contam no processo de vender frutas e como eles fazem as mesmas operações aritméticas no laboratório. A experiência mostrou que crianças, que quase sempre contam corretamente na rua, mostram desempenho muito pior quando fazem as mesmas operações no laboratório, mas mostram desempenho quase tanto bom que na rua se resolvem problemas verbais. Isto é um argumento forte para usar problemas verbais na escola - como degrau no caminho para o pensamento abstrato.

Se você me pergunta, qual foi o maior erro dos educadores americanos, respondo: a idéia de que a escola deve imitar a vida cotidiana. Muitos exemplos disto podem ser encontrados no livro **Deixado Atras (Left back)** por Diane Ravitch. **Diane Ravitch. Left Back. Simon & Schuster, 2000.**

No último capítulo do seu livro, Ravitch menciona vários "movimentos", após daqueles educadores americanos (e outros, às vezes incluindo brasileiros) correm recentemente. Sobre o movimento de "multiculturalismo" ela escreve: "O maior resultado do barulho público sobre multiculturalismo foi distrair a atenção da necessidade urgente de melhorar a qualidade do ensino e estudo, o sujeto qual nunca recebeu tanta atenção de jornalistas como batalhas vigorosas sobre raça e etnicidade. Quando adultos discutiram sobre tal materias, qual grupo tinha a maior cultura antiga e qual raça ou grupo étnico poderia ter a honra de qual invenção, necessidades educacionais de crianças foram desprezadas. Esquecido, também, foi o entendimento do senso comum que idéias, invenções, arte, ciência, tecnologia e sabedoria são tipicamente resultados de largos contatos culturais, através de fronteiras geográficas e étnicas, raramente produtos dum grupo cultural.”

Tambem, Ravitch descreve outros movimentos, incluindo *“movimento de auto-estima”, “movimento de construtivismo”, “movimento de linguagem inteira”.* No final do seu livro, Ravith escreve: *“Se podemos fazer uma conclusão do rio de tinta espalhada en disputas sobre educação do século XX, isto é evitar como uma praga tudo apresentado como “movimento”.*

Fuzzification nos EUA

Em 1989 NCTM *(National Council of Teachers of Mathematics), i.e. Conselho Nacional de Professores de Matemática* publicou um documento ruim chamado “estandardos”. Pois “estandardos” foram suportados (ou pelo menos parecem suportados) pela AMS e muitas outras organizações, a maioridade dos professores da escola imediatamente declaram que eles ensinam em concordância com este documento. Logo eles precisaram de um pretexto para ter direito a dizer isto. Pois os “estandardos” foram escritos na maneira vaga, foi difícil entender, o que eles recomendam, mas uma coisa foi certa: eles recomendam o uso de calculadoras, e quanto mais, tanto melhor. Eles não contém nenhum aviso contra abuso de calculadoras, nenhuma situação onde seria melhor calcular na outra maneira. Logo a maioria dos professores americanos apressaram impingir calculadora na mão de cada aluno e avisar para usar esta vara de condão tanto mais que possível.

Também, os “estandardos” avisaram aumentar a atenção para “problemas da vida real”. Como exemplos modernos de problemas diz-se conectados com a vida real, consideramos os “problemas” seguintes:

Uma revista nacional perguntou para adolescentes quantos horas eles assitem televisão em cada dia? O que você acha do número publicado por esta revista?

Apresenta e resolve um problema.
a. Você escolheu 10 itens para comprar num super-mercado. Seis pessoas estão esperando na express-caixa (10 itens ou menor). Caixa 1 tem uma pessoa esperando, e caixa 3 tem duas pessoas esperando. Os outros caixas estão fechados. Qual caixa você deve escolher?

(Standards, p. 212.)

Pois estes “problemas” foram publicados em “estandardos”, um livro com muito influencia nos Estados Unidos, muitos outros “problemas” do mesmo estilo foram incluídos em vários programas elogiados. É claro que é impossível resolver problemas deste tipo. Logo eles tornam aulas de matemática em bate-papo. Esta tendencia foi chamada nos EUA de *fuzzification*, palavra derivada de *fuzzy*, qual significa *vago*. Chamemos-la de *fuzzificação*. Fuzzificação tem um destaque muito confortavel para algums educadores: impossibilidade de fracasso. Quando as tarefas são vagas, é impossível dizer, se elas são cumpridas ou não - logo ninguém está errado e todos são felizes.

Contudo, fora da escola a situação é pior. Uma vez eu comprei comida num supermercado americano. Eles venderam 8 laranjas por um dólar. Eu coloquei 8 laranjas numa sacola e fui para o caixa. A moça no caixa contou as laranjas e disse que foi só 7. Eu não queria ir através de toda a sala para pegar uma laranja e disse: “Calcula, por favor, quanto eu te devo.” Ela tomou sua calculadora, mas não sabia, o que fazer. Ela chamou o seu chefe, um homem grande com sua calculadora grande, mas ele também não sabia como calcular o preço de sete laranjas. Ele contou as laranjas outra vez e descobriu que foi 8. Logo o problema foi resolvido. Este exemplo mostra que o pseudo-problemas usados nas escolas americanas como "problemas da vida real" na realidade não são da vida real. São truques usados por organizações poderosas para esconder ignorancia dos professores.

Uma outra característica destes "estandardos" é a anorme presunção. Por exemplo, eles propõem comparar várias geometrias, ainda que recomendam diminuir a atenção para as provas rigorosas, o que é difícil fazer pois provas já foram praticamente excluidas do ensino americano. Também, eler propõem ensinar métodos de estatística como qui-quadrado e t de Student sem mencionar variáveis aleatórias contínuas). Também, eles propõem ensinar fractais sem nenhuma definição deles e sem mesmo mencionar dimensão.

Pode-se encontrar todas estas propostas no livro "Curriculum and evaluation standards for school mathematics", NCTM, 1989, pp. 157, 169. Como é tipico dos fogos artificiais, a vida destes foi curta. Na publicação nova "Principles and Standards for School Mathematics", NCTM, 2000, todos estas propostas são eliminadas às escondidas, sem atrair atenção.

Imediatamente apareceram bastante entusiastas levianos prontos para divulgar as recomendações dos "estandardos" sem saber Matemática. Num encontro uma educadora avisou a vários professores da escola para ensinar fractais. Um professor admitiu que ele não tem competência para issso. Ela respondeu: "Mas isto é muito fácil, Olha: isto é uma folha de papel. Ela e plana. Mas se amassar ela, ela torna-se num fractal." Este professor (qual eu conheço) foi bastante inteligente para não acreditar nela, mas muitos outros professores, especialmente com compêtencia fraca, foram entusiasmados do ensino de fractais, ainda que não sabiam que dimensão é importante e pensavam que tanto logo que há uma repetição da mesma figura, isto é um fractal.

Na prática esta presunção torna-se em ignorância. Em muitas universidades americanas existem programas amplos com conteúdo escolar. Esta prática começou como emergência, mas estabeleceu-se e cresce a todo o tempo. Recentemente Jim Milgram, professor de Matemática da Universidade de Stanford, declarou numa confêrencia educativa: "Desde 1989 a percentagem de alunos novos no sistema da Universidade Estadual da Califórnia - o maior sistema estadual no país - que foram exigidos fazer cursos correcionais em matemática aumentou quase 2 1/2 vezes de 23% em 1989 até 55% hoje." (Para ler o testemumho de Milgram, ver **http://www.house.gov/ed_workforce/whatsnew.htm** e tecle "Joint hearing on The Federal Role in K-12 Mathematics Reform".)

Meus filhos começaram a estudar nas escolas americanas no outono de 1990, um ano após da publicação dos "estandardos". Nossas primeiras impressões das escolas americanas foram boas. Os professores foram amigáveis, os prédios de escolas mais amplos que na Rússia e as áreas esportivas melhor que nas escolas russas. Mas quanto mais meus filhos envelheceram, tanto mais foi evidente que professores americanos conhecem pouco as disciplinas que ensinam. Eu acho que isto é a básica falta de escolas americanas, todas outras faltas são conseqüências dela. Agora muitos educadores americanos são preocupados com independência dos alunos. Uma frase típica é **ser conselheiro no lado de aluno, não profeta no palco (to be guide on the side, nor sage on the stage)**. Avisar os alunos é uma boa idéia, mas ela necessita competência de professor, que muitas vezes está ausente. Exemplo: uma vez minha filha resolveu um problema de maneira um pouco fora do comum e perguntou a professora se isto foi correto. A professora respondeu com irritação: "por quê você não resolve o problema, como todos?" Esta professora foi bastante simpática e gostava de crianças, mas sua competência foi tanto pequena, que ela não podia decidir se esta solução foi correta ou não, ainda que a originalidade da minha filha foi muito pequena.

Vários anos atras um livro didático foi publicado nos Estados Unidos e provocou um escândalo. O livro foi chamado

Matemática Secundária:
Uma Approximação Integrada: Focus na Álgebra,
(Secondary Math: An Integrated Approach: Focus on Algebra)

Informalmente este livro ruim é chamado "Álgebra das florestas de chuva" (Reinforest Algebra) pois este livro fala de tudo salvo álgebra.

O livro contém 843 páginas, pesa um e meia de quilo e só na página 107 conhecemos o que é uma expressão algebrica. Nenhuma equação aparece antes da página 165 e a primeira solução duma equação aparece só na página 218, feita por adivinhas.

No lugar de álgebra, o livro discue gravuras de madeira feitas em Mali, aulas sobre nossos pecados contra ambiência, elogia a esposa de Pitágoras, pergunta aos alunos "qual papel os zoológicos devemjogar em nossa sociedade?"

Oito páginas são dedicadas a afirmações de vários profissionais adultos com seus retratos.

O livro tem muitos desenhos, mas muitos deles tem relação fraca com o conteúdo. Por exemplo, um quadro de Magritte mostra uma maçã voando. Por quê? Para acompanhar alguns problemas sobre maçãs. Outro quadro mostra a poetiza Maya Angelou falando com Presidente Clinton. Depois encontramos suas poesias. Por quê num livro de álgebra? Pois estes versos são parecidos nas retas paralelas!

Mesmo o senado americano discutiu este livro. O senador Byrd falou sobre a qualidade ruim do ensino de matemática e em especial criticou este livro.
http://www.intres.com/math/byrd.htm
Com raiva o Byrd citou o livro dizendo:
Este livro horrível evidentemente não faz em 812 páginas o que livros análogos japoneses fazem em 200 páginas.

Este livro tem 5 "autores de álgebra", também 20 "outros autores da série" e também 4 especialistas em **multiculturalismo**. O que é multiculturalismo e por quê especialistas neste assunto são necessarios num livro de álgebra?

O educador famoso **Martin Gardner** escreveu deste livro, especialmente sobre a moda de **multiculturalismo** e **etnomatemática**:
"Etnomatemática" é uma outra palavra popular. Ela refere-se para a matemática como praticada nas culturas diferente do mundo ocidental, especialmente entre tribos primitivos africanos. $< \cdots >$ *Saber como culturas pré-industriais, antigas e modernas, lidaram com conceitos matemáticos, pode ter interesse histórico, mas é necessário lembrar que a Matemática, como Ciência, é um processo cumulativo, o qual avança a todo tempo descobrindo verdades que são iguais em todos lugares. Tribos nativas podem simbolizar números usando sistemas com bases diferentes, mas os números através de simbolos são os mesmos. Dois elefantes mais dois elefantes fazem quatro elefantes em cada tribo africana* $< \cdots >$

De fato etnomatemática distrae o atenção de problemas reais. Por exemplo, alguns alunos do tribo Navajo nos EUA, como muitos outros alunos, têm dificuldades no estudo de matemática. Seguinte um artigo publicado numa revista americana para professores de matemática, isto pode ter a causa seguinte: "o mundo ocidental desenvolveu a noção de frações e decimais por necessidade de dividir ou segmentar um inteiro. A posição de Navajo parece não dividir coisas inteiras." Logo professores do Sul-Oeste rural podem ter a necessidade de começar com idéias mais "naturalmente compatíveis com a sabedoria de Navajo," tais que "geometria não-Euclideana, teorias do movimento, e/ou fundamentos de cálculo," e de-enfatizar ou adiantar "segmentação...em partes mais pequenas."

O multiculturalismo tem successo entre países em desenvolvimento pois bajula-los, mas ao preço doloroso: preocupados com seu proprio "modo de saber" eles perdem oportinidade de participar na ciência moderna.

Alguns publicadores de livros didáticos já excluem referências de migração através do estreito de Bering pois várias tribos americanos acreditam que eles "sempre ficavam ali".

Multiculturalismo e fuzzificação no Brasil

Parece que o Multiculturalismo foi iniciado no Brasil. Pelo menos isto foi escrito no pequeno artigo publicado na revista "Nova Escola", março 2002 e chamado **"O respeito à cultura de cada um"**: *O termo etnomatemática foi proposto em 1975 por Ubiratan D'Ambrosio (foto abaixo) para descrever as práticas matemáticas de grupos culturais, sejam eles uma sociedade, uma comunidade, um grupo religioso ou uma classe profissional. Essas práticas são sistemas de símbolos, organização espacial, técnicas de construção métodos de cálculo, sistemas de medidas, estratégias de dedução e de resolução de problemas e qualquer outra ação que possa ser convertida em representações formais. Na origem, a etnomatemática partiu de uma visão historiográfica de culturas do passado. "Como o colonizador dominou o colonizado? Impondo uma nova língua, uma nova religião, uma nova matemática", diz D'Ambrosio. Índios. lapões, tribos africanas, todos tinham (e têm) um jeito próprio de analisar e quantificar que foi reprimido. "É muita arrogância imaginar que os únicos que pensavam e tinham lógica eram os povos mediterrâneos." Hoje, com mais informação, esse conhecimento reaparece. "E é de uma riqueza impressionante, que deve ser considerada e respeitada", observa o professor. Mesclando todas essas contribuições, podemos chegar a uma sabedoria mais universal e democrática. sem imposições. Segundo D'Ambrosio, o principio vale também para o microuniverso da sala de aula. O aluno da favela, os filhos de artistas ou engenheiros, todos têm um modo informal de usar a Matemática. Nenhum professor pode agir como um colonizador. "Abrir a mente e conhecer a realidade da turma é uma chance preciosa que temos para estabelecer cumplicidade com o aluno", ensina.*

O mesmo texto é colocado na página pessoal do Ubiratan D'Ambrosio. Acho que este texto é irresponsável. Isto é realidade que muitas crianças de pais pobres são mal preparadas para a escola. Realidade triste, mas realidade. Melhorar esta realidade é possivel somente se admitir sua existência. D'Ambrosio simplesmente nega esta realidade, ele convida famílias pobres a um mundo ilusório onde seus filhos são tanto bem preparados para a escola como os filhos da classe média; mas afinal das contas eles vai lidar uma vida infeliz.

Geralmente é muito fácil acusar professores da escola de todos os fracassos, mas isto não é justo, nem útil. No primeiro lugar, o salário dos professores e miserável se comparar com sua importância para o futuro do país. No dia 17 de outubro de 2000 li no *Jornal do Brasil* no artigo "Balanço é positivo" sobre salários dos professores de escolas: *"De dezembro de 1997 a junho de 2000, a remuneração dos professores com curso fundamental completo subiu de R\$ 165 para R\$ 324. Os que têm curso de magistério completo conseguiram ganhos maiores, com salários que foram elevados de R\$ 288 para R\$ 504. Para os que têm o ensino fundamental incompleto, o salário aumentou de R\$ 177 para R\$ 295."* Acho que mesmo assim estes salarios sao miseraveis e devem crescer pelo menos duas vezes mais.

Na mesma revista “Nova Escola” apareceu o artigo “A Matemática pulsa no dia-a-dia” por Ricardo Falzetta (Nova Escola, março de 2002, pp.18-24.)

O artigo contém a frase seguinte: *“O acerto só vem com esforço e prática.”* Concordo completamente! Acho que é muito importante explicar isto para os alunos. Mas o autor não concorda com isto! Esta frase e várias outras são chamadas “crenças que precisam ser evitadas”. O autor recomenda: “Esqueça, ou melhor, inverta essas falsas verdades.” Que coisa estranha! Talvez, isto é só uma exceção e o artigo ainda é razoável?

Olhamos a primeira “falsa verdade” na lista: *“Problemas têm sempre solução;”* Antes de esquecer ou inverter esta “‘falsa verdade”, gostaríamos de entendê-la. Se queremos resolver a equação quadrática $x^2 = -1$ em números reais, esta tarefa tem solução ou não? Num sentido, não tem, pois não tem nenhuma raíz real. Mas no sentido mais educado, resolver uma equação significa encontrar o conjunto das raízes. Neste sentido esta equação tem solução: o conjunto vazio. O autor entende esta ambiguidade? Parece que não.

Uma outra “falsa verdade”: *“A resposta é sempre única”.* Seu sentido também é ambiguo. Se resolvemos a equação $x^2 = 1$, a resposta é única ou não? Num sentido, não, pois há duas raízes: 1 e -1. Mas no sentido mais profissional, a resposta é única: o conjunto $\{1, -1\}$.

O que o autor realmente quer dizer? O que eu devo esquecer ou inverter?

Isto é um exemplo brasileiro de fuzzificação no ensino de Matemática, a maneira de escrever vaga, ainda que pomposa.

O autor repete erros antigos dos educadores americanos, ainda que nos Estados Unidos estes erros já foram explicados e criticados.

Uma outra afirmação estranha no mesmo artigo: “O conceito de fração é importante e deve ser trabalhado, mas exigir destreza nas operações com elas é de uma inutilidade assombrosa”. O autor atribue esta afirmação para Ubitaran D’Ambrósio, um especialista em Etnomatemática.

Qualidade de Professores

Avaliar e comparar a qualidade de livros e currículos é mais fácil pois eles são escritos e podem ser analizados sem pressa. A qualidade de professores é mais difícil estudar pois ela mostra-se só durante as aulas. Contudo, isto é possivel.

Uma pesquisa em qualidade de ensino foi feita como parte do TIMSS já mencionado no começo deste curso. O TIMSS comparou a qualidade de professores em três países: Estados Unidos, Alemanha e Japão. Com base nos resultados desta comparação foi publicado o livro **O Desnível de Ensino. James W. Stigler and James Hiebert. The teaching Gap. Best Ideas from the World’s Teachers for Improving Education in the Classrooms. Free Press, 1999.**

O maior descobrimento desta pesquisa foi existência de estilos nacionais de ensino e a qualidade ruim do estilo americano em comparação com o estilo japonês. Na página 77 os autores escrevem:
$< \cdots >$ *quando observamos uma aula japonesa, reparamos que o professor apresenta um problema para os alunos sem demostrar no anterior como resolver este problema. Nós entendemos que em U.S. os professores quase nunca fazem isso, e agora nós vimos que uma característica, qual nós mal reparamos antes disto, é talvez uma das mais importantes características das U.S. aulas - que o professor quase sempre mostra um procedimento para resolver problemas antes de apresentar eles para os alunos. ”*

Na página 89 eles escrevem:
Muitos professores em U.S. também parecem acreditar que memorização de termos e prática de

perícias não são muito alegres. Nós observarmos eles tentando animar a aula e aumentar o interesse dos alunos usando jeitos não matemáticos: ficando divertidos, interrompendo a aula para falar sobre outras coisas (concerto local de rock música, ontem à noite), por exemplo, ou por apresentar o problema matemático em contexto da vida real ou intrigante - por exemplo, mensurando circunferência de uma bola. Os professores agem como se o interesse dos alunos pode ser gerado só por diversões fora da Matemática.

Na página 90 eles escrevem:
Os professores japoneses $< \cdots >$ *agem como se a mesma Matemática é interessante e alunos serão interessados explorando ela através de desenvolver métodos novos para resolver problemas. Eles parecem usar menos jeitos não matemáticos para motivar os tópicos matemáticos.*

Como eu ensinei problemas verbais nos EUA

Quando eu fui aluno da escola russa, tomei problemas verbais como parte natural da vida. Não pensei muito deles. O ensino russo foi bem organizado, dificuldade destes problemas cresceu um pouco todo o tempo, logo praticamente todos alunos conseguiram resolver-los. Problemas verbais são tanto comuns na Rússia (pelo menos na area metropolitana) como futebol no Brasil ou comer com espetinhos de madeira na China. Tornei-me entusiasta de problemas verbais só quando comecei a ajudar a *Escola por Correio* afiliada com a Universidade de Moscou. Esta escola foi organizada especialmente para alunos quais ficaram no interior da Rússia, longe das cidades grandes. Foi bastante conhecido que estes jovens tinham dificuldades enormes lidando com matemática avançada, mas nao foi claro, por quê. Lembro minha surpresa quando li soluções escritas por estes alunos e descobri que seus erros são causados não somente pela falta de sabedoria matemática, mas também pela dificuldade em entender simples frases russas. Nesta época eu entendi muito bem a conexão entre linguagem e Matemática e conclui que ensinar entender e usar na maneira inteligente a lingua natal é tarefa inportantissima do ensino de matemática.

Na Rússia, onde eu passei os primeiros quarenta anos da minha vida, abundancia de problemas verbais no ensino de matemática sempre foi normal. Os problemas verbais foram uma parte normal da vida escolar e foram aceitos sem medo por alunos e professores. Se olhar qualquer livro didático russo de todos os níveis, desde primeiro ano até olimpíadas, encontrará muitíssimos problemas verbais.

Quando chegei para os Estados Unidos, encontrei uma atitude completamente diferente: problemas verbais foram demonizados, considerados difíceis, frustradores e chamados inúteis, artificias e hipócritos ("phony"). Porém eu fiquei certo que problemas verbais são importantíssimos no ensino e usei eles em cada oportunidade.

Durante vários anos ensinei um curso chamado "álgebra da faculdade" ("college algebra") numa univeresidade católica americana em Texas e observei falta de entendimento da linguagem como causa de fracassos na matemática. Baseado nesta experiência eu escrevi um artigo **Como eu ensino resolver problemas verbais** *A. Toom. How I teach word problems. Primus, September 1997, vol.VII, n.3. pp.264-270.*

Uma vantagem desta universidade foi lousas grandes. Usei este fato com sucesso. Eu cheguei para a sala de aula com bastante giz e apagadores. Eu dividi a lousa em quatro partes, convidei quatro alunos para lousa e ditei para eles quatro versões dum problema onde só um dado foi diferente. Por exemplo, eu disse:

Maria tem cem moedas em seu acumulador, algumas de 10 centavos, outras de 25 centavos. Totalmente ela tem...

Ainda alunos escrevem isto, eu entendo que se todas as moedas fossem de 10 centavos, Maria teria dez dólares. Se substituir algumas moedas de 10 centavos por moedas de 25 centavos, o número total de centavos cresce por um múltiplo de 15. Logo eu continuei, falando para cada aluno separadamente:

treze, desesseis, dezenove, vinte dois d'olares. Quantas moedas de 10 centavos e quantas moedas de 25 centavos ela tem?

Muito rápido os alunos entendem o que eu quero e não perdem tempo. Eu disse para os alunos que quando eles estão perto da lousa, eles são "professores" e devem escrever claro tal que outros poderão entender. Se um aluno usou uma letra, por exemplo X, devia explicar, o que esta letra significa. Para alguns isto foi difícil e tenho certeza que esta dificuldade foi útil para eles pois faz eles pensar claro. Acho que esta experiencia seria especialmente útil para professores futuros, mas nesta universidade resolver problemas verbais foi considerado demais difícil para eles. Todos meus alunos tinha espelização ("major") em biologia, química e outras ciências. Professores futuros tinha cursos mais fáceis com perguntas de tipo "Quantos diâmetros há numa circunfêrencia?" (A resposta correta: um conjunto infinito.)

Ás vezes eu pedi meus alunos para explicar sua solução em voz alta para outros alunos (eles tenderam a falar em voz baixa para mim ou para a lousa). Solução de problemas na lousa tipicalmente tomava 5-10 minutos. No meu *"syllabus"* (explicação dada por professor americano no começo de cada curso) eu escrevi: *"É importante entender, que estudo não é competição. Sucesso dum outro aluno não é seu fracasso e fracasso dele não é seu sucesso."* Eu disse que somente nos testes os alunos não têm permissão de comunicar. Em qualquer outra situação eles podem e mesmo devem ajudar um ao outro. Eu disse para eles: *"Se seu colega faz erro na lousa, isto é seu erro, pois vocês devem controlar e corrigir um ao outro. Eu não tenho tempo para buscar todos os erros. Mesmo se encontro um erro, não vou dizer.* (Na realidade eu não deixei nenhum erro sem corrigir.)

Se uma aluna na lousa não sabia o que fazer, outra aluna foi ajudá-lo. (A maioria dos meus alunos foram moças.) Todo o tempo nas várias partes da sala alunos fizeram grupos ad hoc para discutir algum assunto do problema. Cada aluno sentado escolheu um problema escrito na lousa e resolveu-lo. Alunos fizeram isto com vontade pois eles sabiam que terão a permissão de usar suas notas nos testes.

Quando todas as quatro versões foram resolvidas, eu perguntei se há algumas dúvidas. Também, eu fiz comentários. Ás vezes eu explicei que uma resposta é correta se combina com dados e mostrei como checar isto. Ás vezes explicei que o mesmo problema pode ser resolvido de várias maneiras - denotando uma ou outra quantidade, ou talvez duas quantidades, ou nenhuma, sem álgebra.

Deste modo eu corrigi muitas maneiras e maus hábitos dos meus alunos. Uma delas é descuido ou confusão na maneira de escrever. Somando frações ou fazendo outras operações aritméticas, alguns alunos enchem toda a lousa com escritas caóticas, tal que torna-se impossível entender, o que é feito, como é feito, se há um erro e onde ele está. Outra maneira mal é "apagar imediatamente": tanto logo que eu digo que uma solução é errada, mesmo tanto logo que eu digo que não entendo-a ou só pergunto, o que isto significa, o aluno apaga tudo imediatamente, fazendo toda discussão impossível.

Eu lembro para os alunos que eles devem responder as perguntas feitas e discutimos, o que estas perguntas significam. Por exemplo, muitos não podem entender, qual variável eles devem encontrar quando os problemas perguntam “como longe...” ou “quando...” ou “com que rapidez...”. Também, tenho que explicar aos alunos que para cada quantidade eles devem escolher uma unidade e transformar todos os dados nestas unidades. Para dinheiro tinhamos ou dólares ou centavos e eles devem transformar todos os dados para a unidade escolhida. Para tempo temos tipicalmente horas ou minutos e todos os dados sobre tempo devem ser transformados segundo esta escolha. Ás vezes tive que avisar que uma hora contém 60 minutos, não 100. (Alguns alunos, quando foi necessário transformar 1/3 hora em minutos, tomaram calculadoras e acabaram com 33,3 minutos.)

Tinha que ensinar aos alunos a organizar os dados. Um jeito útil é colocar os dados numa tabela. Vou mostrar este jeito no exemplo seguinte.

O radiador dum carro tem o volume de 10 litros. Agora ele está cheio de mistura de resfriador com água que contém 40 % de resfriador. Quantos litros desta mistura é necessário despejar e substituir com refriador puro para aumentar sua percentagem até 80% ?

A maioria dos alunos não podem resolver este problema se eu não dar algum esquema para organizar os dados. É útil colocá-los na tabela seguinte:

quantidade	1a parte	2a parte	total
litros de mistura	10 -X	X	10
percentagem de resfriador	40% = 0.4	100%=1	80% = 0.8
litros de resfriador	0.6 (10) = 6	X	0.8 (10)=8

Pois o volume total de resfriador é igual a soma dos volumes na 1a parte e 2a parte, temos a equação $6 + X = 8$, para qual $X = 2$ litros.

Vamos anunciar várias operações mentais, os quais os alunos devem fazer quando resolver este problema.

Escrever nomes de colunas, apropriados e claros, por exemplo “1a parte”, “2a parte” e “total”. Colocar os dados em casas apropriadas.
Entender que quando dois liquidos são misturados, o volume total é igual a soma dos volumes. (Isto é verdadeiro só aproximadamente, mas no caso presente esta aproximação é bastante boa.)
Entender que quando dois liquidos são misturados, o volume total de cada componente é igual a soma dos volumes desta componente em partes.
Reparar que a última casa pode ser enchida de dois jeitos, logo estas duas expressões são iguais, logo obtemos uma equação, a qual podemos resolver para obter a resposta.

É importantíssimo entender que todas estas operações **não** são evidentes. Nós **não** nascemos com esta sabedoria; adquirimos-la na escola se a escola é bom ou não adquerimos se a escola e mal. Evidentemente, a maioria das escolas dos meus alunos americanos foram mal. E vão ficar mal se não augmenta qualidade de preparação dos professores.

Existe proverbio: *universidades americanos são as mais caras escolas de segindo grau no mundo.* É verdade. Os cursos americanos de “algebra de faculdade” os quais eu ensinei nesta universidade deveriam ser ensinados na escola. Mas evidentemente não foram ensinados pois no começo dos meus cursos os alunos fizeram muitos erros. Por exemplo, foi difícil para muitos alunos entender que o primeiro número na primeira coluna é $10 - X$, não 10. Também, quando eu escrevi 100%, vários alunos perguntaram: de onde você encontrou este número? Entender que qualquer substância pura contém 100% da mesma substância foi uma idéia nova para meus alunos.

Os meus alunos foram mal preparados não somente na matemática, mas também nos hábitos de todo trabalho intelectual, pois eu tive que diser o seguinte para os alunos:
Escreva cuidosamente.
Escreva cada sinal de maneira clara.
Escreva cada equação completamente e claramente, para facilitar checar.
Desenhe tabelas cuidosamente.
Escreva algarismos 0, 6 e 8 tal que seja fácil discriminá-los.
Escreva a letra l e os algarismos 1 e 7 tal que seja fácil discriminá-los.

E muitas outras coisas evidentes para as pessoas que tinham professores bons na escola elementar. Tudo isto é matemática? A resposta depende de como definimos matemática, mas tudo caso **ensinar tudo isto é necessário**, caso contrario não haverá nenhuma matemática.

É claro que a maioria dos alunos não pode inventar tudo isto independentemente. Nós devemos ensin a-los com paciência e persistência. A nossa cultura é resultado de muitos mil anos de acumulação e a transmissão dela precisa de explicações.

Por quê eu explico isto com tantos detalhes? Porque vários líderes de educação moderna a todo o tempo saltam de uma extremidade para a outra. Lembramos da conclusão de Stigler e Hiebert citada anteriormente que professores americanos evitam dar a seus alunos a oportunidade de descobrir alguma coisa. Agora vários líderes americanos insistem na outra extremidade: não ajudar seus alunos, deixar que eles descobrem tudo eles-mesmos. Nesta conexão é muito usada a palavra "construtivismo", que ninguém sabe exatamente o que é isto.

Recentemente *Annamaria Píffero Rangel* publicou um livro útil para refutar vários mitos nocivos: **Construtivismo Apontando falsas verdades**, Editora Mediação. A primeira falsa verdade mencionada é: **Ser construtivista é deixar que o aluno, sozinho, construa o conhecimento.** A professora explica muito bem por quê esta idéia é falsa e perigosa. Eu concordo com a professora Annamaria em todos pontos salvo um: ela acha que a palavra "construtivismo" ainda é útil. Na minha opinião, esta palavra é tanto contaminada com o uso irresponsável que é melhor não usar ela.

Geralmente, um perigo importantíssimo em discussao de ensino é maneira confusada de falar. Por exemplo, alguns autores anunciam que é útil dar alunos problemas com várias respostas ou nenhuma resposta. O que isto significa? Num sentido a equação $x^2 = 1$ tem duas respostas, 1 e -1, e a equação $|x| = -1$ não tem nenhuma resposta. Mas no sentido mais moderno resolver uma equação significa encontrar o conjunto de suas raízes e neste sentido ambas as equações tem uma resposta: para a primeira equação a resposta é o comjunto $\{-1, 1\}$ e para segunda equação a resposta é conjunto vazio.

Então é mais proficional falar de problemas, os quais têm nenhuma resposta númerica ou mais que uma resposta númerica. Estes problemas são realmente úteis e eu usei tais problemas nas minhas aulas. Por exemplo, eu chamei quatro alunos para lousa e ditei:

Ao meio dia José saiu de casa e correu com velocidade 5 qiolometros por hora. Uma hora depois Anna saiu de casa com a bicicleta, seguiu o mesmo caminho e atingiu José na distância de (falando para cada aluno em vez) 4, 6, 8, 10 quilometros da casa. Qual foi a velocidade de Anna?

Todos os quatros alunos resolveram o problema da mesma maneira. Depois de todos os esforcos, três alcançam uma resposta aceitável, mas o primeiro obteve uma resposta negativa. Nós checamos todas as calculações e acertemos-nos de que não há nenhum erro. Como interpretar isto? As vezes um aluno explica, as vezes eu tenho que observar que quando Anna saiu de casa, José já foi 5 quilometros da casa. Eu uso esta oportunidade para explicar para os alunos que às vezes condições de problemas não podem ser satisfeitas e nestes casos eles devem anunciar "não há resposta".

O mais importante para mim como professor de matemática é o seguinte:
Ensinar os alunos a entender e usar sua própria língua melhor.
Desenvolver a capacidade dos alunos em apresentar as informações de várias maneiras (língua natural, álgebra, tabelas, grafos) e transformá-la duma apresentação para a outra.
Melhorar as maneiras dos alunos. (Caligrafia legivel, maneira organizada de escrever, fala claro e organizado, capacidade de explicar, entender explicações, fazer perguntas e responder perguntas.)

Para alcançar todas estas metas, alguns "jogos" com certas regras são necessários. Problemas verbais são jogos ótimos neste sentido.

Um exemplo de minha memória. Uma vez uma aluna chegou em meu escritório lamentando que não pode resolver um problema verbal. Eu disse: *"faz uma tabela". "Isto é obrigatório?"* - perguntou a aluna com impaciência. Eu respondi: *"Geralmente, não. Mas você disse que ê completamente confusa, então tem que fazer uma tabela".* A aluna fez uma tabela com irritação, como se fazendo uma gentileza para um pedante velho, e resolveu o problema. Eu disse: *"Agora eu vou te dizer uma coisa sobre ensino: eu te ajudei?" "Sim." "Mas eu te não disse nada." "Você me disse para fazer uma tabela."* Geralmente, solução de problemas verbais ajuda e ensina alunos a organizar seus pensamentos. Eu espero que esta aluna tenha aprendido com esta licão. Isto significa que várias anos depois, mesmo sem professor, ela vai dizer para ela-mesma: "Eu estou confusa. Vou organizar os meus dados."

Depois de vários anos de ensinar nesta maneira, eu conclui que *ensinar entender e usar na maneira razoável a língua natural é uma das maiores tarefas do ensino de matemática.* Ensino de matemática para todos é no mesmo tempo menor e maior qe ensino de matemática profisional. Menor, pois a maioria das pessoas nunca alcança profissionalismo em matemática. Maior, pois organização de pensamento é indispensável na vida moderna, qual não é preparada em nossa natureza biológica e precisa de escolarização para transmitir-se de uma geração para outra.

Você pode perguntar: "Por quê devemos ensinar aos alunos a sua própria língua qual todos eles já sabem?" Mas existem níveis diferentes de sabedoria da sua própria língua. Não é necessário saber sua língua profundamente para saudar sem pensar: "Oi! - Oba! - Como vai? - Tudo bom. - Tchau! - Até logo!" Muito mais é necessário para entender um texto que descreve um sistema de relações entre variáveis abstratas.

Lenbro conversa com Irmã Teresa Grabber, professora ótima para alunos fracos. Ela observou uma vez: *"Quando meus alunos não podem resolver problemas verbais, examinamos por quê e concluimos que eles não podem ler."* Eu perguntei: *"Não podem ler no senso literal?"* Ela explicou: *"Não literal. Eu quero dizer falta de entendimento."*

Eu sempre peço a meus alunos para explicar as suas soluções e acho que esta experiência é muito útil para eles. Explicando suas soluções de problemas verbais, alunos fazem movimentos com suas maõs apresentando tais "realidades" como movimento de carros ou corrente num rio, eles fazem abstrações quase visíveis e tangíveis. Eu uso a palavra "abstrações" pois estes carros e correntes não são reais e isto é uma grande vantagem deles. Pois barcos, bombas e outras "realidades" usadas em problemas verbais são limpos de todos os detalhos irrelevantes, eles servem como semi-abstrações, ainda compreensíveis para principantes. Isto torna problemas verbais numa preparação ótima para estudo de todas ciências exatas. Depois destas discussões meus alunos escrevem equações onde cada sinal é baseado na sua experiência visual ou motor. O prazer de entender, que eles sentem, é o melhor prêmio para seu trabalho mental. Este prêmio corresponde as tarefas e resultados do ensino.

Argumentos e Provas lógicas vs. Vestibular

É tipico em vários países que as últimas séries da escola preparam para o vestibular. Logo o conteúdo delas depende das exigências do vestibular. Concentramos nossa atenção num assunto: *argumentos e provas lógicas*.

Parece que provas rigorosas são quase completamente ausentes em toda escola brasileira. Só na 8a série várias provas aparecem, mas no próximo ano desaparecem, pois é necessário preparar os alunos para o vestibular. Mesmo nas escolas privadas (e caras) não ensinam a provar. Por quê? Pois os vestibulares não precisam disto.

Os últimos anos da escola são caracterizados pela preparação para os vestibulares. Também, nesta idade os cérebros dos jovens são desenvolvidos e por esta razão estes anos são mais apropriados para estudar matemática rigorosa. É pena que no Brasil um exclue outro: não há nenhumas provas nos vestibulares.

Recentemente li alguns livros didáticos do ensino médio e livros preparatórios para o vestibular (o que é praticamente a mesma coisa) e não encontrei nenhuma prova. Mesmo a possibilidade de provar não é mencionada. Seria melhor se os autores escrevessem: **Não provamos estas afirmações** pois neste caso o leitor poderia adivinhar que existe no mundo coisas chamadas “provas” e talvez vale a pena buscar e estudar elas.

Vestibulares russos

Neste respeito a situação na Russia foi muito melhor ja várias decadas. Vamos apresentar as regras de concursos e programas de vestibulares de universidades da União Soviética em 1989 - o último ano do poder sovietico. Até esta época o sistema soviético foi muito uniformizado - as regras citadas abaixo eram obrigatórias para todas as universidades da União Soviética. Agora várias partes antigas da União Soviética são países independentes, seus vestibulares são mais diversificados e mais dificíl de descrever. Contudo, acreditamos que na Rússia o nível médio e o estilo típico de vestibulares em Matemática ficam parecidos aos mesmos na União Soviética.

Programa em Matemática

Na prova em Matemática o calouro num vestibular de universidade deve mostrar: a) conhecimento nítido das definições e teoremas incluídos no programa, capacidade de provar estes teoremas; b) capacidade de expressar um pensamento matemático de maneira exata e concentrada na fala e na escrita, usar os símbolos apropriados; c) firme domínio dos conhecimentos e jeitos matemáticos incluídos no programa, habilidade de usá-los para resolver problemas.

O programa em Matemática do vestibular em 1989 consiste em três partes. A primeira parte é a lista das maiores noções e fatos, que o calouro deve manejar (usá-los corretamente na solução de problemas, referir na prova de teoremas). A segunda parte inclue teoremas que o calouro deve poder provar. As partes teóricas dos vestibulares devem usar o conteúdo desta parte. A terceira parte é a lista dos maiores jeitos e habilidades, os quais o calouro deve manejar.

1. As maiores noções e fatos matemáticos

Aritmética, álgebra e análise básica

1. Números naturais (N). Números primos e compostos. Fator e múltiplo. Fator maior comum. Múltiplo menor comum.

2. Critérios de divisibilidade em 2, 3, 5, 9, 10.

3. Números inteiros (Z). Números racionais (Q), sua adição, subtração, multiplicação e divisão. Comparação de números racionais.

4. Números reais (R), sua apresentação como frações decimais.

5. Apresentação de números na reta. Módulo dum número real, seu sentido geométrico.

6. Expressões numéricos. Expressões com variáveis. Fórmulas de multiplicação reduzida.

7. Potência com grau natural e racional. Raíz aritmética.

8. Logaritmos, suas propriedades.

9. Monômio e polinômio.

10. Polinômio com uma variável. Raíz de polinômio; raíz de trinômio quadrático como exemplo.

11. Noção de função. Vários jeitos de definir uma função. Domínio e imagem duma função. Função inversa.

12. Gráfico duma função. Crescimento e decrescimento duma função; periodicidade, paridade, imparidade.

13. A condição suficiente de crescimento (decrescimento) duma função num segmento. Noção de extremo duma função. A condição necessária de extremo duma função (o teorema de Fermat). A condição suficiente de extremo. O maior e o menor valor duma função num segmento.

14. Definição e propriedades básicas das funções: linear, quadrática $y = ax^2 + bx + c$, potencial $y = ax^n$ $(n \in N)$, $y = k/x$, exponencial $y = a^x$, $a > 0$, logarítmica, funções trigonométricas $(y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ y = \tan x)$ e a raíz aritmética $y = \sqrt{x}$.

15. Equação. Raízes duma equação. Noção de equações equivalentes.

16. Desigualdades. Solução de desigualdades. Noção de desigualdades equivalentes.

17. Um sistema de equações e desigualdades. Solução dum sistema.

18. Progressões aritmética e geométrica. A fórmula de n-ésimo termo e de soma dos primeiros n termos da progressão aritmética. A fórmula de n-ésimo termo e de soma dos primeiros n termos da progressão geométrica.

19. Seno e cosseno da soma e diferença de dois argumentos. (Fórmulas.)

20. Transformação de somas $\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha \pm \cos\beta$ em produtos.

21. Definição de derivada. Seu sentido físico e geométrico.

22. Derivadas de funções $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = x^n$ $(n \in Z)$, $y = a^x$.

Geometria

1. Reta, raio, segmento, linha quebrada; comprimento dum segmento. Ângulo, sua medida. Ângulos opostos pelo vértice e suplementares. Circunferência e círculo. Retas paralelas.

2. Exemplos de transformações de figuras, tipos de simetria. Movimento e suas propriedades. Transformação de similaridade e suas propriedades.

3. Vetores. Operações com vetores. Vetor colinear.

4. Polígono, seus vértices, lados, diagonais.

5. Triângulo. Sua mediana, bissetriz, altura. Tipos de triângulos. Relações entre lados e ângulos dum triângulo retângulo.

6. Quadriláteros: paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, trapézio.

7. Circunferência e círculo. Centro, corda, diâmetro, raio. Reta tangencial duma circunferência. Arco duma circunferência. Setor.

8. Ângulos centrais e inscritos.
9. Fórmulas de área: de triângulo, retângulo, paralelogramo, losango, quadrado, trapézio.
10. Comprimento de circunferência e dum arco de circunferência.
11. Semelhança. Figuras semelhantes. Relação de áreas de figuras semelhantes.
12. Plano. Planos paralelos e interseçantes.
13. Paralelidade duma reta e um plano.
14. Ângulo entre uma reta e um plano.
15. Ângulos formados por planos. O ângulo linear dum ângulo formado por planos. Perpendicularidade de dois planos.
16. Poliedros. Seus vértices, arestas, faces, diagonais. Prisma reto e oblíquo. Pirâmide. Prisma regular e pirâmide regular. Paralelepípedos, seus tipos.
17. Figuras de rotação: cilindro, cone, esfera, superfície esférica. Centro, diâmetro e raio duma esfera e superfície esférica. Plano tangencial duma superfície esférica.
18. Fórmula de volume dum paralelepípedo.
19. Fórmulas de área de superfície e de volume dum prisma.
20. Fórmulas de área de superfície e de volume duma pirâmide.
21. Fórmulas de área de superfície e de volume dum cilindro.
22. Fórmulas de área de superfície e de volume dum cone.
23. Fórmulas de volume duma bola e suas partes.
24. Fórmulas de área duma superfície esférica.

2. Maiores fórmulas e teoremas

Álgebra e início de análise.

1. Propriedades da função $y = ax + b$ e seu gráfico.
2. Propriedades da função $y = k/x$ e seu gráfico.
3. Propriedades da função $y = ax^2 + bx + c$ e seu gráfico.
4. Fórmula de raízes de equação quadrática.
5. Fatorização de trinômio quadrático em fatores lineares.
6. Propriedades das desigualdades numéricas.
7. Logaritmo do produto, potência, quociente.
8. Definição e propriedades das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ e seus gráficos.
9. Definição e propriedades da função $y = \tan x$ e seu gráfico.
10. Solução de equações $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$.
11. Fórmulas de transformação de funções trigonométricas.
12. Dependencias entre funções trigonométricas do mesmo argumento.
13. Funções trigonométricas do argumento duplo.
14. Derivada da soma de duas funções.
15. Derivada do produto de duas funções.
16. Derivada do quociente de duas funções.
17. Equação da reta tangente ao gráfico duma função.

Geometria

1. Propriedades dum triângulo isósceles.
2. Propriedades dos pontos com distâncias iguais dos fins dum segmento.
3. Condições de paralelidade de duas retas.
4. Soma de ângulos dum triângulo.
5. Condições dum paralelogramo.

6. Circunferência circunscrita dum triângulo.
7. Circunferência inscrita num triângulo.
8. Reta tangencial duma circunferência e suas propriedades.
9. Valor dum ângulo inscrito numa circunferência.
10. Condições de similaridade de dois triângulos.
11. O teorema de Pitágoras.
12. O teorema de cossenos.
13. O teorema de senos.
14. As fórmulas de áreas de paralelogramo, triângulo e trapézio.
15. A fórmula de distância entre dois pontos no plano. Equação da circunferência.
16. A condição de paralelismo duma reta e um plano.
17. A condição de paralelismo de dois planos.
18. Expansão dum vetor em eixos de coordenadas.
19. O teorema de perpendicularidade duma reta e um plano.
20. Perpendicularidade de dois planos.
21. Os teoremas sobre paralelismo e perpendicularidade de dois planos.

3. As maiores perícias e habilidades

O calouro deve poder:

1. Efetuar operações aritméticas com números em forma de frações decimais e comuns; arredondar com exatidão exigida os números dados e resultados de calculações, efetuar previsão aproximada dum resultado; usar calculadores ou tabelas para efetuar calculações.

2. Efetuar transformações idênticas de polinômios, frações que contém variáveis, expressões que contém funções potenciais, exponencial, logarítmical e trigonométricas.

3. Construir gráficos das funções linear, quadráticas, potenciais, logarítmicas e trigonométricas.

4. Resolver equações e desigualdades de primeiro e segundo grau, equações e desigualdades que podem ser redusidas para elas; resolver sistemas de equações e desigualdades de primeiro e segundo grau e que podem ser reduzidos a elas. Isto inclue as mais simples equações e desigualdades que contém funções potenciais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

5. Resolver problemas formando equações e sistemas de equações.

6. Fazer desenhos de figuras geométricas e efetuar as mais simples construções no plano.

7. Usar representações geométricas para resolver problemas algébricos e usar métodos de álgebra e trigonometria para resolver problemas geométricas.

8. Efetuar operações com vetores (adição e subtração de vetores, multiplicação dum vetor e um número) e usar propriedades destas operações.

9. Usar a noção de derivada para pesquisar onde funções crescem (decrescem), encontrar seus extremos e construir os gráficos de funções.

Eu não quero dizer que estas regras são perfeitas. Elas têm vários desméritos, alguns deles causados por esnobismo. Por exemplo, seria melhor colocar os critérios de divisibilidade na segunda parte - afirmações, as quais alunos devem provar, pois estes critérios realmente podem ser provados no estilo escolar e estas provas ajudam a entender o sistema decimal e o que significa provar. De outro lado é ridículo incluir derivadas e não incluir limites pois derivadas são **definidas** como limites. É mesmo mais ridículo incluir propriedades de derivadas na segunda parte - como podemos provar algumas propriedades de derivadas sem defini-las? Provavelmente numa reunião de educadores alguma pessoa falava na maneira demagógica que derivadas são mais modernas que critérios de divisibilidade. Mas mesmo assim estas regras são muito melhor que regras brasileiras, as quais excluem provas de jeito nenhum. Pelo menos calouros russos já têm algumas idéias de provas.

Como a escola russa ensina alunos a provar? Para obter uma idéia, estudamos um livro didático russo: **A. V. Pogorelov. Geometria. Livro didático para 6-10 séries da escola média.**

Já na p. 13 (6a série) começa o capítulo chamado **Axiomas, teoremas e provas.** Logo depois há 52 perguntas e problemas.

O conteúdo do livro é separado em partes correspondentes a séries: 6 série, 7 série, 8 série, 9 série, 10 série. (10 série foi última na escola russa quando este livro foi escrito.) A geometria de sólidos começa já na 9 série. Estas partes têm sub-partes, logo o conteúdo é muito detalhado. Por exemplo, isto é a primeira parte da 6 série :

6 série. Planimetria.

Parágrafo 1. Propriedades básicas das figuras geométricas mais simples.

1. Ponto e reta.
2. Propriedades maiores de posição de pontos em relação à retas.
3. Propriedades maiores de posição mutual de pontos na reta e no plano.
4. Semi-reta.
5. Propriedades básicas de mensuramento de segmentos e ângulos.
6. Propriedades básicas de colocação de segmentos e ângulos.
7. Existência de triângulo igual ao triângulo dado.
8. A propriedade básica de retas paralelas.
9. Axiomas, teoremas e provas. Perguntas para repetição. Exercícios.

Na álgebra escolar também provas foram encontradas na Rússia. Isto é um problema de livro didático de Larichev:

Problema 1825 na p. 279.

1) Provar que o polinômio quadrático $y = 2x^2 - 4x + 6$ não tem raízes (reais).
2) Transformar este polinômio para a forma $y = 2(x-1)^2 + 4$ e provar que $y > 0$ para todos valores (reais) de x.
3) Provar que o polinômio tem valor mínimo para $x = 1$ e descobrir este valor.
4) Descobrir que quando x muda de $-\infty$ para 1, a função y decresce de $+\infty$ para 4, e quando x muda de 1 para $+\infty$, a função y cresce de 4 para $+\infty$. Desenhar um rascunho do gráfico desta função.

Problema 1829 na p. 280.

Para cada polinômio quadrático seguinte descobrir:
a) Para quais valores de argumento o polinômio é igual a zero; toma valores positivos ou negativos.
b) Para quais valores de argumento o polinômio tem valor minimal ou maximal e qual deles:
1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;
2) $f(p) = -3p^2 + 4p - 5$;
3) $f(t) = -t^2 + 7t - 12$;
4) $f(n) = -4n^2 + 12n - 9$;
5) $f(r) = 3r^2 - 5r + 2$.

Vestibular no Japão

No Japão provas rigorosos sao exigidas nas muitas (talvez, todas) universidades. Apresentamos um exemplo.

Japanese University Entrance Examination Problems in Mathematics
Edited by Ling-Erl Eileen T. Wu
Mathematical Association of America

O item 2 da sessão "Content and Scope of the Exam Problems" inclue:
Provas e afirmações. Incluindo combinatória, números inteiros, grafos e desigualdades.

Problema incluído no vestibular da Universidade Médica de Shiga:

1. (1) Dado $a^2 \geq b$, onde a, b são números naturais, provar que a condição necessaria e sufficiente de

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

ser um número natural é que existe um número natural n tal que

$$n^2 < a \leq 2n^2 \quad \textbf{e} \quad b = 4n^2(a-n^2).$$

Solução fornecido pelo artigo. Seja

$$m = \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

é um número natural onde $a^2 \geq b$ e a, b são números naturais. Tomando quadrado dos ambos lados, temos

$$m^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-b},$$

logo

$$m^2 - 2a = 2\sqrt{a^2-b},$$

Tomando quadrados dos ambos lados, temos

$$(m^2-2a)^2 = 4(a^2-b),$$

logo

$$m^4 = 4(am^2-b).$$

Pois o lado direito é um número par, existe número natural n tal que $m = 2n$. Logo (4) torna-se

$$4n^4 = 4am^2(a-n^2).$$

(5) e $b \geq 1$ implicam $a - n^2 > 0$, logo $n^2 < a$. De (3) $(2n)^2 - 2a \geq 0$, logo $a \leq 2n^2$. Junto temos

$$n^2 < a \leq 2n^2 \quad \text{e} \quad b = 4n^2(a-n^2).$$

Na outra direção, se a, b, n satisfazem (6), definimos $m = 2n$ para obter (4) e depois (3). Pois $m^2 - 2a \geq 0$, temos (2) e, consequentemente,

$$m = \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

George Polya: Avisos para Professores

O famoso matemático e professor George Polya escreveu um ótimo livro **"Descobrimento Matemático. Sobre entendimento, estudo, e ensino de solução de problemas." (George Polya. Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined edition. John Wiley & Sons, 1981, p.59.)**

Na página 117 deste livro Polya apresenta **"Dez mandamentos para professores."**

1. Fique interessado em seu assunto.
2. Conheca seu assunto.
3. Conheca jeitos de estudar: O melhor jeito de estudar alguma coisa é descobrir ela por você mesmo.
4. Tente ler as faces dos seus alunos, tente reconhecer suas esperanças e dificuldades, coloca você mesmo no lugar deles.
5. Dá-los não somente informação, mas também "como-fazer", atitudes da mente, hábito de trabalho metódico.
6. Ajudá-los estudar adivinhar.
7. Ajudá-los estudar a provar.
8. Busque destaques do problema presente que podem ser úteis para resolver o problema futuro - tente mostrar uma regra geral através da situação concreta atual.
9. Não denúncia todo o seu segredo imediatamente - faça alunos adivinhar antes de dizer tudo - faça eles descobrir por eles mesmos tanto muito como possivel.
10. Avise, não força.

Eu gosto muito destes mandamentos, mas acho que eles precisam de várias explicações. Vou dar algumas destas explicações no andamento de meu curso.