



**Pedro Luiz Malagutti**  
Departamento de Matemática  
UFSCar

**OS QUATRO  
ELEMENTOS  
(FOGO, TERRA, ÁGUA E AR)  
E A MATEMÁTICA**

**II Bienal da SBM**

---

Malagutti, Pedro Luiz  
Os Quatro Elementos (Fogo, Terra, Água e Ar) e a Matemática

---



**PEDRO LUIZ MALAGUTTI**

Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos  
Rodovia Washington Luiz, Km 235  
13.565-905 SÃO CARLOS - SP  
Fone/Fax 0 XX 16 260 8218  
E-mail: [malagutti@dm.ufscar.br](mailto:malagutti@dm.ufscar.br)

**II Bienal da SBM**

**UFBA**

**Salvador - BA**

**25 a 29 de outubro de 2004**

**Sociedade Brasileira de Matemática**

**Título:** OS QUATRO ELEMENTOS (FOGO, TERRA, ÁGUA E AR) E A MATEMÁTICA

**Tipo:** Conexões históricas e interdisciplinares com áreas recentes da Matemática.

**Público-Alvo:** Estudantes do início da Graduação.

**Descrição:** Este mini-curso pretende salientar pedagogicamente as conexões do início da filosofia da natureza com algumas recentes descobertas matemáticas. A justificativa para isto é muito simples: se o homem passou no início da civilização por este ritual de "revelação científica", que marcou tão profundamente nossa cultura, parece-nos muito salutar e natural colocar tais questões aos alunos, principalmente se ela puder ser abordada segundo uma perspectiva interdisciplinar.

# ***O SILÊNCIO***

*Arnaldo Antunes / Carlinhos Brown*

Antes de existir computador existia a tevê  
antes de existir tevê existia luz elétrica  
antes de existir luz elétrica existia bicicleta  
antes de existir bicicleta existia enciclopédia  
antes de existir enciclopédia existia alfabeto  
antes de existir alfabeto existia a voz  
antes de existir a voz existia o silêncio  
o silêncio

foi a primeira coisa que existiu  
O silêncio que ninguém ouviu  
astro pelo céu em movimento  
e o som do gelo derretendo  
o barulho do cabelo em crescimento  
e a música do vento  
e a matéria em decomposição  
a barriga digerindo o pão  
explosão de semente sobre o chão  
diamante nascendo do carvão  
homem pedra planta bicho flor  
luz elétrica tevê computador  
batedeira liquidificador  
vamos ouvir esse silêncio meu amor  
amplificado no amplificador  
do estetoscópio do doutor  
no lado esquerdo do peito esse tambor

# RESUMO

Desde os mais remotos tempos o homem tentou entender a natureza com o uso da razão. Os cinco sentidos, tanto no ser humano como nos animais, no entanto, permitem o conhecimento intuitivo do mundo sensível, com pouco apelo ao intelecto racional.

No início da civilização, a natureza mostrava-se ao homem cruel e perigosa. Os fenômenos naturais atentavam contra a sobrevivência da espécie e contra o convívio social e, na impossibilidade de compreender a ira da natureza, os homens começaram a atribuir características divinas às manifestações naturais, tais como tempestades, erupções vulcânicas, falta ou excesso de chuvas etc. Criações de mitos e lendas que explicam os fenômenos da natureza parecem comuns a todas as culturas.

## Uma lenda afro-brasileira

Conta-se que Olorum (Deus), encontrou Iemanjá (Rainha das águas) em seu trono e ficou muito bravo. Para castigá-la, Olorum determinou que Iemanjá fosse habitar o planeta Terra. Iemanjá levou consigo suas porções de água (os 7 mares) afim de acomodá-los nos sete vales do planeta, mas como não havia espaço suficiente, o planeta acabou inundando. Preocupada, ela pediu ajuda a Ogum - o trabalho físico na terra. Ela pediu que Ogum cavasse a terra para que suas águas se acomodassem. Descuidadamente Ogum abriu uma fenda profunda no solo, atingindo o reino de Obaluaíê (o fogo geológico - subterrâneo). Obaluaíê se sentiu ofendido por seu reino ter sido inundado e reagiu com um terremoto que abalou a Terra enrugando-a. Assim se formaram os continentes, os vales e as montanhas. Iemanjá representa também a fertilidade, a vida que vem da água. Xangô e toda a sua genealogia do fogo, aqueceu a terra criando condições de vida. O fogo aqueceu a água que se evaporou, formando o ar que vem a ser Oxalá, aparecendo a seguir as florestas e a flora simbolizadas por Oxossi.



Iemanjá  
Água



Oxalá  
Ar



Obaluaíê  
Terra



Xangô  
Fogo

### **Os homens desejam por natureza o saber**

*Os homens começam e começaram sempre a filosofar movidos pelo espanto [...] Aquele que se coloca uma dificuldade e se espanta reconhece sua própria ignorância. Por isso, o que ama os mitos é, de certa maneira, filósofo, pois o mito está repleto de espantoso. De sorte que, se filosofam para fugir da ignorância, é claro que buscavam o saber em vista do conhecimento, e não em vista de alguma utilidade. (Metafísica de Aristóteles)*

Com o desenvolvimento da civilização e a formação de cidades, o homem sentiu-se mais protegido dos infortúnios da natureza; muitas questões filosóficas surgiram e estas não puderam mais ser respondidas através da mitologia. Nascia a Ciência. Os primeiros registros sobre pensadores que tentaram explicar o mundo físico através do raciocínio nos levam aos filósofos pré-socráticos -- ou filósofos da natureza -- eles viveram na Grécia por volta dos séculos VII ou VI a.C. Esses filósofos gregos eram observadores atentos da natureza e ao mesmo tempo intelectuais ativos; não só não aceitavam as explicações mitológicas dos fenômenos naturais, como também buscavam os princípios, as causas primeiras, a origem do universo. A força argumentativa destes pensadores nos iluminam até os dias atuais; foram eles que construíram os alicerces das Ciências da Natureza e da Matemática. Destacam-se:

Tales (624-556? a.C.), Anaximandro (610-547 a.C.) e Anaxímenes (585-528 a.C.), da cidade de Mileto,  
Heráclito (540-470 a.C.) de Éfeso,  
Pitágoras (de Samos) (578-496? a.C.) e seus seguidores,  
Parmênides (530-460 a. C.) e Zenão (490-425? a.C.) de Eléia,  
Anaxágonas (500-428 a.C.) de Clazómena,  
Empédocles (490-435 a.C.) de Agrigento e  
Demócrito (460-370 a.C.) de Abdera.

Esses primeiros filósofos propuseram-se a discutir questões bastante profundas, tais como: Em que consiste o elemento, se é que ele existe, do qual se originam as coisas que existem na natureza? Como ocorre a transformação dos seres, o vir e o devir das coisas? Pois bem, todos eles responderam a seu modo essas duas perguntas e elas culminaram no desenvolvimento, ao menos no mundo ocidental, da maneira como nossa sociedade atual vê a Ciência e a Tecnologia. Podemos diferenciar as cosmogonias – que faziam uma hierarquia dos seres, endeusando-os e personificando-os - das cosmologias – que tratam os elementos não como deuses, mas como constituintes naturais, impessoais, que se combinam para formar o mundo ordenado (terra, fogo, ar e água).

O objetivo principal destas notas é salientar pedagogicamente as conexões do início da filosofia da natureza com algumas recentes descobertas matemáticas e a justificativa para isto é muito simples: se o homem passou no início da civilização por este ritual de “revelação científica”, que marcou tão profundamente nossa cultura, parece-nos muito salutar e natural colocar tais questões em sala de aula, principalmente se ela puder ser abordada segundo uma perspectiva interdisciplinar.

A história da Filosofia costuma iniciar-se com o reconhecimento da idéia de uma unidade primordial que gera dentro de si todos os seres. Os gregos e os orientais partilhavam deste pensamento, mas de uma forma diferenciada: enquanto que para os povos do Oriente a unidade fundamental é a única realidade existente, para os gregos a materialização desta unidade original cria diferenças reais. Assim a capacidade de dar origem aos diferentes (fogo/quente, terra/seco, ar/frio e água/úmido) e suas inter-relações, foi o que deu origem à filosofia grega.



Iniciaremos nossa jornada com a figura de Tales da cidade Mileto (na Jônia, atualmente pertencente à Turquia). Tales foi um mercador, engenheiro e astrônomo que acreditava que a substância básica da qual todas as outras são formadas era a **água**; esta crença muito provavelmente deveu-se às propriedades físicas e químicas peculiares



da água sem as quais não haveria a vida, como também às suas viagens marítimas, principalmente ao Egito. É considerado o fundador da filosofia cosmológica e sua grande contribuição para a Matemática reside no fato de que as verdades, mesmo que evidentes, devem ser provadas. Além de formular e utilizar seu famoso teorema, acredita-se que Tales tenha demonstrado que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, o mesmo ocorrendo com os ângulos da base de um triângulo isósceles e que qualquer ângulo inscrito em semicírculo é reto, dentre muitas outras façanhas.

Em Mileto também viveu um outro filósofo, de nome Anaximandro, que afirmava que o princípio básico de todo o universo era o infinito (ápeiron) – ilimitado e indefinido - ou seja, algo diferente de tudo o que é criado e que, em constante movimento faz surgir as qualidades: quente (de onde o fogo se origina), frio (produzindo o ar), seco (relativo à terra) e úmido (originando a água). O ápeiron guarda em si muito da nebulosidade mítica do Caos. Anaximandro maravilhava-se com os contrastes existentes no mundo: o fogo que consome o ar, mas se destrói com a água, a terra que se sente desafiada pela água e pelo fogo, o mar que perde sua umidade ao evaporar-se e se mantém em luta contra ele quando ocorrem tempestades, etc. Para ele os seres vivos nasceriam da evaporação da água sob o calor do sol e, pouco a pouco, saindo da umidade passariam a ocupar a terra e o ar passaria a fazer parte de sua constituição. Se houvesse predominância deste último elemento, passariam a ser animais voadores. Este encadeamento de idéias, constituiu-se, talvez, em uma das primeiras teorias da evolução.

### A PRIMEIRA TABELA PERIÓDICA

Com o domínio da linguagem o homem pôde classificar o mundo sensível de acordo sua percepção física. O esquema abaixo pode ser pensado como a primeira tabela periódica dos elementos:



A busca de um material cósmico que explicasse os fenômenos naturais também foi preocupação de Anaxímenes. Ele afirmava que o **ar** era o gerador de todas as coisas materiais, ou seja, estas seriam os estados do ar; através da rarefação ele se transformava em fogo, devido à condensação, primeiramente em água e sendo mais condensado ainda, em terra e, posteriormente, nos demais componentes do mundo físico.

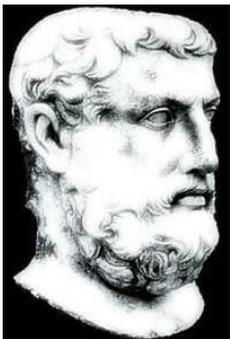
O problema da constituição e da transformação da matéria causaram duas linhas de raciocínio antagônicas, que passaremos a descrever.

Na mesma região em que os três filósofos acima nasceram (Jônia), viveu também Heráclito, da cidade de Éfeso. Sua maneira de argumentar através de aforismos causou-lhe o apelido de “o obscuro”; ele se preocupou com a transformação das substâncias e não propriamente com a constituição das mesmas. Heráclito acreditava que nada permanecia o mesmo, que tudo flui, que tudo se move incessantemente. Existe um movimento contínuo a mover o mundo, transformando o *ser* em *não ser* e assim a existência só pode ser afirmada através da guerra com a não existência e vice-versa.



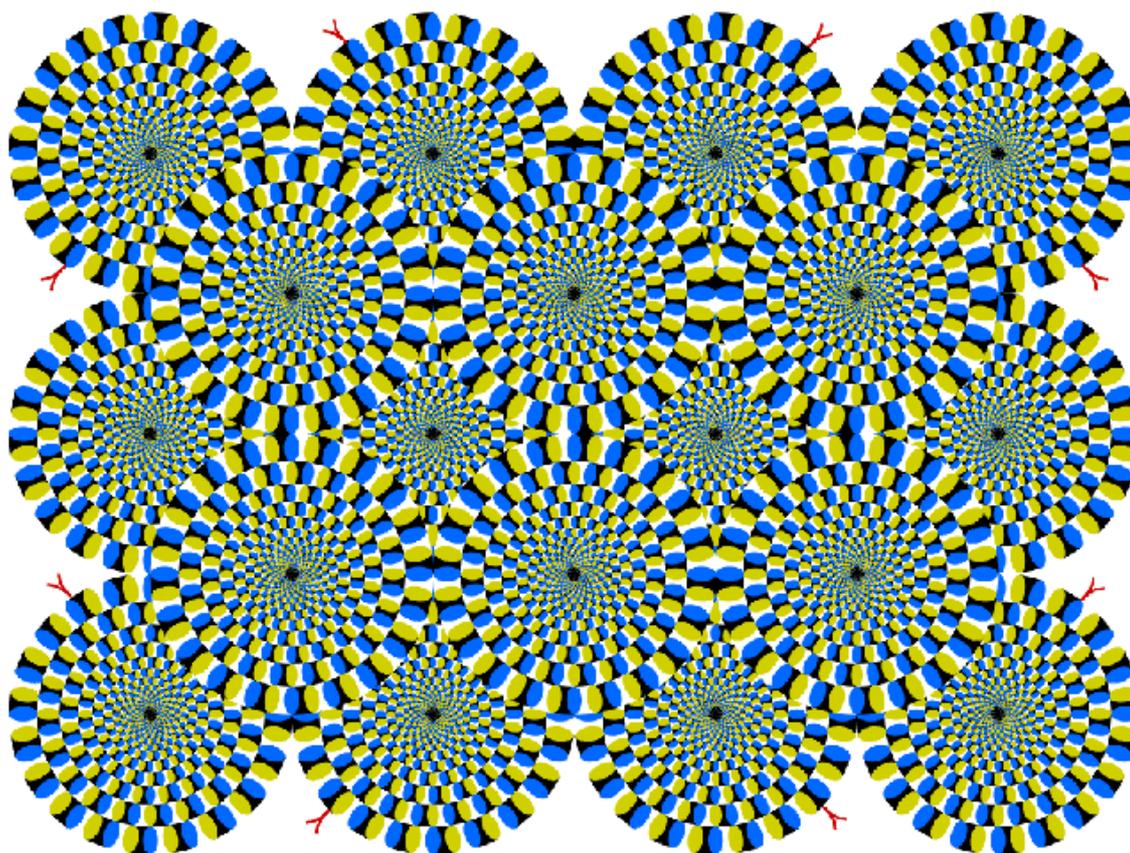
Não podemos entrar duas vezes no mesmo rio, dizia, pois da segunda vez tanto o rio como nós, mudamos.

Para Heráclito o mundo era, é e será um fogo sempre vivo, mas não o fogo como elemento, mas o fogo primordial que é origem viva de todas as coisas. A alma humana, por outro lado, é a mistura de água, ar e fogo e será mais racional se prevalecer esse último elemento sobre os demais.



Em contraponto a essas idéias, na cidade de Eléia surgiu uma escola, liderada por Parmênides, que afirmava que o *ser* é imutável e ao mesmo tempo eterno, pois se o *ser* pudesse se transformar, deixaria de ser o que é, sendo assim um *não-ser*, e se tornaria novamente um *ser*. Isto, segundo Parmênides e seus seguidores é impossível, pois o *ser* é e o *não-ser* não é, ou seja, o não-ser simplesmente não existe. Chega-se assim à negação da transformação e do movimento. Parmênides foi precursor do idealismo de Platão e da explicação materialista do universo de Demócrito.

Observe na figura seguinte se os discos estão se movendo ou estão parados. Em quem confiar, na nossa percepção ou na nossa razão?



Vale a pena lembrar aqui os famosos paradoxos de Zenão, discípulo de Parmênides, que muito argutamente atormentou os demais filósofos de sua época, principalmente os pitagóricos. Zenão é considerado o pai da dialética, isto é, do confronto entre idéias opostas para provar que uma delas é contraditória, portanto falsa ou mesmo para mostrar que ambas são falsas.

**Os paradoxos de Zenão:**

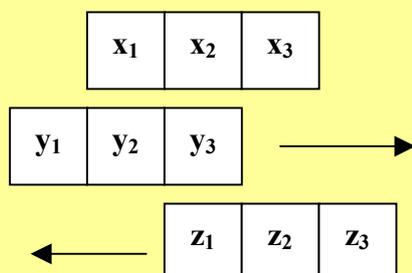


### **Aquiles e a tartaruga**

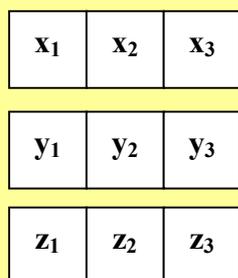
Aquiles, um famoso corredor grego de maratonas, deseja apostar corrida contra uma tartaruga. Inicialmente a tartaruga encontra-se 100 unidades de comprimento à frente do corredor. Mas, não importa quão veloz seja Aquiles e quão vagarosa seja a tartaruga, Aquiles nunca poderá alcançá-la. De fato, iniciada a corrida, quando Aquiles se encontrar no ponto onde a tartaruga inicialmente estava, esta última avançou uma certa distância e quando Aquiles chegar ao novo ponto em que a tartaruga estava, ela avançou um pouco mais. Como este processo pode ser repetido indefinidamente e, em cada estágio, a tartaruga sempre se encontra um pouco à frente de Aquiles, ele nunca conseguirá ultrapassá-la, e o movimento torna-se impossível. O que existe de errado neste raciocínio?

## Divisibilidade do tempo

O espaço e o tempo não podem, por divisão, transformarem-se em quantidades indivisíveis. Admitamos que existisse uma unidade de tempo que não pudesse ser subdividida. Tomemos três pequenas fitas com o mesmo tamanho (de papel, por exemplo), divididas em pequenas casas, inicialmente dispostas como na figura:



Mantemos a fita  $x_1, x_2, x_3$  fixa. A fita  $y_1, y_2, y_3$  move-se para a direita de modo que cada  $y_i$  passa  $x_i$  no menor instante de tempo possível (indivisível). Simultaneamente, a fita  $z_1, z_2, z_3$  move-se para a esquerda de modo que cada  $z_i$  passa  $x_i$  no mesmo instante de tempo. Deste modo, depois de passado um instante de tempo indivisível, as fitas terão a seguinte disposição:



Observemos que  $z_1$  passou por dois  $y_i$ 's. Portanto o instante de tempo não pode ser o menor possível, pois existiria um instante de tempo ainda menor, precisamente aquele gasto quando  $z_1$  passou por um dos  $y_i$ 's (que seria a metade da unidade indivisível de tempo). Isto seria então uma prova de que o tempo não existe?



**Pitágoras**, natural da ilha de Samos, tinha aproximadamente 20 anos quando Tales morreu, embora não se saiba se ambos vieram a se conhecer. Pitágoras foi uma figura lendária, fundador de uma sociedade secreta de cunho religioso, voltada ao estudo da Filosofia, tendo a Matemática como via de salvação. Esta espécie de confraria pressupunha a imortalidade da alma, cuja purificação deveria ser fruto do trabalho intelectual na busca da harmonia e da estrutura numérica das coisas. A cosmologia pitagórica vê o universo formado por unidades indivisíveis, separadas por intervalos resultante da respiração do universo vivo. Deste modo o universo inalaria o ar infinito no qual se encontra mergulhado. As unidades indivisíveis seriam os números, que formariam assim a alma de tudo o que existe. Os objetos manifestariam sua estrutura numérica interior e todo o universo deveria se organizar de acordo com proporções equilibradas, regidas pelos números e suas relações.

Para os pitagóricos os quatro qualidades – quente, frio, úmido e seco - são apenas manifestações das combinações ou dissociações dos números.

A descoberta pelos pitagóricos da existência de números irracionais provocou uma profunda crise em sua sociedade e, muito provavelmente por causa disto, passaram a estudar os aspectos geométricos, em detrimento aos aspectos mais algébricos da Matemática.

As idéias de Pitágoras influenciaram toda a matemática grega posterior e muitos de seus conceitos abstratos tais como o estudo do mundo físico através da Matemática e a concepção de um Deus harmônico que rege o universo, sobrevivem até os dias atuais.

### **A PRIMEIRA COISA QUE TODO MATEMÁTICO DEVERIA SABER**

#### **A medida da diagonal do quadrado de lado 1 não é racional**

A medida da diagonal  $d$  do quadrado elevada ao quadrado deve ser igual a 2, devido ao Teorema de Pitágoras. Se, raciocinando por absurdo,  $d$  fosse a divisão de dois inteiros, poderíamos cancelar os fatores comuns do numerador e do denominador nesta divisão e obter uma fração equivalente irredutível, ou seja

$$d = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad \text{mdc}(p, q) = 1. \quad \text{Como} \quad d^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

e como o quadrado de  $p$  é par,  $p$  deve ser par. Então  $q$  deve ser ímpar, pois não tem fatores comuns com  $p$ . Mas a última equação nos diz que  $q$  também deve ser par, pelo mesmo motivo anterior. Isto é uma contradição e portanto  $d$  não pode ser racional.

O antagonismo entre as idéias de Heráclito e de Parmênides (para o primeiro a natureza está dialeticamente mudando enquanto que para o segundo o ser é eterno) apresentou-se como um desafio para as gerações posteriores de filósofos. Algumas tentativas de conciliar a origem das coisas com as transformações da natureza geraram idéias filosóficas importantes. As principais foram desenvolvidas por Anaxágoras, Demócrito e por Empédocles.

Demócrito foi o pai da teoria que coloca os átomos como formadores do universo. Eles eram, para ele, partículas indivisíveis e minúsculas que se achavam em constante movimento. O vácuo entre os átomos, para Demócrito, tem existência real. O agrupamento ou a dispersão dos átomos seria responsável pela existência de todos os seres.

Anaxágoras acreditava que no princípio havia um *magma* em que tudo estava misturado e que existia uma força inteligente ou um motor cósmico, separada do magma, que provocaria neste um movimento - como um turbilhão - separando o denso e o rarefeito, o frio e o quente, o úmido e o seco, a luminosidade da escuridão. A ordem de formação seria a seguinte: primeiramente seriam formadas duas massas gigantescas, uma de fogo envolvendo outra de ar. Em continuação o ar se separaria em nuvens, água, terra e finalmente, o fogo se dissociaria dos demais elementos e o mundo estaria formado.

Empédocles acreditava na pluralidade; defendia que o universo era composto pelos seguintes quatro elementos básicos: ar, água, fogo e terra e que a qualidade de nenhum deles seria preponderante sobre os outros. As coisas existentes seriam o resultado da mistura desses quatro elementos, em diferentes proporções e existiria um movimento cósmico primordial que

regeria essas combinações, harmonizando ou dissociando os elementos básicos. Empédocles era médico e concebia o corpo humano formado por quatro humores (líquidos): sangue, fleuma, bÍlis amarela e bÍlis negra. Estes humores eram dotados de quatro propriedades: seco, úmido, frio e quente e a combinação deles formava a natureza de cada pessoa – sangüínea, fleumática, colérica ou melancólica. O pensamento de Empédocles valorizou a experiência perceptiva; ele critica as pessoas que vangloriavam-se de conhecer tudo, ou seja, os donos da verdade, pois, argumentava ele, a vida é breve e o conhecimento adquirido é sempre parcial; tais pessoas não reconhecem como é difícil conhecer (afirmar que a verdade não pode ser alcançada pelos sentidos não nos dá o direito de dizer que ela será conhecida inteiramente pelo espírito).



O que ocorre com a madeira queimando? A água é o que faz a madeira crepitar e estalar. A fumaça é devido ao ar, o fogo é o que vemos e as cinzas são a terra.

Com o desenvolvimento das cidades-estado na Grécia Antiga e a participação dos homens livres nas decisões políticas, as preocupações filosóficas passaram então a focalizar o homem enquanto ser político e social, colocando de lado as questões principais da filosofia pré-socrática acerca da natureza e da essência do universo.

A filosofia, segundo o modo particular de argumentar de Nietzsche, começa e termina com os filósofos pré-socráticos, isto é, com todos os filósofos que fizeram da dualidade entre o dionisíaco (a fúria dos contrários e a desordem) e o apolíneo (o desejo de harmonia, luz e ordem) o núcleo da própria natureza e da realidade.

O surgimento da democracia grega fez emergir um grupo de filósofos, chamados sofistas, que dominavam a oratória e, através de sofisticados jogos de palavras e raciocínios lógicos, tentavam impor sua linha de raciocínio. Muitos sofistas empregavam suas habilidades em troca de pagamento, colocando a subjetividade de valores como instrumento para conquistas individuais, mas como a História só registra os feitos dos vencedores, isto pode apenas uma difamação desta importante corrente filosófica.

#### **Paradoxo sofista do cavalo bom e barato**

Tudo o que é raro é caro.  
Um cavalo bom e barato é raro.  
Logo um cavalo bom e barato é caro.

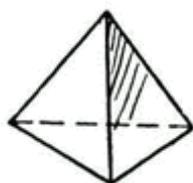


Por questões éticas e contra os ideais sofistas rebelou-se o grande filósofo Sócrates, "o mais sábio de todos os homens". Sócrates usava o diálogo como forma de argumentação filosófica, levando seu interlocutor, muitas vezes ironicamente, à descoberta e consciência de verdades encravadas em sua própria alma. A ética, a moral e a busca pelo bem em sociedade foram os legados deste admirável pensador. Foi acusado e condenado por incitar e rebelar os jovens de sua época e morreu envenenado para não trair seus ideais.

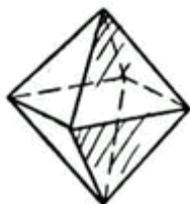


Sócrates teve muitos discípulos; o mais notável deles foi Platão que viveu em Atenas entre 428 e 348 a.C. e herdou as preocupações morais de seu mestre. Platão fundou uma academia que durou mais de nove séculos, agregando importantes filósofos, matemáticos e astrônomos e contribuindo significativamente para a Filosofia da Ciência. Platão priorizava sobremaneira a razão sobre a sensação; todas as ciências deveriam ser matematizadas em detrimento de uma abordagem experimental. Os problemas do mundo físico não deveriam ser tratados por métodos baseados na observação, pois existiria um mundo ideal, separado do mundo sensível e acessível apenas pela razão; segundo Platão somente o raciocínio permite-nos adentrar no mundo ideal afim de atingir o verdadeiro conhecimento.

Platão também refletiu sobre a constituição da matéria; ele retomou a tradição pitagórica e identificou os quatro elementos básicos de Empédocles com os quatro sólidos regulares:



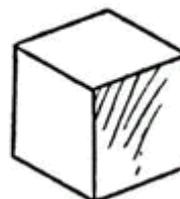
fogo  
tetraedro



ar  
octaedro

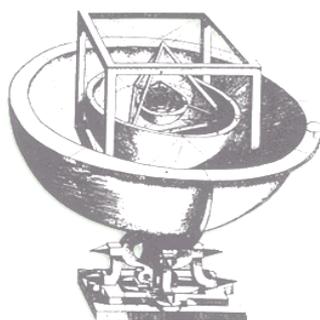
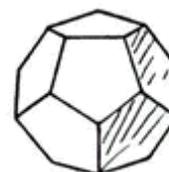


água  
icosaedro



terra  
cubo

O quinto sólido de Platão (dodecaedro) corresponderia ao universo



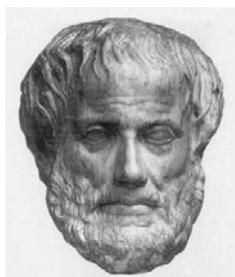
Curiosamente Kepler retomou essas formas, muitos séculos mais tarde, em um modelo cosmológico sinônimo da perfeição, embora errôneo. O fogo é o mais seco dos quatro elementos e é representado pelo tetraedro que tem o menor volume para sua superfície e como ocorre exatamente o oposto como icosaedro, este deve representar a água. Por sua estabilidade, o cubo deve representar a terra, o octaedro o ar já que ele facilmente rodopia e finalmente o dodecaedro representa o universo, pois tem doze faces, tantas quanto são os signos zodiacais.

Quanto às transformações que ocorrem na natureza, Platão sugeriu algumas fantásticas explicações, por exemplo, que a água se transformaria em ar (vapor) porque o icosaedro da água se transformaria em dois octaedros de ar e um tetraedro de fogo.

Platão também teve muitos seguidores, seu discípulo mais famoso foi Aristóteles que o acompanhou até o final de sua vida. Aristóteles foi professor de Alexandre, o Grande, que expandiu os domínios do império grego à todo o mundo conhecido na época.

### As crises da filosofia e Aristóteles

A filosofia nasce do espanto admirativo que os seres humanos têm diante de uma situação problemática, mas não é um impulso espontâneo, sendo causada por uma aporia, isto é uma dificuldade insolúvel para o pensador. Tales deve ter se deparado com o problema de mudança de estado da água, assim como os pitagóricos se espantaram em demonstrar a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. A oposição entre Parmênides e Heráclito mostra que o espanto é, de fato, o impulso inicial das idéias filosóficas. Aristóteles reconheceu as aporias de seus antecessores; ele sabia que Parmênides mesmo fiel a sua doutrina foi forçado a aceitar a pluralidade (no plano da opinião) e que os atomistas, sendo materialistas ferrenhos, tiveram que admitir a existência do vazio, isto é, do imaterial. A partir desses conhecimentos, Aristóteles desenvolveu, com clareza ímpar, as bases do pensamento ocidental, no qual estamos imersos.



**Aristóteles** desenvolveu um sistema filosófico próprio, diferente do de Platão. A essência do que existe é obtida pela razão aplicada aos dados fornecidos pelos sentidos, colocando o conhecimento da verdade como uma abstração da natureza. Não há mais o mundo das idéias de Platão, mas a descoberta da verdade pelos olhos da razão. Foi um organizador; nas ciências naturais classificou os seres (animados e inanimados), fundou a Lógica estudando a estrutura dos silogismos, dentre outras inúmeras contribuições.

Aristóteles estudou e comentou os trabalhos dos filósofos anteriores a ele. Analisando os princípios substanciais que constituem o universo, ele discerniu três grupos de idéias: as que defendiam os elementos materiais como formadores do mundo físico (dentre os quais a terra, o fogo, o ar e água na escola jônica, as sementes de Anaxágoras e os átomos de Demócrito), as que colocavam o princípio fundamental como imaterial (platônicos, eleatas e pitagóricos) e o concreto, os seres em sua individualidade (visão do homem comum). Aristóteles criticou a todos e aproveitou o que cada um deles tinha de fundamental; para ele os princípios substanciais estão baseados nas idéias de **matéria** e **forma**. Esses princípios são abstrações inteligíveis e inseparáveis: não existe matéria sem forma e nem forma sem matéria.

Quando a matéria recebe a forma ela se organiza nos quatro elementos perceptíveis: quente, seco, frio e úmido, ou seja, a matéria dos seres físicos é aquela que recebeu a forma dos quatro elementos: **fogo, terra, ar e água**. Todas as substâncias naturais seriam assim combinações desses elementos em proporções variadas. E quanto ao movimento, à transformação da matéria, como pensava Aristóteles? Ele introduziu os conceitos de potência (possibilidades latentes da matéria) e ato (a realização da potência). Segundo o filósofo, existem quatro tipos de movimentos no mundo físico: o substancial (geração e perecimento), o qualitativo, o quantitativo e a locomoção. Cada um desses movimentos pode ser natural ou brusco, violento. Os movimentos violentos são aqueles impostos por agentes externos a um ser afim de que ele realize movimentos que não lhe são naturais. Os movimentos naturais são apenas três:

- ✓ para cima – próprio dos corpos leves, como o fogo e o ar
- ✓ para baixo – próprio dos corpos pesados, como a terra e a água
- ✓ circular – próprio dos astros celestes.

No tempo de Aristóteles acreditava-se que a Terra era o centro do universo; os astros celestes eram eternos, sendo formados por um quinto elemento – o éter ou a quinta-essência. O universo seria ordenado do seguinte modo: o centro do mundo é a terra, depois vem a água, depois o ar, a seguir o fogo e finalmente as esferas de éter.

É muito curioso analisar os estudos de zoologia feitos por Aristóteles: todos os animais são compostos dos quatro elementos e suas qualidades que se combinam nos órgãos, em proporções diferentes para cada gênero. A vida é uma forma de calor que introduz nos seres vivos o quinto elemento - o éter - um sopro de vida invisível e imperecível. Esse calor gera a vida e é transmitido apenas pelo pai, pois o sexo da fêmea, segundo Aristóteles, é frio e por isso ela não consegue ferver o sangue como os machos o fazem. Talvez venha daí a idéia de frigidez da mulher.



Aristóteles foi professor de Alexandre, o Grande, que fundou a cidade de Alexandria no norte da África, onde foi construída a famosa universidade, com sua imponente biblioteca, a qual abrigou muitos matemáticos famosos, como Euclides e Arquimedes, que serão comentados futuramente. É lendário o incêndio provocado por Júlio César, imperador romano, que para se safar de uma derrota contra o Egito, ateou fogo nos navios inimigos e este acabou se espalhando por toda Alexandria, reduzindo a cinzas a mais importante biblioteca do mundo antigo. Euclides foi professor em Alexandria e sua obra “Os Elementos”, constituída por 13 livros, é considerada o marco principal da matemática grega.

## **A SEGUNDA COISA QUE TODO MATEMÁTICO DEVERIA SABER** **Provar que existem infinitos números primos**

Esta prova encontra-se n’Os Elementos de Euclides e destaca-se pela elegância e concisão de seu argumento. Dado um número natural  $n$ , a seqüência de números naturais que se inicia em  $n$  e termina em  $n!+1$ , deve conter pelo menos um número primo.

De fato, se dividirmos  $n!+1$  por qualquer número entre 2 e  $n$  inclusive, sempre teremos resto 1, pois  $n!$  contém todos esses números como fatores. Agora, todo número maior do que 1 tem um divisor maior do que 1, pois o próprio número é um divisor de si mesmo. Existe portanto um menor número que é divisor de  $n!+1$  e ele deve ser entre  $n$  e  $n!+1$  (contando-se o extremo superior). Este número tem que ser primo, porque se ele tivesse um divisor menor do que ele e diferente de 1, este divisor também dividiria  $n!+1$  e seria menor do que o menor divisor, o que é um absurdo. Logo ele deve ser primo e assim provamos que entre  $n$  e  $n!+1$  sempre existe um número primo. Como  $n$  é qualquer, existem infinitos números primos.

Arquimedes também apresentava argumentos de uma beleza lógica refinada e intuitiva. Veja por exemplo sua linha de raciocínio ao tratar os corpos que caem:

### **Arquimedes, corpos que caem e a prova por absurdo**

Embora o raciocínio dedutivo baseado na negação da tese para se chegar à negação da hipótese já fosse amplamente utilizado pelos gregos antigos, existe uma beleza singular na demonstração feita por Arquimedes que dois corpos no vácuo soltos na mesma altura, devem atingir o solo simultaneamente, independente de suas massas. O senso comum nos induz a pensar que o corpo mais pesado atinge o solo antes, mas isto é um erro. Arquimedes pensou assim: se, por absurdo, corpos mais pesados chegassem ao solo antes dos mais leves, poderíamos atar os dois corpos formando um novo corpo com massa maior do que qualquer uma das partes. Este novo corpo deveria, por um lado, cair mais depressa que cada parte separada e, por outro, estando atados, o corpo mais leve frearia o caimento do corpo mais pesado, fazendo com que o conjunto caísse mais lentamente que o corpo mais pesado sozinho. Sem apelos experimentais chegamos a um belo absurdo!

O declínio da civilização grega foi provocado e seguido pelo Império Romano. A cultura grega foi incorporada à romana e muitos dos ideais filosóficos gregos foram retomados por pensadores do novo império.

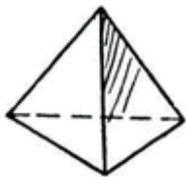
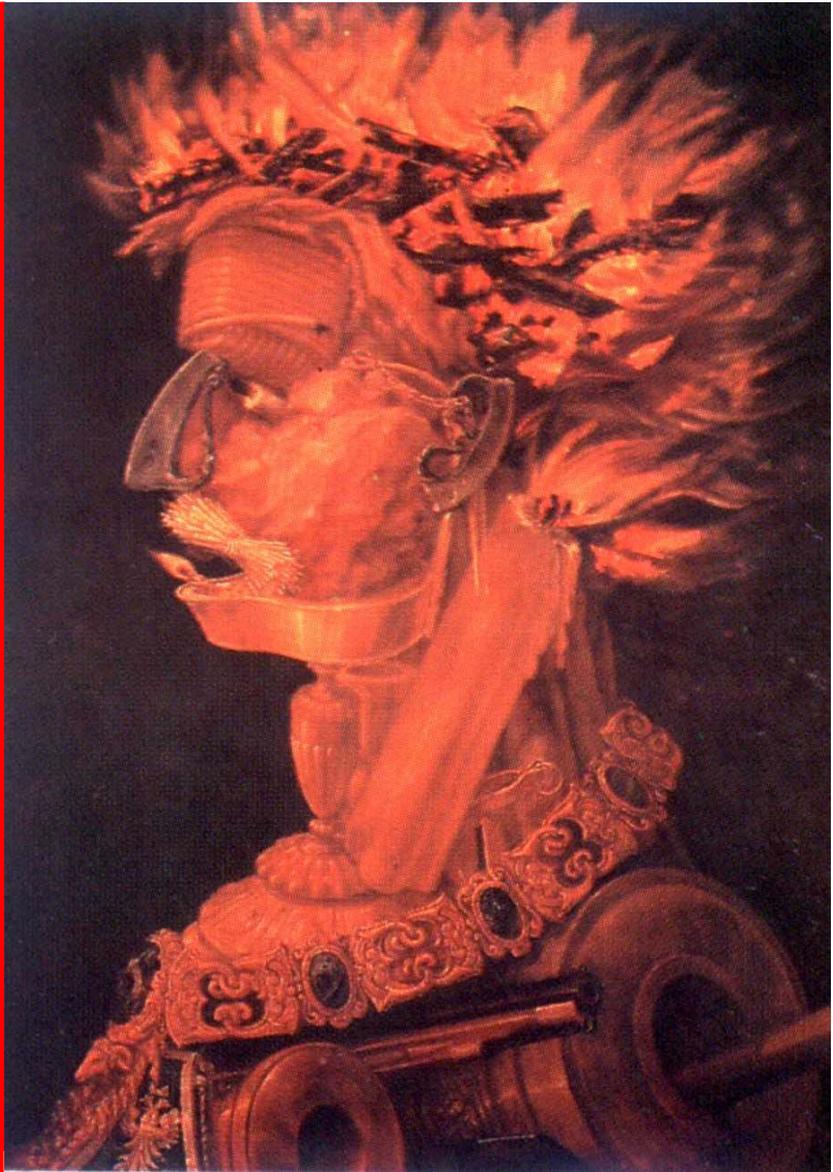
Do ponto de vista prático, merecem destaque os trabalhos de Herão, que viveu em Alexandria na metade do século I da era cristã. Herão produziu trabalhos em engenharia e agrimensura (elemento terra), escreveu também um livro sobre Pneumática, descrevendo engenhos mecânicos como um sifão (elemento água), um órgão de sopro (elemento ar), um carro de bombeiro e um dispositivo que abria as portas do templo ao se acender fogo num altar (elemento fogo).

A filosofia grega, imediatamente após a cristianização do Império Romano, era considerada uma heresia; mas, com o decorrer dos séculos, as idéias de Platão e de Aristóteles foram utilizadas pela Igreja para legitimar a doutrina cristã, principalmente nas releituras mais tardias destes filósofos. Concomitantemente como o cristianismo, desenvolveu-se em Roma uma escola filosófica neoplatônica, liderada por Plotino (205-279 d. C.), que acreditava na divisão corpo/alma. Deus figurava como uma fonte de luz e a alma humana seria uma centelha de fogo, enquanto o corpo e o mundo material seriam a matéria fria distante da fogueira que representa Deus. A natureza receberia de Deus um pouco de sua luz e distante dela encontram-se a terra, a água e os demais componentes da matéria. Observamos que, segundo esta visão, o neoplatonismo e o cristianismo eram idênticos; alterando as idéias de Aristóteles de modo a aproximá-lo de Platão, os primeiros pensadores cristãos tentaram tornar as idéias aristotélicas aceitáveis para Igreja.

Mas esta é outra história e nesta época os quatro elementos da natureza já se encontravam aprisionados pela Ciência e pela Religião, embora se acredite que ainda hoje eles devam estar fugindo desta cela pela mente inquieta de algum aluno. É o que procuraremos revelar.



# O F O G O

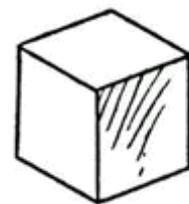


Como derivar  $\frac{1}{2}$  vez uma função descontínua

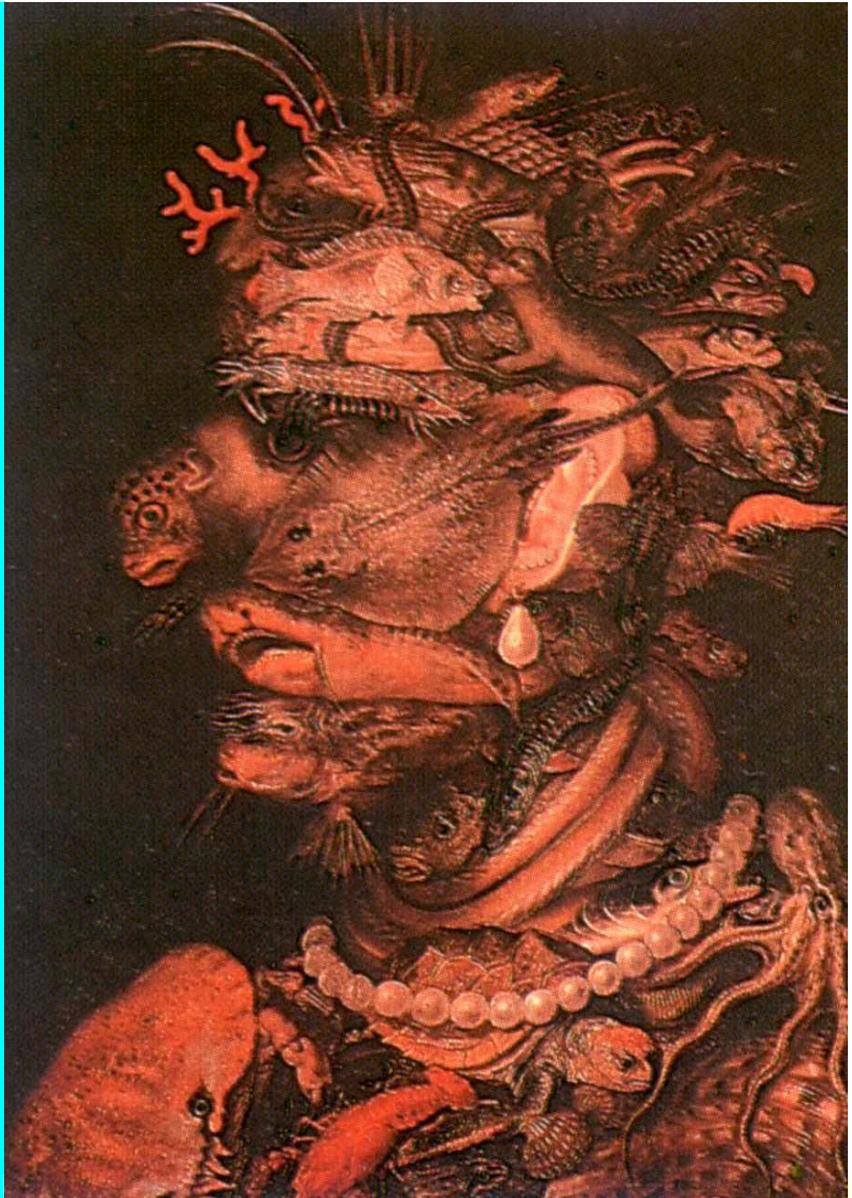


# A T E R R A

Como Euclides ajudou os aliados na Segunda Guerra



# A Á G U A

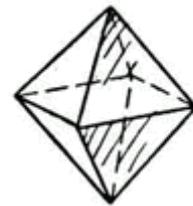


Computadores movidos a água



O  
A  
R

Do sopro da vida ao DNA



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Apostila DNA – Técnicas e Aplicações, Dep. De Bioquímica – USP, 2002
- [2] Barbosa, Ruy M. Combinatória e Probabilidades, G. E. E. M., Livraria Nobel, 1971.
- [3] Bassanezi, R. e Ferreira Jr., W., *Equações Diferenciais com aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [4] Blum, L., *Lectures on a Theory of Computation and Complexity over the reals*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, CNPq, 1991.
- [5] Carniell, A. e Rathjen, M., Combinatória e Indemonstrabilidade ou o 13º. trabalho de Hércules, *Matemática Universitária* 12 (1990), 23-41.
- [6] Chalita, G., *Vivendo a filosofia*, Atual Editora, 2002.
- [7] Coutinho, S., *Números Inteiros e Criptografia RSA*, IMPA VNPq.
- [8] Cunha, L., *O inventor de brincadeiras*, Ed. Dimensão, Belo Horizonte, 1996.
- [9] Dewdney, *The Turing Omnibus*, Computer Science Press, Oxford, 1989.
- [10] Eves, H., *Foundations and Fundamental Concepts os Mathematics*, Dover Publications, Inc., 1990.
- [11] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Ed. da Unicamp, 1995.
- [12] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1977.
- [13] Gaarder, J. *O mundo de Sofia*, Cia. Das Letras, 1991.
- [14] Gerstein, L., *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*, Springer, Berlin, 1996.
- [15] Hopcroft and Ullman, *Formal Languages and their relation to Automata*, Addison-Wesley, Reading Mas., 1969.
- [16] Hondericch, T., *Philosophy*, The Oxford Companion to, Oxford Univ. Press, NY, 1995.
- [17] Hounie, J., *Introdução aos operadores pseudo-diferenciais*, 16º. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA CNPq, 1987.
- [18] Hounie, J., *Teoria Elementar das Distribuições*, 12º. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA CNPq, 1979.
- [19] Kastner, B. *Applications of Secondary School Mathematics*, NCTM, 1978

- [20] Lewis and Papadimitriou, *Elements of Theory of Computation*, Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
- [21] Leite, M. O DNA, Folha explica, Publifolha, 2003
- [22] Lopes, S. – Bio, vol 1 e 3, Ed Saraiva, 2002
- [23] Luenberger, D. Introduction to Dynamic System, John Wiley & Sons, 1979
- [24] Malagutti, P. L., *Inteligência Artificial no Ensino Médio*, I Bienal da SBM, Belo Horizonte, 2002.
- [25] Malagutti, P. L., *Sexo e Matemática no Ensino Médio*, XXVI CNMAC, IBILCE- UNESP, 2003.
- [26] Melo, S. T. e Moura Neto, F., *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais*, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, CNPq, 1991.
- [27] Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez, *Análise Combinatória e Probabilidade*, Col. Professor de Matemática, SBM IMPA CNPq, 1991
- [28] Nobre, S. *Proceedings of the Meeting of the International Study Groups on Relations Between History and Pedagogy of Mathematics*, (1994), Blumenal Brasil, Ed. UNESP.
- [29] Pouzadoux, C., *Contos e lendas da mitologia grega*, Cia. Das Letras, 2001.
- [30] Pré- Socráticos, Coleção Os Pensadores, Abril S. A. Cultural, 1985.
- [31] Projeto Teia do Saber – Matemática, DM-UFSCar, 2003.
- [32] Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática.
- [33] Rose, A., *Computer Logic*, Willey-Interscience, London, 1971.
- [34] Santos, J., Mello, M. e Murari, I. Introdução à Análise Combinatória, Ed. Da UNICAMP, 1998.

#### **ARTIGOS EM REVISTAS:**

Leonard Adleman, Molecular computation of solutions to combinatorial problems. Science 266, 1021-1024 (1994).

Revista PESQUISA FAPESP – Especial – Dupla hélice: 50 anos.

#### **ARTIGOS EM JORNAIS:**

Edição Especial Folha de São Paulo – 1953 DNA 2003, 7 de março de 2003.

Caderno MAIS – FSP, 9 de março de 2003.

Folha Ciência A 23 FSP, 22 de maio de 2003.

Folha Ciência A 10 FSP, 14 de março de 2003.

Folha Ciência A 12 FSP, 7 de março de 2003.

## **VÍDEOS:**

Gênios da Genética – Vídeo Escola

Vida com Números – PBS/Vídeo Escola

GATTACA – A Experiência Genética, Columbia Pictures.

## **SITES:**

[www.mas.org/new-in-math/cover/dna-abc.1.html](http://www.mas.org/new-in-math/cover/dna-abc.1.html)

[www.carolina.com/tips/98aug/tips898.asp?print=yes](http://www.carolina.com/tips/98aug/tips898.asp?print=yes)

[www.curckascience.com/ICanDoThat/dna\\_intro.htm](http://www.curckascience.com/ICanDoThat/dna_intro.htm)

[www.odnavaiaescola.com](http://www.odnavaiaescola.com)

[www.icb.ufmg.br/~lbcd/grupoa/wc.html](http://www.icb.ufmg.br/~lbcd/grupoa/wc.html)

[www.ime.usp.br/~cesar/projects/lowtech/setemaiores/dna.htm](http://www.ime.usp.br/~cesar/projects/lowtech/setemaiores/dna.htm)

[www.sciencenews.org/](http://www.sciencenews.org/)

[www.comciencia.br/reportagens/bioinformatica/bio06.shtml](http://www.comciencia.br/reportagens/bioinformatica/bio06.shtml)

<http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/novidade.html>

[http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB\\_home.html](http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html).

[www.waternet.hpg.ig.com.br](http://www.waternet.hpg.ig.com.br)

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>

<http://www2.dm.ufscar.br/~salvador/TS/ia.pdf>

## **SOFTWARES:**

Darwin Pound de Jeffrey Ventrela, Rocket Science Games, Inc.

VisualTuring, Cristian Cheran, 1997.

Winlife

Malagutti's Life

### KITS PEDAGÓGICOS:

A matemática da Reprodução Pró-Ciências UFSCar, 1999.

A matemática do Sistema ABO

A tábua da fortuna e o triângulo de Pascal, Pró-Ciências UFSCar, 2002.

Evoluindo Genética, FAPESP, Programa Pró-Ciências UNICAMP.

Estrutura do DNA em plástico – CDCC-USP, São Carlos

### Referências das gravuras:

O fogo – quadro de Giuseppe Arcimboldo, Kunsthistoriches Museum -Viena

A Terra – quadro de Giuseppe Arcimboldo, Coleção particular

A Água – quadro de Giuseppe Arcimboldo, Kunsthistoriches Museum – Viena

O Ar – quadro de Giuseppe Arcimboldo, Coleção particular



Quatro  
Leo Cunha



AUQA MÁGOA  
ARRRET GUERRA  
OQOQ JOGO  
RA BAR



os quatro (maus) elementos...

