

# A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE

Sérgio Alves  
IME/USP

## 1. INTRODUÇÃO

Neste curso pretendemos desenvolver o estudo da esfera e seus elementos explorando sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes idéias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto, conduzem o aluno a uma melhor compreensão e aprendizagem do tema.

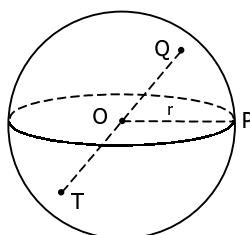
O estudo dos movimentos da Terra nos permite entender, além das quatro estações do ano com seus equinócios e solstícios, porque o Trópico de Capricórnio ou o Círculo Polar Ártico são paralelos notáveis. Veremos ainda que as relações entre longitude e fusos horários bem como entre latitude e o ângulo de elevação do Sol nos levam a problemas geométricos relevantes.

O estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas constituem a fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns modernos sistemas de navegação por satélites, em especial do GPS.

A utilização do globo terrestre, com suas conseqüentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, ou ainda, a confecção de mapas por meio de diversas projeções, abre caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia.

## 2. A SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SEUS ELEMENTOS

Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. A **superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$**  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ .



Os pontos do espaço cuja distância a  $O$  é menor que  $r$  são **interiores** à superfície esférica e aqueles cuja distância a  $O$  é maior que  $r$  são **exteriores** a ela.

A reunião da superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  com seus pontos interiores é chamada a **esfera de centro  $O$  e raio  $r$** .

O segmento que une o centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado **um raio** da superfície esférica enquanto que o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado uma **corda** da superfície esférica.

Uma corda que contém o centro é chamada **um diâmetro** da superfície esférica.

Evidentemente o comprimento de qualquer diâmetro é o número  $2r$  que é chamado **o diâmetro**.

Observamos que a palavra **raio** é usada com dois sentidos: pode ser o número  $r$  ou um segmento  $\overline{OP}$ . Isto, porém, não causa confusão uma vez que é sempre claro qual o significado utilizado. Um comentário análogo vale para a palavra **diâmetro**.

Neste texto a notação  $\overline{PQ}$  representa o segmento de extremos  $P$  e  $Q$  enquanto que  $PQ$  indica o seu comprimento.

Na figura acima  $r$  é o raio da superfície esférica,  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OQ}$  e  $\overline{OT}$  são raios,  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PT}$  são cordas,  $\overline{QT}$  é um diâmetro e  $2r = QT$  é o diâmetro da superfície esférica.

### 3. A INTERSECÇÃO ENTRE UM PLANO E UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é similar com a relação entre circunferências e retas no plano.

Um plano  $E$  é **tangente** a uma superfície esférica  $S$  se  $E \cap S$  contém exatamente um ponto. Esse ponto é chamado **ponto de tangência**. Dizemos que o plano e a superfície esférica se tangenciam nesse ponto.

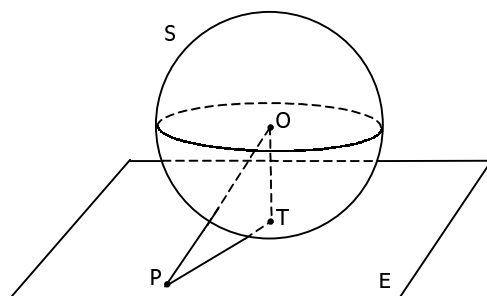
Se  $E \cap S$  contém mais do que um ponto, então o plano é **secante** à superfície esférica.

Podemos caracterizar o plano tangente conforme o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.** Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma. Reciprocamente, todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

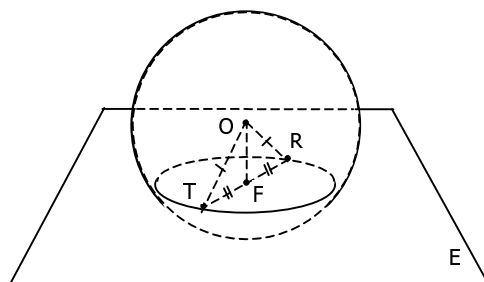
#### Prova.

Seja  $E$  um plano perpendicular ao raio  $\overline{OT}$  em  $T$ , vamos mostrar que nenhum outro ponto de  $E$  está na superfície esférica.



Seja  $P$  um ponto qualquer de  $E$ ,  $P$  distinto de  $T$ . Como  $E$  é perpendicular a  $\overline{OT}$  temos que  $\triangle OPT$  é um triângulo retângulo com hipotenusa  $\overline{OP}$  e catetos  $\overline{OT}$  e  $\overline{PT}$ . Logo  $OP > OT = r$  e, portanto,  $P$  não está na superfície esférica.

Reciprocamente seja  $E$  um plano tangente à superfície esférica no ponto  $T$ . Suponha, por absurdo, que  $E$  não seja perpendicular ao raio  $\overline{OT}$ . Vamos mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

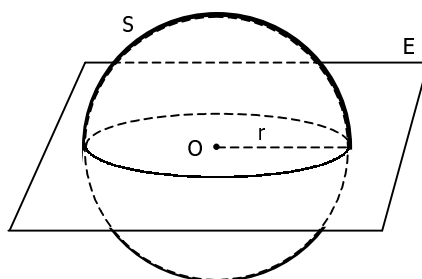


Se  $F$  o pé da perpendicular ao plano  $E$  traçada a partir de  $O$ , temos  $F \neq T$  pois  $E$  não é perpendicular a  $\overline{OT}$ . Seja  $R$  o ponto da reta  $\overline{FT}$  tal que  $T - F - R$  e  $FR = FT$ . Então  $\triangle OFR \cong \triangle OFT$  ( pelo critério LAL de congruência de triângulos ) de modo que  $OR = OT = r$  e, portanto,  $R$  está na superfície esférica. Logo  $E$  intersecta a superfície esférica em um ponto  $R$  distinto de  $T$ . Isso é impossível pois  $E$  é um plano tangente.

□

Vamos agora investigar a figura obtida quando um plano secante corta uma superfície esférica. Se o plano passa pelo centro a resposta é imediata.

**Teorema 3.2.** A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.



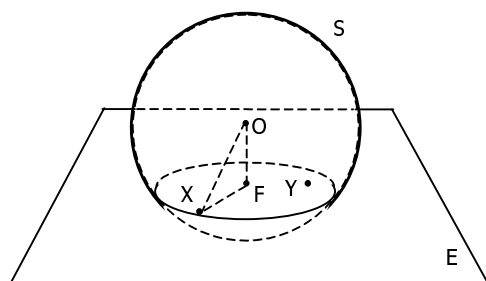
**Prova.**

Dada uma superfície esférica  $S$  com centro  $O$  e raio  $r$  e um plano  $E$  que passa por  $O$ , a intersecção  $E \cap S$  é o conjunto de todos os pontos de  $E$  cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ . Essa é exatamente a definição de uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ .

□

O próximo resultado nos dá a situação mais geral.

**Teorema 3.3.** Se um plano contém um ponto do interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.



**Prova.**

Seja E um plano que não passa pelo centro O da superfície esférica S e que contém um ponto Y do seu interior. Sendo F o pé da perpendicular a E traçada a partir de O, vamos mostrar que a intersecção  $E \cap S$  é uma circunferência de centro F.

Sabemos que  $OY < r$  pois Y está no interior de S. No triângulo retângulo  $\Delta OFY$  temos que  $\overline{OY}$  é hipotenusa, enquanto que  $\overline{OF}$  é cateto. Logo  $OF < OY < r$ , ou seja, F também está no interior de S.

Seja X um ponto qualquer na intersecção  $E \cap S$ . Então  $\Delta OFX$  tem um ângulo reto em F e, pelo teorema de Pitágoras,  $OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$  e, portanto  $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$  (note que  $r^2 - OF^2 > 0$ ).

Logo X está na circunferência de centro F e raio  $\sqrt{r^2 - OF^2}$ . Provamos assim que a intersecção  $E \cap S$  está contida na circunferência de centro F e raio  $\sqrt{r^2 - OF^2}$ .

Isso ainda não significa que a intersecção é a circunferência. Para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto da circunferência pertence à intersecção.

Seja X um ponto qualquer da circunferência, em E, com centro F e raio  $\sqrt{r^2 - OF^2}$ . Novamente pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} OX^2 &= OF^2 + FX^2 \\ &= OF^2 + r^2 - OF^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

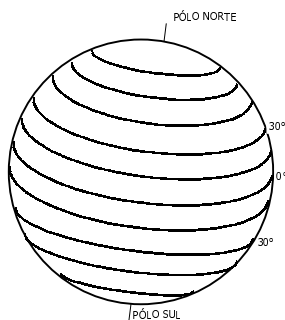
Portanto  $OX = r$  e X pertence à superfície esférica S.

□

A intersecção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada uma **circunferência máxima** da superfície esférica.

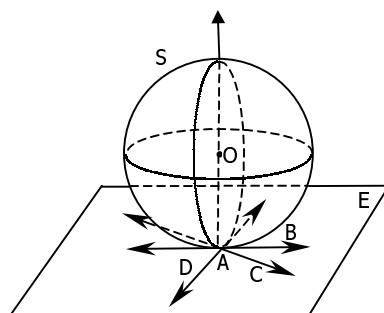
Há uma forte razão para esse nome: as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica. Veremos adiante que o Equador é uma circunferência máxima, mas os outros paralelos no globo terrestre não

o são. Eles são menores que o Equador, tornando-se muito pequenos perto dos Pólos Norte e Sul.



### ATIVIDADES

1. A superfície esférica  $S$  é tangente ao plano  $E$  em  $A$ . O ponto  $O$  é o centro de  $S$  e  $B$ ,  $C$ ,  $D$  estão em  $E$ . Que relação existe entre  $\overline{OA}$  e  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AD}$ ? Explique.

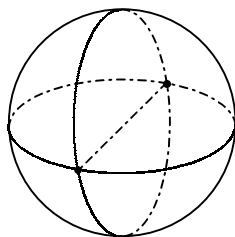


2. A perpendicular do centro de uma superfície esférica a uma corda divide-a ao meio. Utilize este resultado na resolução do seguinte problema. Numa superfície esférica de raio 15, a distância de uma corda ao centro é igual a 9. Qual o comprimento da corda? Apresente ainda uma prova do resultado acima.
3. Dados um plano  $E$  e uma superfície esférica  $S$  de centro  $O$  e raio  $r$ , podemos caracterizar a posição relativa entre  $E$  e  $S$  por meio da distância  $d(O,E)$  de  $O$  ao plano  $E$ . Faça isso completando a tabela abaixo.

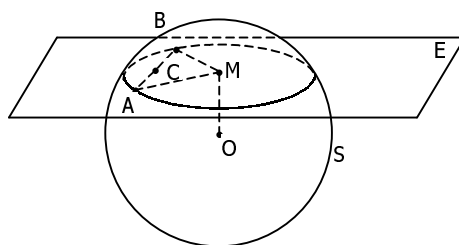
$d(O,E)$	Posição relativa
	$E$ é secante a $S$
	$E$ é tangente a $S$
	$E$ é disjunto de $S$

4. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos de uma superfície esférica  $S$  que não são extremos de um diâmetro de  $S$ . Mostre que existe uma e somente uma circunferência máxima de  $S$  passando por  $A$  e  $B$ . (**Sugestão:** Sendo  $O$  o centro de  $S$ , considere o plano  $E$  determinado pelos pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $O$ .)

5. Explique porque duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica se cortam nas extremidades de um diâmetro da superfície esférica.



6. Na figura abaixo um plano  $E$  intersecta a superfície esférica  $S$  de centro  $O$ . Os pontos  $A, B, C$  e  $M$  estão em  $E$  sendo que  $A$  e  $B$  também estão em  $S$ . Sabe-se que  $\overline{OM} \perp E$ ,  $\overline{AM} \perp \overline{MB}$ ,  $C$  é ponto médio de  $\overline{AB}$ ,  $AM = OM$  e  $AB = 5$ .



Calcule o raio da superfície esférica  $S$ , a medida angular  $m(\angle AOB)$  e a medida  $OC$ .

7. Duas circunferências máximas são ditas perpendiculares se estiverem em planos perpendiculares. Mostre que para cada duas circunferências máximas existe uma terceira circunferência máxima perpendicular a ambas. Se duas circunferências máximas no globo terrestre passam pelos pólos, que circunferência máxima é perpendicular a ambas?
8. Na geometria esférica as “linhas retas” são representadas por circunferências máximas. Encontre, se puder, cada uma das seguintes figuras em tal geometria.
- Um triângulo equilátero.
  - Um triângulo com dois ângulos retos.
  - Um triângulo com três ângulos retos.
  - Um triângulo cujas medidas de seus ângulos somem  $500^\circ$ .
  - Um retângulo, isto é, um quadrilátero com quatro ângulos retos.
9. Sejam  $S$  e  $S'$  duas superfícies esféricas de centros distintos  $O$  e  $O'$ , respectivamente. Sendo  $r$  e  $r'$ ,  $r \geq r'$ , seus respectivos raios, verifique que
- $$S \cap S' \text{ é vazia} \Leftrightarrow OO' > r + r' \text{ ou } OO' < r - r'$$
- $$S \cap S' \text{ é um ponto} \Leftrightarrow OO' = r + r' \text{ ou } OO' = r - r'$$
- $$S \cap S' \text{ é uma circunferência} \Leftrightarrow r - r' < OO' < r + r'$$
- Faça desenhos ilustrando todas estas possibilidades.

(**Sugestão:** Observe inicialmente que  $P \in S \cap S' \Leftrightarrow P \in S$  e  $PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2$ . A seguir, mostre que o conjunto dos pontos P do espaço que satisfazem  $PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2$  é um plano E perpendicular à reta  $\overline{OO'}$  num ponto H definido por  $MH = \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$  com  $O - M - H$ , onde M é o ponto médio do segmento  $\overline{OO'}$ . Conclua a prova utilizando a atividade 3 para obter as relações desejadas.)

10. Quais as possibilidades para a quantidade de pontos da intersecção de três superfícies esféricas? Faça desenhos ilustrando suas respostas.

#### RESPOSTAS

2. 24

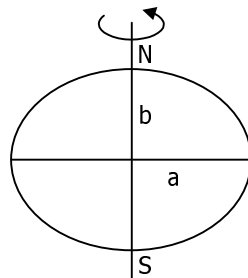
6. 5,  $60^\circ$  e  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

10. 0, 1, 2 ou infinitos pontos

#### 4. QUAL É A FORMA DA TERRA?

A Terra é redonda, mas não é uma esfera perfeita, uma vez que é achatada nos pólos. Na verdade, a Terra é aproximadamente um **elipsóide**.

A figura abaixo mostra uma secção da superfície terrestre através de um plano que contém a reta que liga os Pólos Norte e Sul. Esta secção aproxima-se de uma elipse cujo semi-eixo maior a é a metade do diâmetro do Equador e o semi-eixo menor b é a metade da distância entre os pólos.



A superfície terrestre é a superfície de revolução gerada por essa elipse quando esta gira em torno da reta que passa pelos pólos.

A razão  $\epsilon = (a - b)/b$  chama-se **achatamento** da Terra.

A tabela seguinte mostra valores dos semi-eixos a e b e do correspondente achatamento da Terra, obtidos por alguns pesquisadores.

	a (metros)	b (metros)	$\epsilon$
Bessel (1841)	6.377.397	6.356.078	0,0033541
Clarke (1880)	6.378.249	6.356.515	0,0034191
Helmert (1906)	6.378.200	6.356.940	0,0033443
Hayford (1924)	6.378.388	6.356.911	0,0033785
Krassovski (1940)	6.378.245	6.356.863	0,0033636

O valor extremamente pequeno de  $\varepsilon$  nos permite, para efeitos didáticos, desprezar esse achatamento e considerar a Terra como se fosse uma esfera.

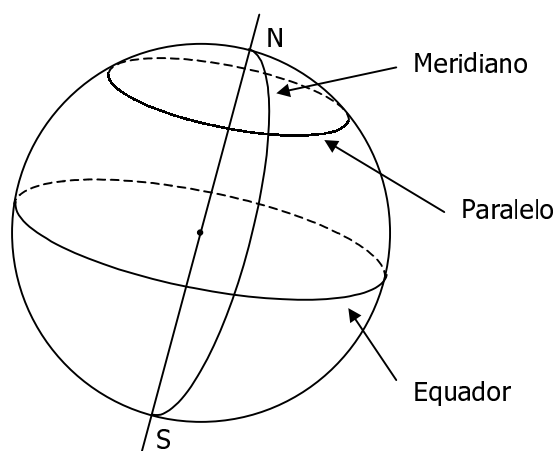
A superfície da Terra passa a ser considerada daqui por diante como um globo: o globo terrestre. O globo terrestre é ainda o nome do instrumento didático que representa a Terra como uma esfera.

Iniciamos estabelecendo a nomenclatura apropriada. A figura abaixo ilustra um globo terrestre.

O ponto N representa o **Pólo Norte** e o ponto S o **Pólo Sul**. A reta determinada por N e S é chamada o **eixo polar**. Ela é a reta em torno da qual a Terra efetua seu movimento de rotação.

O plano que passa pelo centro da superfície esférica e é perpendicular ao eixo polar chama-se o **plano do Equador**.

O **Equador** é a intersecção do plano do Equador com a superfície esférica. O Equador é, portanto, uma circunferência máxima.



Um plano que passa pelo centro da superfície esférica divide-a em duas partes chamadas **hemisférios**.

O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o **Hemisfério Norte** ( que contém o Pólo Norte ) e o **Hemisfério Sul** ( que contém o Pólo Sul ).

Os **paralelos** são as secções da superfície terrestre através de planos paralelos ( ou coincidentes ) ao plano do Equador. São então circunferências. Os paralelos notáveis são:

- o Equador
- o Trópico de Câncer
- o Trópico de Capricórnio
- o Círculo Polar Ártico
- o Círculo Polar Antártico

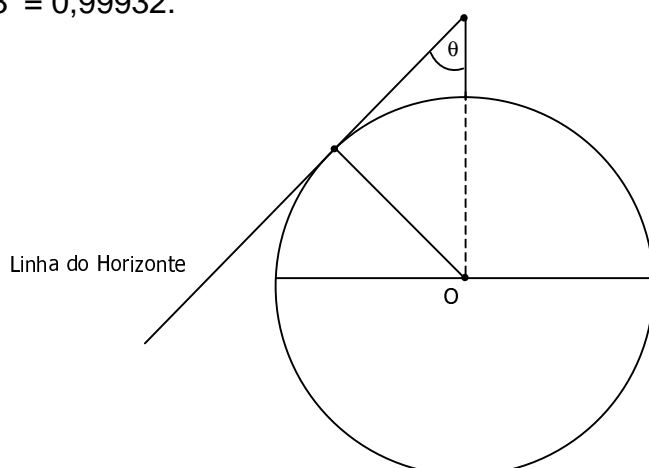
Os **meridianos** são semicircunferências que ligam os Pólos Norte e Sul por meio de arcos máximos, isto é, arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos pólos. Convém ressaltar que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências. Além disso, eles estão contidos em planos perpendiculares ao plano do Equador. O meridiano mais notável é o de Greenwich, nome de uma localidade próxima a Londres, onde está instalado um observatório astronômico.



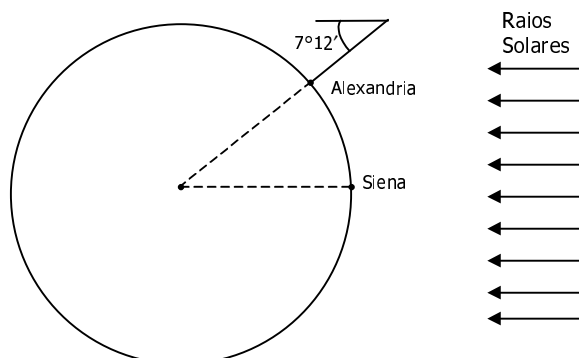
**Observação.** Os livros de Geografia utilizam com muita frequência a palavra “círculo” para designar a circunferência. Em particular, descrevem o Equador como um círculo máximo e utilizam nomes como círculo polar. Isto é, na verdade, um abuso de linguagem consagrado pelo uso sistemático ao longo do tempo. A nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso os geógrafos, não precisa coincidir necessariamente com a usada pelos matemáticos.

## ATIVIDADES

- Qual é o comprimento do Equador, supondo que o raio da Terra meça 6400 km? Considere  $\pi = 3,14159$ .
- Como se mede o raio da Terra? Uma das maneiras é escalar o topo de uma montanha cuja altitude acima do mar seja conhecida e medir o ângulo entre a vertical e a linha do horizonte. A altura do monte Shasta na Califórnia é 4,3 km. Do seu topo, o horizonte sobre o Oceano Pacífico faz um ângulo de  $87^\circ 53'$  com a vertical. Utilize esses dados para estimar o raio da Terra em quilômetros. Considere  $\text{sen}87^\circ 53' = 0,99932$ .

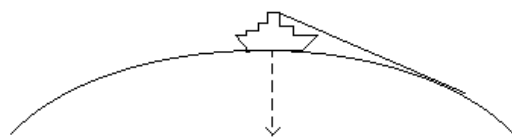


- O cálculo do raio da Terra mais célebre da Antigüidade foi realizado pelo grego Eratóstenes ( 276-196 a.C.). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes soube que em Siena, 5000 estádios ( medida grega de comprimento ) ao sul de Alexandria e situada aproximadamente no mesmo meridiano, o Sol se refletia no fundo de um poço ao meio-dia de um determinado dia de cada ano. Ao meio-dia deste tal dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, achando aproximadamente  $7^\circ 12'$ .



Admitindo que os raios solares chegam ao nosso planeta praticamente paralelos, mostre como obter para o raio da Terra o valor aproximado de  $250000/2\pi$  estádios. Supondo que a medida de um estádio utilizada por Eratóstenes era de aproximadamente 185 metros, calcule o valor acima em quilômetros.

4. Na ponte de um navio em alto mar, o capitão pediu a um jovem oficial que estava ao seu lado que determinasse a distância ao horizonte. O oficial pegou papel e lápis e, em poucos instantes, deu uma resposta. No papel ele havia escrito a fórmula  $d = \frac{8}{5} \sqrt{5h}$ . Admitindo-se que o raio da Terra meça 6400 km, mostre que essa fórmula é uma boa aproximação da distância  $d$ , em quilômetros, ao horizonte onde  $h$  é a altura, em metros, do observador acima da água. Se a ponte do navio está a 30 metros acima da água, qual é a distância ao horizonte?



5. Em um dia claro, até de que distância se poderia enxergar um edifício de 150 metros de altura, supondo-se que não haja obstruções no meio? Utilize a fórmula do exercício anterior.

## RESPOSTAS

1. cerca de 40212 km
2. cerca de 6319 km
3. cerca de 7360 km
4. cerca de 19 km
5. cerca de 43 km

## 5. AS COORDENADAS GEOGRÁFICAS

O globo terrestre serve para localizar um determinado ponto ou região da Terra. O aluno deve ter acesso a um para efetuar esta localização.

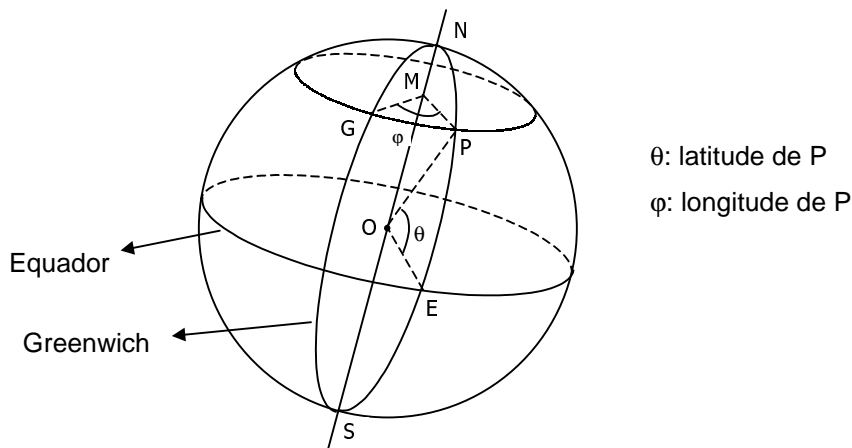
Há razões práticas para se ultrapassar o estágio da localização ingênua ( isto é, apontar o dedo para o lugar e dizer: é aqui! ) sendo necessário criar um sistema de coordenadas para dar a localização precisa de um ponto no globo.

Para isso utilizamos as chamadas **coordenadas geográficas**: latitude e longitude.

A **latitude** de um ponto  $P$  é a medida do arco de meridiano que passa por  $P$  situado entre o paralelo que contém  $P$  e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  N ( norte ) ou de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  S ( sul ).

A **longitude** de um ponto  $P$  é a medida do arco de paralelo que passa por  $P$  situado entre o meridiano que contém  $P$  e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  E ( leste ) ou de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  W ( oeste ).

Na figura a seguir temos que  $\theta = m(\angle EOP)$  é a latitude de P enquanto que  $\varphi = m(\angle GMP)$  é a longitude de P. Pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.



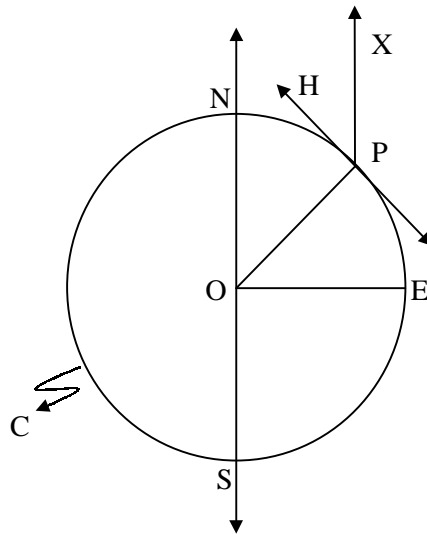
### ATIVIDADES

1. Observando um globo terrestre ou um mapa apropriado estabeleça as coordenadas geográficas de cada uma das cidades abaixo.

Cidade	Latitude	Longitude
São Paulo		
Maceió		
Belo Horizonte		
Nova Orleans		
Chicago		
Roma		
Nova York		
Buenos Aires		
Londres		
Moscou		
Cairo		
Tóquio		
Quito		
Los Angeles		

2. Qual a relação entre o raio da superfície terrestre, o raio de um paralelo e a sua respectiva latitude?
3. Verifique que a longitude de um ponto P é a medida do arco do Equador situado entre o meridiano que passa P e o meridiano de Greenwich.
4. Um dos primeiros fatos que um estudante de astronomia aprende é que a latitude de um ponto da Terra localizado no Hemisfério Norte é igual à medida do ângulo que Polaris ( a Estrela do Norte ) forma com a linha do horizonte, quando observada daquele ponto. Geometricamente, esta afirmação pode ser interpretada

da seguinte maneira. A reta  $\overline{NS}$  é o eixo polar da Terra, a circunferência C contém um meridiano, E está no Equador, P é o observador, a reta  $\overline{PH}$  é a linha do horizonte e  $m(\angle XPH)$  é a elevação de Polaris onde  $\overline{PX}$  é paralela a  $\overline{NS}$ .



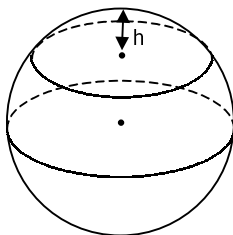
O fato acima equivale a dizer que  $m(\angle EOP) = m(\angle XPH)$ . Mostre porque isso é verdadeiro.

5. A aceleração da gravidade, freqüentemente denotada por  $g$ , é considerada constante para movimentos próximos da superfície terrestre. Na verdade, porém,  $g$  não é constante, variando ligeiramente com a latitude  $\theta$ . Uma boa aproximação para  $g$ , ao nível do mar, é dada pela expressão

$$g = 9,78049 (1 + 0,005288 \text{ sen}^2\theta - 0,000006 \text{ sen}^22\theta) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Utilizando uma calculadora, determine  $g$  para a latitude do lugar onde você mora.
  - Expresse  $g$  apenas em função de  $\text{sen}\theta$ , isto é, elimine o ângulo duplo.
  - Em que lugar da Terra o valor de  $g$  é máximo? E mínimo?
6. Supondo que o raio da Terra meça 6400 km, qual o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária  $\theta$ ? Em particular, qual o comprimento numa latitude de  $30^\circ \text{ N}$  (aproximadamente a latitude de Nova Orleans),  $10^\circ \text{ S}$  (aproximadamente a latitude de Maceió) e  $20^\circ \text{ S}$  (aproximadamente a latitude de Belo Horizonte)?
7. A que latitude um grau de longitude tem comprimento igual a 48 km? A que latitude um paralelo mede 16000 km?
8. Qual a altura mínima para que um satélite consiga fotografar o Brasil inteiro? Admita que Oiapoque e Chuí estão sobre o mesmo meridiano, mas em paralelos diferentes: a latitude de Oiapoque é  $6^\circ \text{ N}$  e a de Chuí é  $34^\circ \text{ S}$ . Suponha que o raio da Terra meça 6400 km.
9. Um astronauta encontra-se numa nave espacial que gira numa órbita em torno da Terra. No momento em que a nave está 160 km acima da superfície da Terra, que

fração da superfície da Terra é visível para o astronauta? (Esta fração é chamada **calota esférica** e sua área é dada por  $2\pi rh$ , onde  $r = 6400$  km é o raio da Terra e  $h$  é a altura da calota). Qual seria a fração visível se a nave estivesse a 20.200 km acima da superfície da Terra? Neste caso, quanto mede o ângulo de visualização sobre a Terra?

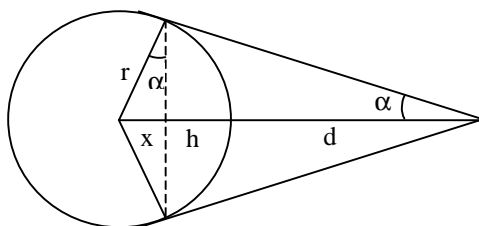


10. **Zona** é a região da superfície terrestre compreendida entre dois paralelos. Utilize a expressão da área da calota esférica para deduzir que a área da zona delimitada por um paralelo de latitude  $\theta$  e o Equador é dada por  $2\pi r d = 2\pi r^2 \sin\theta$ , onde  $r$  é o raio da Terra e  $d$  é a distância entre o plano que contém o paralelo e o plano do Equador. Conclua daí o surpreendente fato: cortando-se uma superfície esférica em fatias de igual espessura, as áreas das zonas são iguais, sendo indiferente que o corte tenha sido feito perto do Equador ou perto do pólo.

11. Um ponto P do globo terrestre tem latitude  $\theta$  e longitude  $\varphi$ . Quais são as coordenadas geográficas do ponto Q diametralmente oposto a P? Discuta cada uma das possibilidades N/S para  $\theta$  e E/W para  $\varphi$ .

### RESPOSTAS

2.  $r_{\text{paralelo}} = r_{\text{terra}} \cos\theta$
5. c) máximo nos pólos e mínimo no Equador
6. aproximadamente 111,7  $\cos\theta$  km; 96,7 km; 110 km; 104,9 km
7.  $65^\circ$  (N ou S) e  $67^\circ$  (N ou S), ambas aproximadamente
8. aproximadamente 410 km
9. Na figura abaixo temos  $x = r \sin\alpha$  e, portanto, a área  $A$  da calota esférica é dada por  $A = 2\pi rh = 2\pi r(r - x) = 2\pi r^2(1 - \sin\alpha)$ .



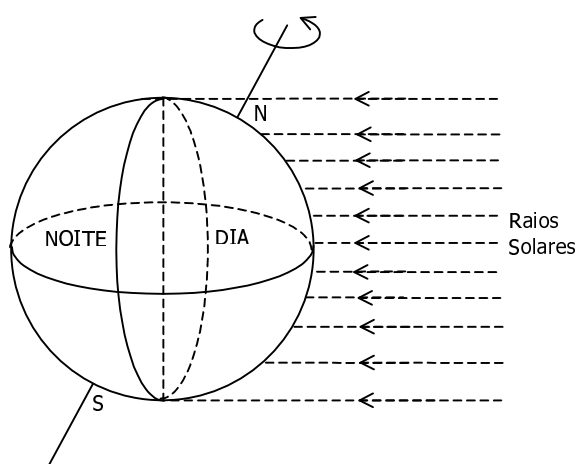
Sendo  $F$  a fração visível temos  $F = \frac{2\pi r^2(1 - \sin\alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \sin\alpha}{2}$ . Por outro lado, como  $\sin\alpha = \frac{r}{r+d}$  segue que  $F = \frac{1}{2} \frac{d}{r+d}$ . Para  $r = 6400$  e  $d = 160$  obtemos  $F = 0,012$  de modo que a fração visível é cerca de 1,2%. Para  $d = 20.200$  obtemos  $F = 0,379$  e a fração visível é cerca de 37,9%. Neste caso a medida  $2\alpha$  do ângulo de visualização é aproximadamente  $28^\circ$ .

## 6. OS MOVIMENTOS DA TERRA

A Terra não está parada. Ela tem dois movimentos principais: o de **rotação**, em torno de seu eixo polar, e o de **translação**, em torno do Sol. As conseqüências desses dois movimentos são muito importantes em nosso dia-a-dia.

Para dar uma volta completa em torno de seu eixo polar, a Terra leva **24 horas** ou **um dia**. Durante essa rotação, uma metade da Terra está voltada para o Sol, do qual recebe luz e calor: nela então é **dia**. A outra metade não recebe os raios solares: nela é então **noite**. Assim, a sucessão dos dias e das noites é uma conseqüência da rotação da Terra.

Sob a hipótese de que os raios solares são paralelos temos que, em cada instante, a curva sobre o globo terrestre que separa o dia da noite é uma circunferência máxima.

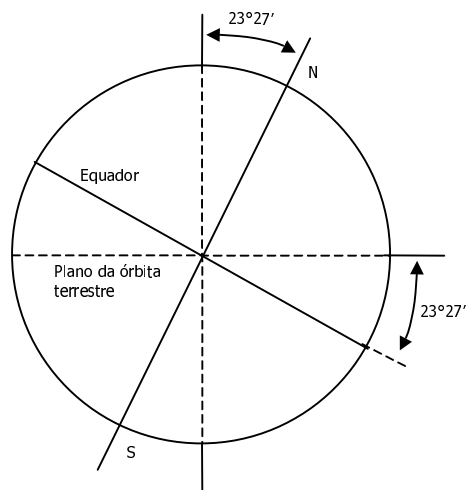


Todos os dias vemos o Sol aparecer no **nascente**, também chamado **oriente** ou **leste**, subir no céu e se deitar no **poente**, também chamado **ocidente** ou **oeste**. Temos a impressão de que é o Sol que caminha no céu. Na realidade, não é isso que acontece. A Terra é que gira em torno de seu eixo polar da esquerda para direita, isto é, do oeste para leste, causando a impressão do movimento do Sol. Chamamos a isso **movimento aparente do Sol**.

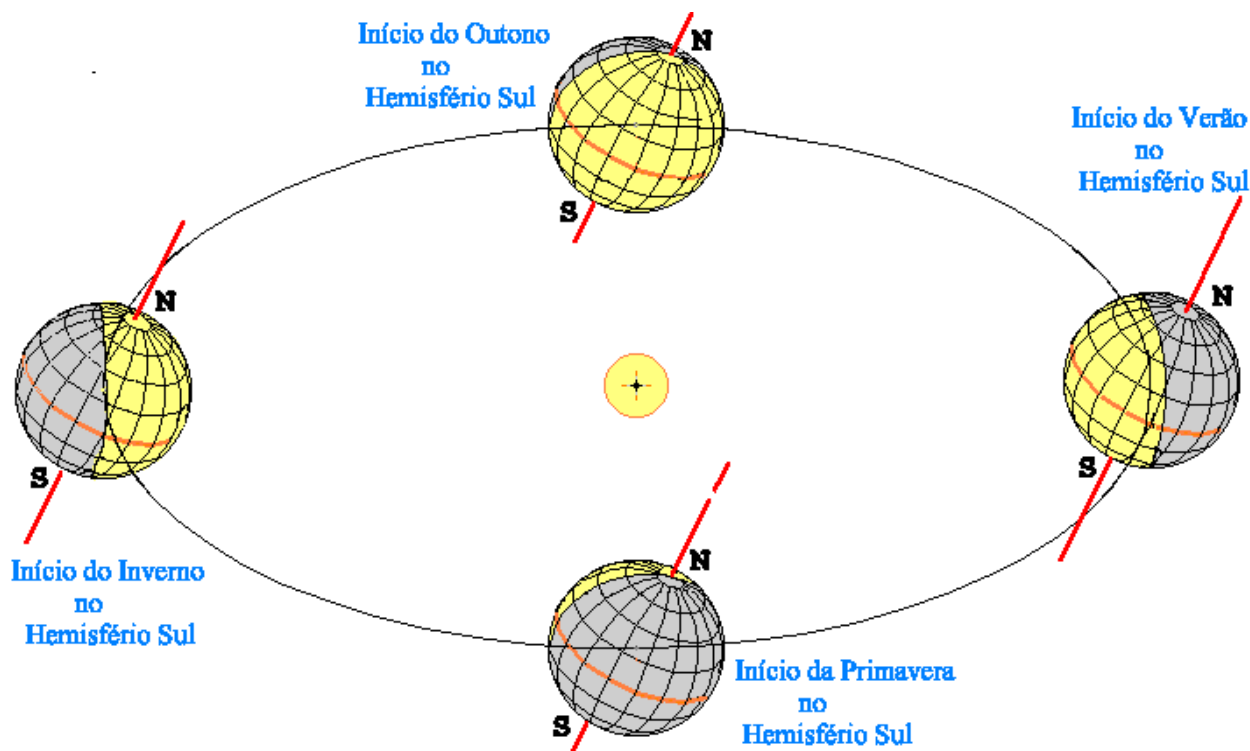
O momento em que o Sol, em sua trajetória aparente, está mais alto no céu é o **meio-dia solar**. Neste momento a sombra projetada de uma haste vertical tem o menor comprimento possível. O meio-dia solar para uma particular localidade ocorre quando o meridiano que a contém corta a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol.

Além de girar em torno de seu eixo, a Terra gira também em torno do Sol. Nessa translação em torno do Sol, a Terra descreve uma curva elíptica denominada **órbita**. A trajetória da órbita da Terra é chamada **eclíptica** e o plano que a contém é referido como o **plano da eclíptica**. Para dar uma volta completa em torno do Sol, a Terra leva 365 dias e 6 horas, isto é, pouco mais que um ano. Para corrigir essa diferença, foi necessário aumentar um dia no ano, a cada período de quatro anos. Nesses anos, chamados **bissextos**, o mês de fevereiro tem 29 dias.

Um fato extremamente importante deve ser observado: em sua translação em torno do Sol, o eixo da Terra não é perpendicular ao plano da eclíptica mas **inclinado**, sempre na mesma direção, formando um ângulo de  $23^{\circ} 27'$  com esta perpendicular ( veja figura abaixo ). Se o eixo da Terra fosse perpendicular ao plano da órbita, durante qualquer dia do ano o Hemisfério Norte receberia a mesma quantidade de luz e calor que o Hemisfério Sul. Mas, como o eixo é inclinado, os dias e as noites não têm a mesma duração em todos os lugares da Terra. Vejamos porque.



Observe a figura abaixo atentamente. Ela mostra as posições da Terra em relação ao Sol ao longo do ano. Como você pode ver, a posição da Terra não é a mesma em todos os meses do ano.

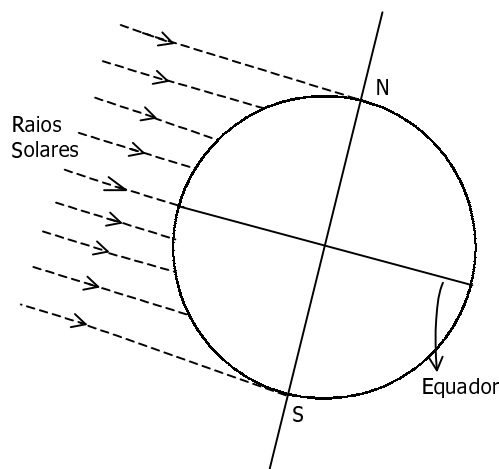


Apenas em duas ocasiões a circunferência máxima que separa a zona iluminada daquela que está no escuro passa rigorosamente pelos pólos. Aproximadamente em **21 de março** e em **23 de setembro** a noite e o dia duram, em todos os lugares da Terra, cerca de 12 horas cada um: são os **equinócios** ( noites iguais ).

Nestas datas a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude  $0^\circ$ , isto é, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre a linha do Equador**, que recebe então mais calor. Para o norte ou para o sul do Equador, o calor vai diminuindo em direção aos pólos e os dois hemisférios são igualmente iluminados e aquecidos.

No dia 21 de março começa para nós ( no Hemisfério Sul ) o **outono**, enquanto que para os habitantes do Hemisfério Norte é a **primavera** que tem início.

O dia 23 de setembro marca o começo da primavera no Hemisfério Sul e o do outono no Hemisfério Norte.



**21 de março e 23 de setembro**

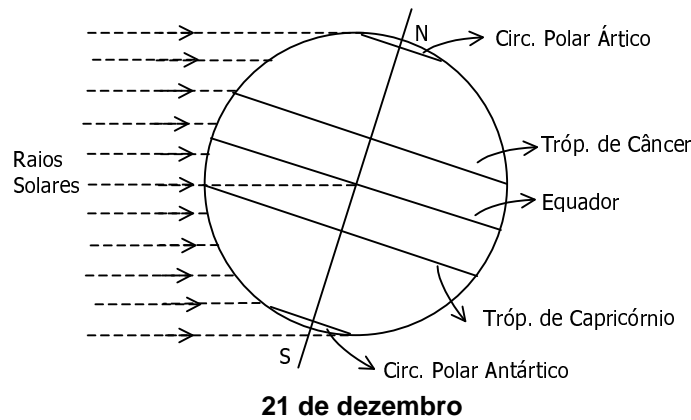
Vejamos agora o que acontece de setembro a dezembro no Hemisfério Sul, de acordo com o movimento que a Terra faz em torno do Sol.

Durante esta época, os dias vão ficando mais longos e as noites mais curtas, até que, por volta de **21 de dezembro**, temos o dia mais longo e a noite mais curta: é o que chamamos de **solstício de verão**. A Terra inclina o Pólo Sul na direção mais próxima do Sol. Nesse dia, começa no Hemisfério Sul o **verão**.

O que se passa no Hemisfério Norte nessa época? Aí a situação se inverte: os dias vão ficando mais curtos e as noites mais longas. A 21 de dezembro, os habitantes daquele hemisfério têm a noite mais longa do ano e o dia mais curto: é o **solstício de inverno**. Para eles, começa o **inverno**.

Você já entendeu por que isso acontece? Observe a figura abaixo. Qual hemisfério está mais exposto aos raios solares em 21 de dezembro? Nessa data a reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude  $23^\circ 27'S$ , chamado Trópico de Capricórnio. Assim, no solstício de dezembro, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio** que recebe então mais luz e calor fazendo com que o Hemisfério Sul seja mais iluminado e mais quente que o Hemisfério Norte.



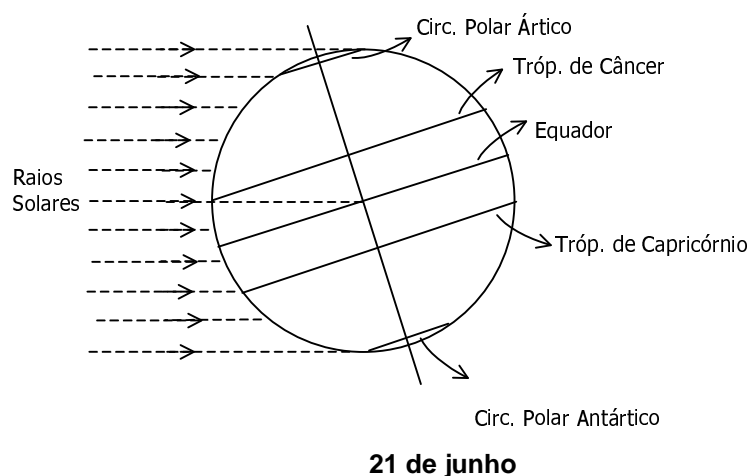


Você já percebeu o que acontece nas regiões polares em 21 de dezembro? Nesse dia, os raios solares não ultrapassam o limite do paralelo de latitude  $66^{\circ} 33'N$  chamado Círculo Polar Ártico. Os pontos situados entre o Círculo Polar Ártico e o Pólo Norte ficam inteiramente no escuro, independentemente da sua longitude. Não há assim dia, e a noite tem duração de 24 horas.

Enquanto isso, no Hemisfério Sul, a zona situada entre o Círculo Polar Antártico, paralelo de latitude  $66^{\circ} 33'S$ , e o Pólo Sul fica iluminada durante 24 horas. Não há assim noite, e o dia tem duração de 24 horas.

Vamos agora acompanhar o movimento da Terra de março até junho. Nessa época, o Hemisfério Sul vai ficando cada vez menos exposto aos raios solares, ao contrário do Hemisfério Norte. Assim, no Hemisfério Sul onde moramos, os dias vão ficando mais curtos e as noites mais longas até que, por volta de **21 de junho**, temos a noite mais longa do ano: é o nosso **solstício de inverno**. Nessa data tem início para nós o **inverno**.

No Hemisfério Norte, a data 21 de junho marca o dia mais longo do ano: é o **solstício de verão**, ou início do **verão**. A Terra inclina seu Pólo Norte na direção mais próxima do Sol. A reta imaginária determinada pelos centros da Terra e do Sol corta o globo terrestre num ponto do paralelo de latitude  $23^{\circ} 27'N$ , chamado Trópico de Câncer. Logo, no solstício de junho, **os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer** e o Hemisfério Norte é, portanto, mais iluminado e mais quente que o Hemisfério Sul.



Vejamos o que ocorre nas regiões polares nesta época. A zona situada entre o Círculo Polar Antártico e o Pólo Sul não é atingida pelos raios solares e a noite dura 24

horas, enquanto que a situada entre o Círculo Polar Ártico e o Pólo Norte permanece iluminada durante 24 horas. Não há noite e o dia tem duração de 24 horas.

## ATIVIDADES

1. A Terra gira  $360^\circ$  em torno de seu eixo em 24 horas. Quantos graus de longitude a reta determinada pelos centros da Terra e do Sol cruza a cada hora? E a cada minuto?
2. Você está numa localidade cujo meio-dia solar ocorreu 6 horas e 8 minutos depois do meio-dia solar em Greenwich. Qual é a sua longitude?
3. Quanto tempo depois do meio-dia solar em Greenwich ocorre o meio-dia solar em São Paulo? Qual a diferença de tempo entre o meio-dia solar em São Paulo e em Roma?
4. A variação sazonal no tempo de duração do dia pode ser modelada por uma senóide. O dia em Nova Orleans tem cerca de 14 horas no solstício de verão ( 21 de junho ) e cerca de 9 horas e 20 minutos no solstício de inverno ( 21 de dezembro ). Nos itens abaixo desconsidere a possibilidade de um ano bissexto.
  - a) Esboce o gráfico do número  $h$  de horas dos dias de Nova Orleans como função do número  $x$  de dias a partir de 21 de março.
  - b) Encontre uma expressão para  $h$  como função de  $x$ , determinando  $A$ ,  $B$  e  $\omega$  de modo que  $h(x) = A + B \text{sen}(\omega x)$ . (**Sugestão:** Calcule  $\omega$  sabendo que  $h$  é uma função periódica de período 365. A seguir, obtenha  $B$  usando os valores máximo e mínimo da função  $h$ .)
  - c) Seja  $y$  o número de dias após 1º de janeiro. Encontre uma expressão para  $h$  como função de  $y$ .
  - d) Que dias do ano tem duração aproximada de 13 horas em Nova Orleans?

## RESPOSTAS

1.  $15^\circ$  ;  $0,25^\circ$
2.  $92^\circ W$
3. 3 horas e 8 minutos; 3 horas e 56 minutos
4. b)  $h(x) = 12 + \frac{7}{3} \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$

## 7. OS FUSOS HORÁRIOS

No momento em que for meio-dia em São Paulo, será também meio-dia em todos os lugares situados ao longo do meridiano que passa por São Paulo: é o que chamamos **hora verdadeira**. Todas as localidades situadas sobre um mesmo meridiano têm a mesma hora verdadeira.

Assim, se é meio-dia em Belo Horizonte, isto é, se o Sol sobre Belo Horizonte está em seu ponto mais alto no céu, o mesmo não acontecerá em Brasília. Isso ocorre porque Belo Horizonte está no meridiano de longitude  $44^\circ W$ , enquanto Brasília

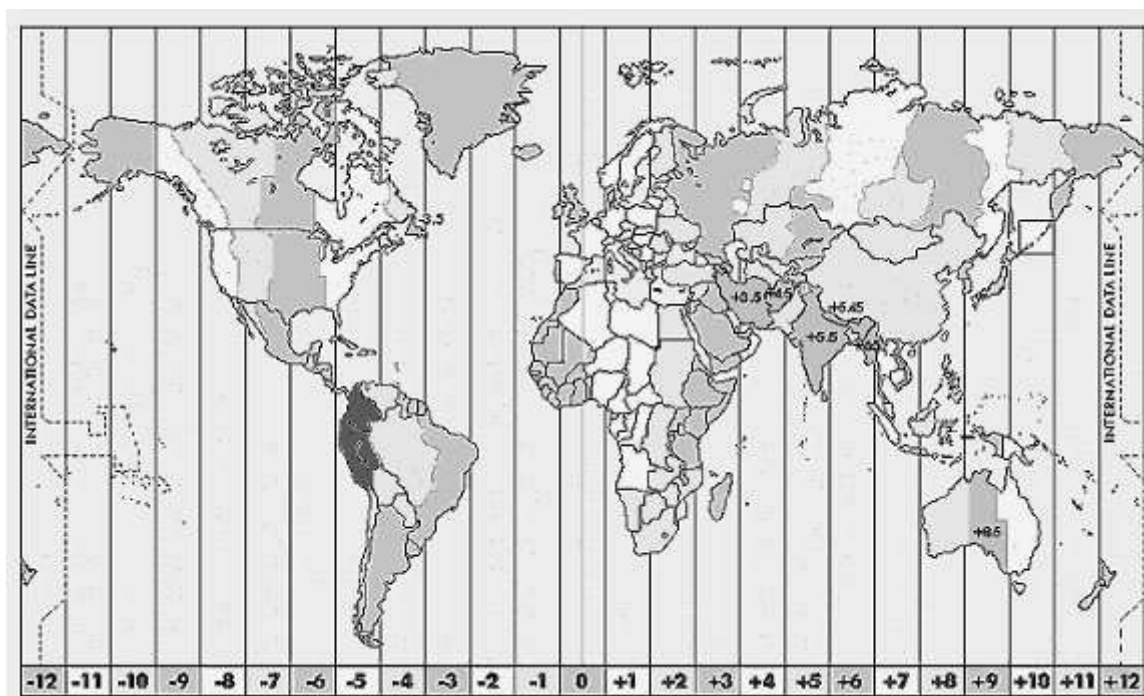
encontra-se no meridiano de longitude 48° W. Portanto, meio-dia em Brasília ocorrerá um pouco depois do meio-dia em Belo Horizonte ( lembre-se que a Terra gira em torno de seu eixo polar da esquerda para direita ). Afinal, se em Belo Horizonte é exatamente meio-dia, qual será a hora verdadeira em Brasília? Para responder essa pergunta basta repetir o argumento utilizado na atividade 3 do parágrafo anterior.

Assim, a hora verdadeira não é a mesma em Belo Horizonte, Brasília ou São Paulo. Você já imaginou a confusão que seria se cada lugar tivesse uma hora diferente, mesmo se tratando de lugares próximos uns dos outros? Cada vez que viajássemos para leste ou para oeste teríamos que mudar várias vezes os ponteiros do relógio.

Para tornar as coisas mais simples, foi necessário dividir o globo em 24 partes aproximadamente iguais, uma vez que a Terra leva 24 horas para efetuar seu movimento de rotação. Resultou assim o que chamamos de **fusos horários**. Cada fuso horário corresponde a uma faixa limitada por dois meridianos, distantes 15° um do outro ( observe que  $360^\circ : 24 = 15^\circ$  ).

Dessa forma, embora haja diferença na hora verdadeira das localidades situadas dentro de um mesmo fuso horário, a hora marcada nos relógios será a mesma para todas essas localidades. É o que chamamos de **hora oficial**. Assim, Rio de Janeiro, Brasília, Belo Horizonte, São Paulo, embora sejam cidades situadas em meridianos diferentes, por encontrarem-se no mesmo fuso horário têm a mesma hora oficial.

Conforme mostra a figura abaixo, países pouco extensos no sentido da longitude, como a Itália e o Paraguai, têm um único fuso horário. Mas países muito extensos possuem vários fusos horários: os Estados Unidos, por exemplo, possuem quatro fusos. Pesquise num atlas geográfico a situação da hora oficial no Brasil.



## ATIVIDADES

1. **Fuso** é a região da superfície terrestre compreendida entre dois meridianos. Calcule a área do fuso limitado pelos meridianos de longitude 20° E e 40° W. (**Sugestão:** A área de um fuso é proporcional à sua abertura.)
2. Indo-se de Oeste para Leste, deve-se adiantar o relógio de uma hora cada vez que se ultrapassa um limite de fuso horário. Utilizando-se um avião bastante rápido, pode-se partir de Greenwich a zero hora do sábado, e chegar ao seu meridiano oposto às 24 horas (tempo local). Nessa altura, serão 12 horas do sábado em Greenwich. Continuando com a mesma velocidade, o viajante completará a volta, podendo chegar em Greenwich às 24 horas do sábado; mas seu relógio, modificado somente em função dos fusos horários marcará 24 horas de domingo! Como resolver este problema?
3. Um piloto sai de uma cidade A de latitude 40° N às 12 horas e 15 minutos (hora local verdadeira). Ele voa no rumo leste a uma velocidade média de 1000 km/h permanecendo o tempo todo na mesma latitude. Seu destino B é alcançado após percorrer 3000 km. Supondo que o raio da Terra meça 6400 km, qual a hora local verdadeira em B?

## RESPOSTAS

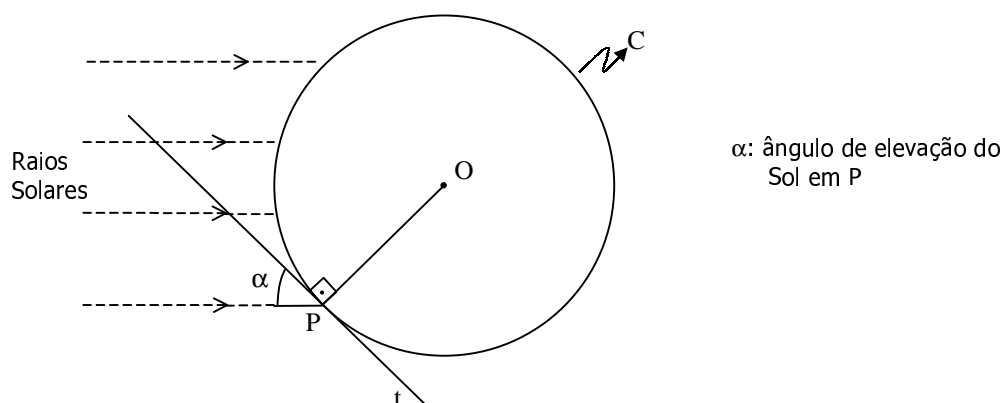
1.  $\frac{2\pi r^2}{3}$  onde r é o raio da Terra
2. pesquise sobre a “linha internacional de data”
4. 17 horas e 35 minutos

## 8. O ÂNGULO DE ELEVAÇÃO DO SOL E A ENERGIA SOLAR

Vimos anteriormente que as estações do ano são conseqüência da inclinação do eixo da Terra em relação à perpendicular ao plano da eclíptica. A relação entre esta inclinação e a quantidade relativa de energia solar recebida por localidades com diferentes latitudes é uma questão do mundo real que será agora analisada.

A grande maioria da energia solar nunca alcança a superfície da Terra. Porém, a intensidade de radiação que a alcança varia de acordo com o chamado ângulo de elevação do Sol.

Na figura abaixo, a circunferência C contém o meridiano que passa por uma localidade P do globo terrestre e t é a reta tangente a C em P. O menor ângulo formado pelos raios solares e pela reta t é chamado o **ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar** em P.

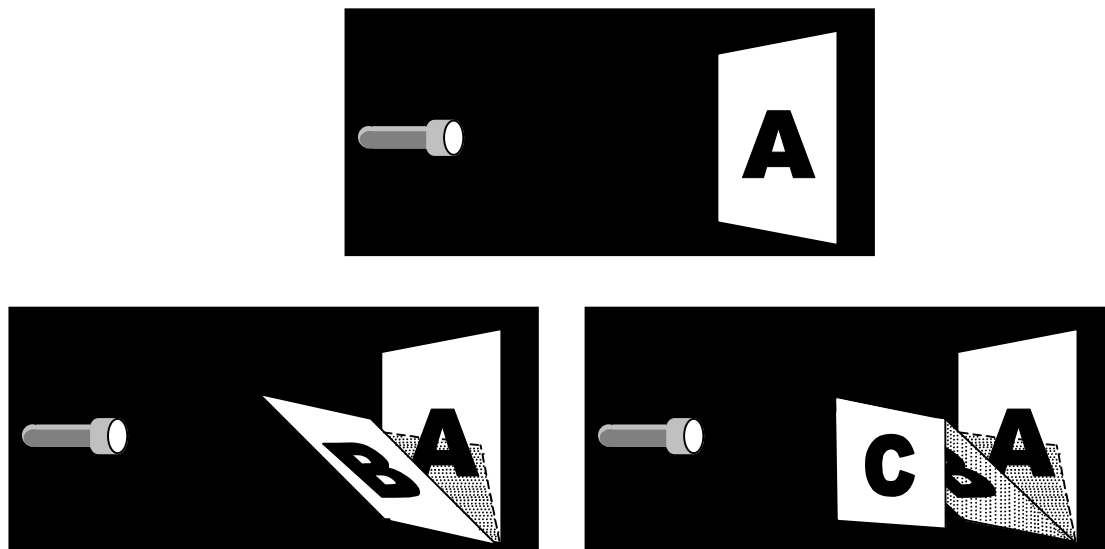


Nesta parte do curso, iremos calcular a intensidade relativa solar que alcança a superfície da Terra em diferentes localidades do mundo e em diferentes épocas do ano. Para nossos propósitos, **intensidade relativa** é definida como a razão da intensidade de radiação solar incidente na superfície pela intensidade de radiação se os raios incidissem perpendicularmente à superfície ( ângulo de elevação com medida igual a  $90^\circ$  ).

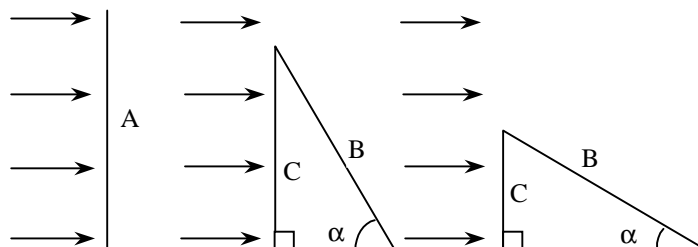
Você já reparou que a luz solar parece mais quente quando o Sol está a pino? Você é capaz de explicar por que ao meio-dia de um dia claro de verão é muito mais quente que a noite ou a manhã do mesmo dia? O que faz o inverno frio e o verão quente? As respostas a todas estas perguntas estão relacionadas com o ângulo de elevação do Sol. Veremos a seguir que quanto mais próximo de  $90^\circ$  a medida deste ângulo estiver, maior a intensidade da radiação solar. Apesar disso, muitas vezes é mais quente às 15:00 horas que ao meio-dia pois, embora a superfície da Terra receba mais energia solar ao meio-dia, a energia acumulada na atmosfera, desde manhã até este horário, freqüentemente torna estas horas as mais quentes do dia.

A atividade seguinte oferece um bom modelo para quantificar a relação entre a medida do ângulo de elevação do Sol e a intensidade relativa da radiação solar recebida por uma particular cidade. Escureça a sala e acenda uma lanterna sobre um pedaço de papel branco A. Toda a área do papel será iluminada pela posição perpendicular da lanterna. Coloque um outro pedaço de papel idêntico na frente de A, mas incline-o de maneira como mostrada por B. Discuta qual posição de papel, A ou B, recebe mais energia luminosa. Observe a sombra que B projeta em A, quando B é

mais e mais inclinado. Note que a diminuição da sombra indica que a quantidade de luz sobre B está diminuindo. A quantidade de energia luminosa recebida pelo papel inclinado é a mesma recebida por C, onde C é paralelo a A.



Na figura abaixo, a ilustração da esquerda mostra a visão lateral quando os raios solares atingem A verticalmente, ou perpendicularmente à superfície. As ilustrações do meio e da direita mostram a quantidade relativamente menor de energia que a folha de papel recebe quando o ângulo  $\alpha$  de elevação do Sol é reduzido. Quanto mais o papel é inclinado, menos energia luminosa ele recebe. Nas ilustrações anteriores, A e B são na realidade áreas retangulares, mas como as larguras destas áreas são as mesmas, podemos desconsiderá-las e levar em conta apenas os comprimentos mostrados na figura abaixo.



O comprimento de B é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo,  $\alpha$  é a medida do ângulo de elevação do Sol e o comprimento de C é a medida do lado oposto a  $\alpha$ . A razão entre o comprimento de C e o comprimento de B, que depende do ângulo de elevação e é igual a  $\text{sen}\alpha$ , nos dá uma medida para a intensidade relativa da luz solar. Se o comprimento de B é tomado como 1, então  $\text{sen}\alpha = C/1 = C$ . Por exemplo, se o ângulo do papel B mede  $90^\circ$ , isto é, B é perpendicular à direção da luz solar, então  $\text{sen}90^\circ = 1$  e a intensidade relativa da luz solar é 1 ou, em porcentagem, 100%. Como  $\text{sen}80^\circ \approx 0.9848$ , temos que quando o ângulo de elevação mede  $80^\circ$ , o papel recebe aproximadamente 98% da radiação solar disponível.

Neste modelo, o pedaço de papel representa uma área da Terra e o ângulo do papel representa o ângulo de elevação do Sol. Quando o Sol se torna visível pela primeira vez de manhã, uma certa área recebe a luz solar sob um ângulo extremamente pequeno e a intensidade relativa da radiação solar é pequena nesta

área. Quando é meio-dia a luz solar é inclinada ao mínimo, ou está perto de se tornar vertical. Ao fim do dia, os raios solares incidem na Terra novamente com o menor ângulo possível. Isto explica porquê a luz solar pela manhã ou pela tarde não é tão quente quanto ao meio-dia.

## ATIVIDADE

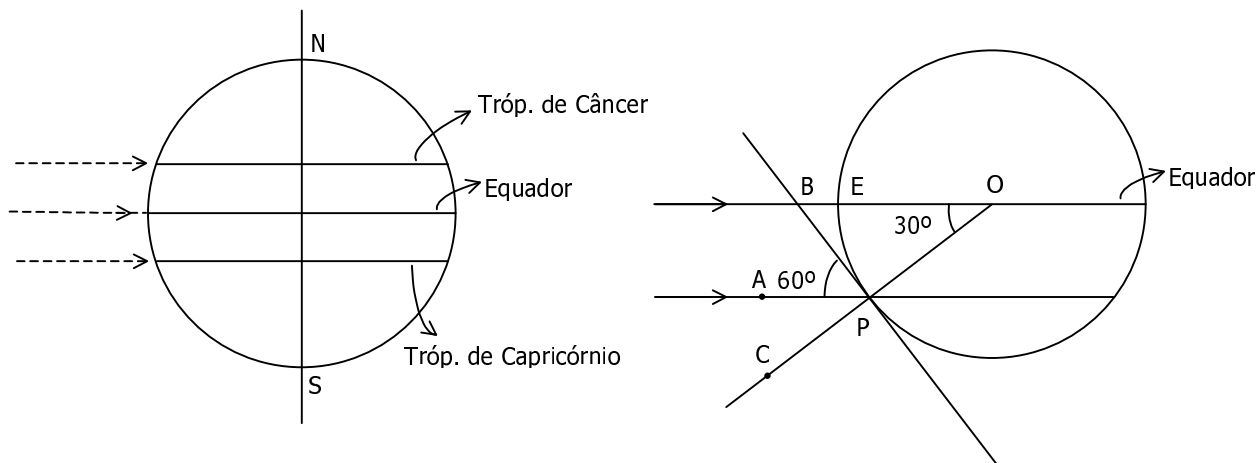
Seja  $\alpha$  a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar em P e  $\beta$  a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no Equador, ambas consideradas num mesmo dia. Quais as expressões relacionando  $\alpha$ ,  $\beta$  e a latitude  $\theta$  de P? Existem duas possíveis respostas conforme P seja um ponto do Hemisfério Norte ou Sul.

### 8.1 O ÂNGULO DE ELEVAÇÃO DO SOL NOS EQUINÓCIOS

Vamos calcular a medida desse ângulo ao meio dia solar nos dias de equinócios de primavera e outono. Como vimos anteriormente, nesses dias os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Equador. Tomemos, por exemplo, a cidade de Porto Alegre localizada a  $30^\circ$  de latitude sul.

Na figura abaixo, a reta  $\overrightarrow{PB}$  é tangente a Terra no ponto P, que representa Porto Alegre, O é o centro da Terra e C é um ponto da reta  $\overrightarrow{OP}$  com P entre C e O. Como  $m(\angle BOP) = 30$  temos  $m(\angle APC) = 30$  (são ângulos correspondentes no contexto de retas paralelas – note que  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{BO}$  são paralelas aos raios solares). Logo  $m(\angle APB) = 60$  uma vez que  $\angle BPC$  é reto.

O ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar mede então  $60^\circ$  durante os equinócios de primavera e outono em Porto Alegre e também em todas as localidades que estão situadas a  $30^\circ$  de latitude sul. Note que o ângulo de elevação do Sol nesses dias e a latitude são ângulos complementares. Para calcular a intensidade relativa da radiação solar encontre  $\sin 60^\circ$ . Uma calculadora mostrará aproximadamente 0,8660, indicando que a intensidade de Sol em Porto Alegre nos dias de equinócios é cerca de 86% da que seria se os raios solares incidissem perpendicularmente à superfície, ou ainda, 86% da intensidade do Sol que atinge o ponto E localizado sobre o Equador e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.



Pelo mesmo método, podemos calcular a intensidade relativa da radiação solar recebida por qualquer cidade cuja latitude seja conhecida. Por exemplo, Santa Cruz, Argentina, está localizada a  $50^\circ$  de latitude sul. Portanto, o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar nos dias de equinócios mede  $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ .

Para calcular a intensidade relativa da radiação solar que a cidade recebe nesses dias, encontre  $\text{sen}40^\circ$ . A calculadora mostrará aproximadamente 0,6427. A intensidade relativa da radiação solar é cerca de 64% ao meio-dia solar em Santa Cruz, nos equinócios de primavera e outono.

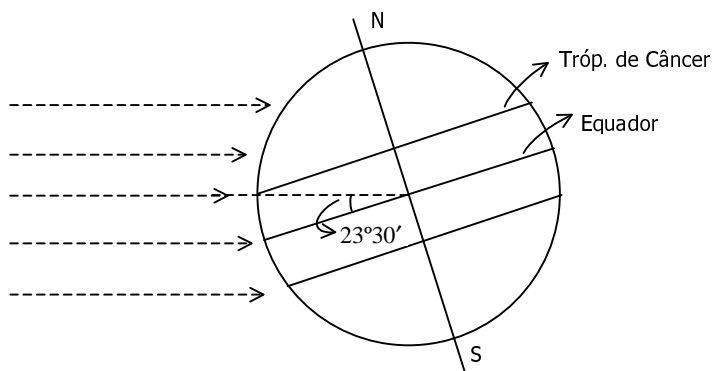
## ATIVIDADE

Complete a tabela abaixo, obtendo a intensidade relativa da radiação solar ao meio-dia solar nos dias de equinócios.

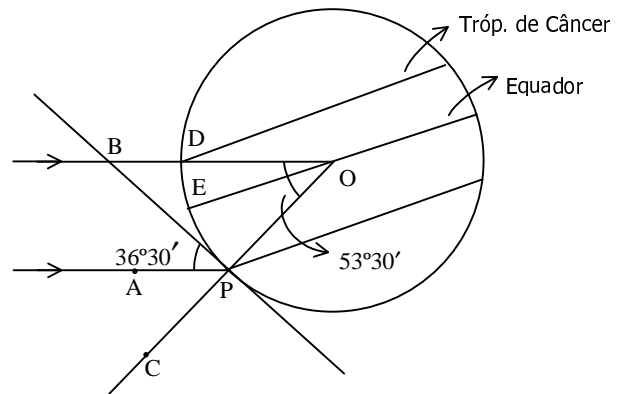
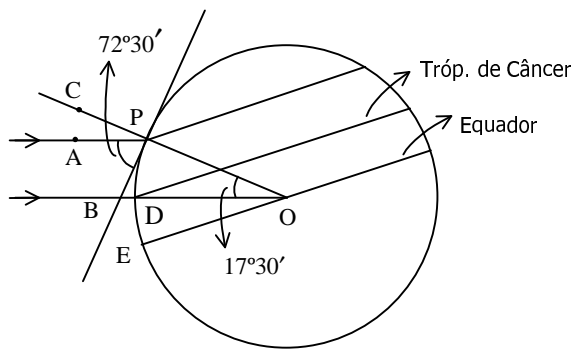
Cidade	Latitude	Ângulo de elevação do Sol	Intensidade Relativa
Recife, Brasil	$8^\circ$ S		
Cuiabá, Brasil	$16^\circ$ S		
São Paulo, Brasil	$23^\circ$ S		
Melbourne, Austrália	$38^\circ$ S		
Quito, Equador	$0^\circ$		
Miami, EUA	$26^\circ$ N		
Madri, Espanha	$41^\circ$ N		
Oslo, Noruega	$60^\circ$ N		
Barrow, Alaska	$71^\circ$ N		

## 8.2 O ÂNGULO DE ELEVAÇÃO DO SOL NOS SOLSTÍCIOS

Vamos agora calcular a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no dia de solstício de junho. Sabemos que nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer, que está aproximadamente a  $23^\circ 30'$  de latitude norte.







A ilustração da esquerda na figura acima mostra o ângulo de elevação do Sol em Cleveland ( EUA ) localizada a  $41^\circ$  de latitude norte. A reta  $\overrightarrow{PB}$  é tangente a Terra no ponto P que representa Cleveland , O é o centro da Terra e C é um ponto da reta  $\overrightarrow{OP}$  , com P entre C e O. Como  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{BO}$  são paralelas aos raios solares temos

$$m(\angle APC) = m(\angle BOP) = m(\angle EOP) - m(\angle EOB) = 41^\circ - 23^\circ 30' = 17^\circ 30'.$$

Uma vez que o ângulo  $\angle BPC$  é reto segue que  $\angle APB$ , que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 17^\circ 30' = 72^\circ 30'.$$

Cleveland e outras cidades localizadas a  $41^\circ$  de latitude norte recebem o maior brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de junho, quando o ângulo de elevação do Sol mede  $72^\circ 30'$  ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Cleveland a esta hora encontre  $\text{sen}72^\circ 30'$ . A calculadora mostrará aproximadamente 0,9537 indicando que Cleveland recebe cerca de 95% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de  $90^\circ$  ao meio-dia no solstício de junho, ou ainda, 95% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Câncer e que tem a mesma longitude de Cleveland.

A ilustração da direita na figura acima mostra o ângulo de elevação do Sol em Porto Alegre. A reta  $\overrightarrow{PB}$  é tangente a Terra no ponto P que representa Porto Alegre, P está C e O com  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{BO}$  sendo paralelas aos raios solares. Como P está no Hemisfério Sul, a medida do ângulo  $\angle BOP$  é igual a

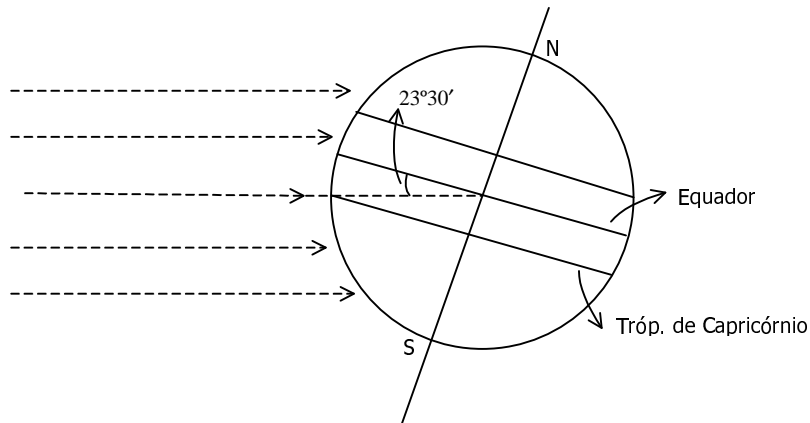
$$m(\angle EOP) + m(\angle EOB) = 30^\circ + 23^\circ 30' = 53^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo,  $m(\angle APC) = 53^\circ 30'$ . Portanto,  $\angle APB$ , que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

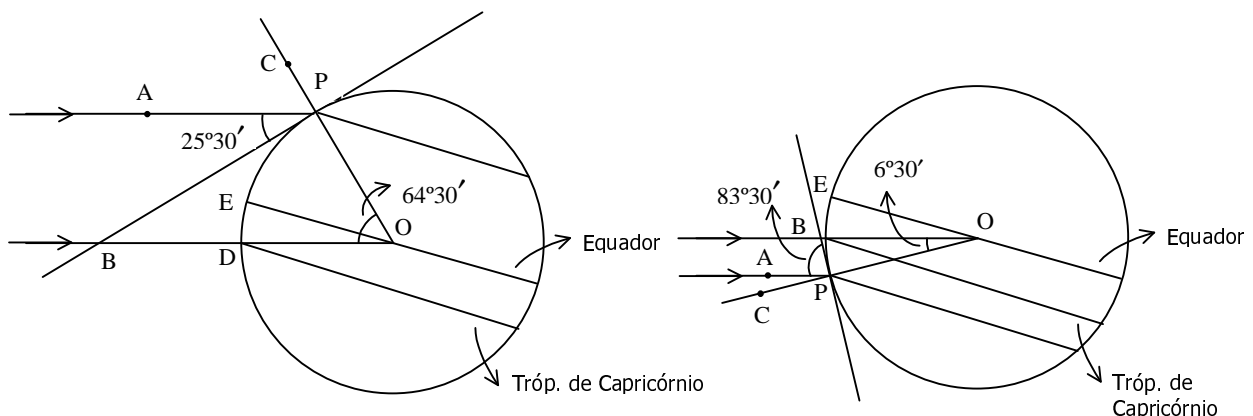
$$90^\circ - 53^\circ 30' = 36^\circ 30'.$$

Porto Alegre e outras cidades localizadas a  $30^\circ$  de latitude sul recebem o menor brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de junho, quando o ângulo de

elevação do Sol mede  $36^\circ 30'$  ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Porto Alegre a esta hora encontre  $\text{sen}36^\circ 30'$ . A calculadora mostrará aproximadamente 0,5948 indicando que Porto Alegre recebe cerca de 59% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de  $90^\circ$  ao meio-dia no solstício de junho, isto é, 59% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Câncer e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.



Analogamente podemos calcular a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar no dia de solstício de dezembro. Nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio, que está aproximadamente a  $23^\circ 30'$  de latitude sul.



A ilustração da esquerda na figura acima mostra o ângulo de elevação do Sol novamente em Cleveland. A reta  $\overrightarrow{PB}$  é tangente a Terra no ponto P que representa Cleveland, P está entre C e O com  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{BO}$  sendo paralelas aos raios solares. Como P está no Hemisfério Norte, a medida do ângulo  $\angle BOP$  é igual a

$$m(\angle EOP) + m(\angle EOB) = 41^\circ + 23^\circ 30' = 64^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo,  $m(\angle APC) = 64^\circ 30'$ . Portanto,  $\angle APB$ , que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 64^\circ 30' = 25^\circ 30'.$$

Cleveland e outras cidades localizadas a  $41^\circ$  de latitude norte recebem o menor brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de dezembro, quando o ângulo de elevação do Sol mede  $25^\circ 30'$  ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da

radiação solar que atinge Cleveland a esta hora encontre  $\sin 25^\circ 30'$ . A calculadora mostrará aproximadamente 0,4305 indicando que Cleveland recebe cerca de 43% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de  $90^\circ$  ao meio-dia no solstício de dezembro, ou ainda, 43% da intensidade do Sol que atinge o ponto D localizado sobre o Trópico de Capricórnio e que tem a mesma longitude de Cleveland.

A ilustração da direita na figura acima mostra o ângulo de elevação do Sol em Porto Alegre. A reta  $\overline{PB}$  é tangente a Terra no ponto P que representa Porto Alegre, P está entre C e O com  $\overline{AP}$  e  $\overline{BO}$  sendo paralelas aos raios solares. Como P está no Hemisfério Sul, a medida do ângulo  $\angle BOP$  é igual a

$$m(\angle EOP) - m(\angle EOB) = 30^\circ - 23^\circ 30' = 6^\circ 30'$$

e, pela congruência de ângulos correspondentes no paralelismo,  $m(\angle APC) = 6^\circ 30'$ . Portanto,  $\angle APB$ , que é o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar, tem medida

$$90^\circ - 6^\circ 30' = 83^\circ 30'.$$

Porto Alegre e outras cidades localizadas a  $30^\circ$  de latitude sul recebem o maior brilho solar direto do ano durante o dia de solstício de dezembro, quando o ângulo de elevação do Sol mede  $83^\circ 30'$  ao meio-dia solar. Para obter a intensidade relativa da radiação solar que atinge Porto Alegre a esta hora encontre  $\sin 83^\circ 30'$ . A calculadora mostrará aproximadamente 0.9935 indicando que Porto Alegre recebe cerca de 99% da radiação solar que incidiria se o ângulo fosse de  $90^\circ$  ao meio-dia no solstício de dezembro, isto é, 99% da intensidade do Sol que atinge o ponto localizado sobre Trópico de Capricórnio e que tem a mesma longitude de Porto Alegre.

Vimos nessa seção de que maneira a latitude de um ponto pode ser usada para calcular o ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar naquele ponto em determinadas épocas do ano. Sob certas condições, esse processo pode ser invertido obtendo-se a latitude a partir do ângulo de elevação do Sol (veja atividade 2 a seguir).

## ATIVIDADES

1. Complete a tabela abaixo, obtendo a intensidade relativa da radiação solar ao meio-dia solar nos dias de solstícios.

Cidade	Latitude	Solstício de Junho		Solstício de Dezembro	
		Ângulo de elevação do Sol	Intensidade Relativa	Ângulo de elevação do Sol	Intensidade Relativa
Rio Branco, Brasil	$10^\circ$ S				
São Paulo, Brasil	$23^\circ$ S				
Melbourne, Austrália	$38^\circ$ S				
Santa Cruz, Argentina	$50^\circ$ S				
Quito, Equador	$0^\circ$				
São José, Costa Rica	$10^\circ$ N				
Miami, EUA	$26^\circ$ N				

Paris, França	49° N				
Forel, Groelândia	66° N				

2. No dia 26 de janeiro de 2004 as seguintes medidas foram tomadas numa localidade desconhecida P da região sul do Brasil.

- altura de uma haste vertical = 35 cm
- comprimento da menor sombra projetada = 5,4 cm
- horário local da menor sombra = 12 horas 25 minutos 56 segundos

Consultando um almanaque sabe-se que nesse dia os raios solares incidem perpendicularmente sobre o paralelo de latitude 18° 45'S e que o meio-dia solar em Greenwich ocorre às 12 horas 12 minutos 36 segundos. Sabe-se ainda que o horário na localidade P é o de Greenwich diminuído de 3 horas.

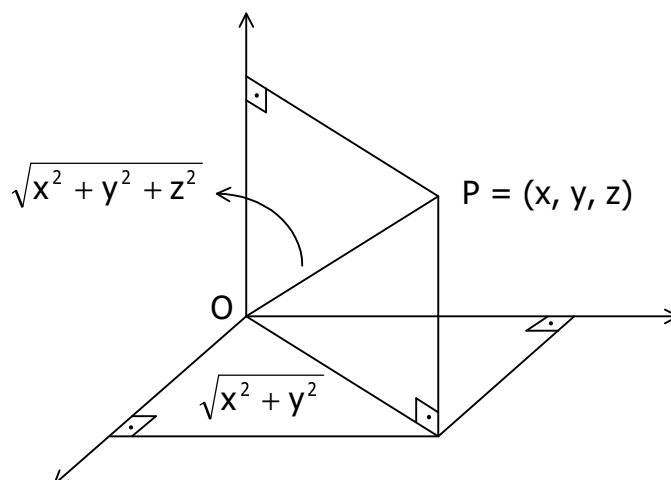
- Determine o tempo decorrido entre o meio-dia solar em Greenwich e o meio-dia solar em P.
- Calcule a longitude de P.
- Determine a medida do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia solar naquele dia.
- Calcule a latitude de P.
- Consulte um globo terrestre ou um atlas geográfico para identificar a localidade desconhecida P.

## 9. A SUPERFÍCIE ESFÉRICA EM COORDENADAS CARTESIANAS

A partir desta seção trabalharemos num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O.

Dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço, uma dupla aplicação do teorema de Pitágoras mostra que a distância de P a O é expressa por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Mais geralmente, a distância entre os pontos  $P = (x,y,z)$  e  $C = (u,v,w)$  é dada pela fórmula

$$d(P,C) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}.$$

Se  $r$  é um número real positivo, a superfície esférica  $S$  de centro  $C = (u,v,w)$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P = (x,y,z)$  tais que

$$(1) \quad (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2.$$

A equação (1) acima é denominada **equação reduzida** de  $S$ . Assim, por exemplo,  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$  é a equação reduzida da superfície esférica de centro  $C = (-1,2,0)$  e raio  $r = \sqrt{4} = 2$ .

Desenvolvendo os quadrados em (1), obtemos

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0$$

que é uma equação da forma

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

onde  $a,b,c,d$  são números reais.

A equação (2) é chamada **equação geral** de  $S$ . Assim, a superfície esférica de centro  $C = (-1,2,0)$  e raio  $r = 2$  tem como equação geral  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ .

Dada uma equação da forma (3) como decidir se ela é a equação geral de alguma superfície esférica  $S$ ? Em caso afirmativo, quais as coordenadas do centro e qual o raio de  $S$ ?

Considerando, por exemplo, a equação  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 8 = 0$ , a idéia é **completar os quadrados** e colocar (3) na forma (1). Assim:

- $x^2 + 4x = x^2 + 2.2x = x^2 + 2.2x + 2^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4$
- $y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = (y-1)^2 - 1$
- $z^2 - 6z = z^2 - 2.3z = z^2 - 2.3z + 3^2 - 3^2 = (z-3)^2 - 9$ .

Substituindo na equação dada obtemos  $(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + (z-3)^2 - 9 + 8 = 0$ , ou seja,  $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 6$ .

Trata-se, portanto, de uma superfície esférica de centro  $C = (-2,1,3)$  e raio  $r = \sqrt{6}$ .

Repetindo-se o mesmo argumento para a equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$  obtemos  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = -5$  (faça você).

Como uma soma de quadrados nunca é um número negativo concluímos que nenhum ponto do espaço tem coordenadas  $(x,y,z)$  satisfazendo a equação acima. Trata-se, portanto, do conjunto vazio.

Já a equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 0$  pode ser escrita como  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$  cuja única solução é o ponto de coordenadas  $(x,y,z) = (1,2,3)$ .

O resultado a seguir desempenhará um papel importante no próximo parágrafo onde discutiremos a fundamentação matemática do funcionamento do GPS.

**Teorema 9.1.** Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.

**Prova.**

Sejam  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  superfícies esféricas de centros  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , respectivamente. Mostraremos que se  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$  e  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são não coplanares então  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$ .

Sendo  $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$  as equações gerais de  $S_j$ , onde  $j = 1, 2, 3, 4$ , ao subtrairmos essas equações duas a duas obtemos equações lineares em  $x, y$  e  $z$  uma vez que os termos  $x^2, y^2$  e  $z^2$  são eliminados.

Uma tal equação linear determina o plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de  $S_1$  e  $S_2$  obtem-se uma equação do plano que contém  $S_1 \cap S_2$ .

Considerando-se os planos que contém  $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$  e  $S_1 \cap S_4$  temos que se  $P = (x, y, z)$  está em  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  então  $(x, y, z)$  é a solução do sistema linear

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (*) \quad & (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ & (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{aligned}$$

A prova do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema (\*) tem uma única solução pois a existência de dois pontos distintos em  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$  acarretariam duas soluções distintas do sistema linear (\*).

Sendo  $C_j = (u_j, v_j, w_j)$  o centro de  $S_j, j = 1, 2, 3, 4$ , comparando as equações (2) e (3) acima temos  $a_j = -2u_j, b_j = -2v_j, c_j = -2w_j$  de modo que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

Como  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são não coplanares segue que o determinante à direita não é nulo e, portanto, (\*) é um sistema linear com determinante não nulo tendo assim uma única solução.

□

Evidentemente o simples fato do sistema linear (\*) ter uma única solução, significando que os centros são não coplanares, não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto  $P$ . Em outras palavras, a hipótese  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$  é essencial para a validade do teorema.

A eventual solução de (\*) nos dará o procurado ponto  $P$  desde que pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ .

Considere, por exemplo, as superfícies esféricas abaixo.

$$S_1: \text{centro } (0, 0, 1) \text{ e raio } \sqrt{2}$$

$$S_2: \text{centro } (0, 3, 0) \text{ e raio } \sqrt{10}$$

$S_3$ : centro  $(2, 0, 0)$  e raio 1

$S_4$ : centro  $(0, 0, 0)$  e raio 1

Seus centros são não coplanares e o sistema linear (\*), neste caso dado por

$$\begin{aligned}6y - 2z &= 0 \\4x - 2z - 4 &= 0 \\-2z &= 0,\end{aligned}$$

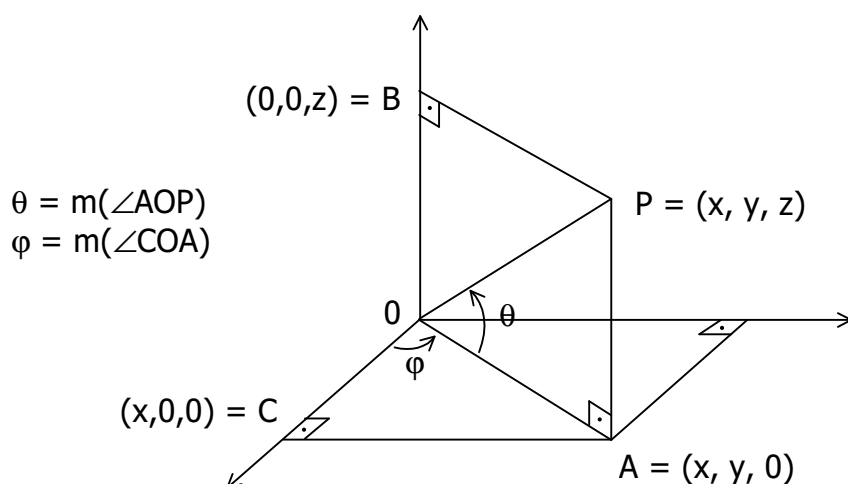
tem como única solução  $x = 1, y = 0$  e  $z = 0$ .

Uma verificação simples mostra que o ponto  $P = (1, 0, 0)$  pertence simultaneamente à  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  de modo que  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{(1, 0, 0)\}$ .

Vejam agora a relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

Para tanto consideramos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem  $O$  no centro da Terra, o eixo  $Oz$  positivo apontando na direção do Pólo Norte  $N$ , o plano  $Oxy$  sendo o plano do Equador com o eixo  $Ox$  positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo  $Oy$  positivo cortando o meridiano de longitude  $90^\circ E$ .

Dado um ponto  $P = (x, y, z)$  do espaço, sejam  $\theta$  e  $\varphi$  os ângulos assinalados na figura abaixo.



Quando  $P$  está sobre a superfície terrestre os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  acima indicados correspondem exatamente à latitude e longitude do ponto  $P$  como anteriormente definidos na seção 5.

A diferença entre  $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e o raio da Terra é chamada a **elevação** (ou **altitude**) de  $P = (x, y, z)$ .

No triângulo retângulo  $\triangle OPB$  da figura acima temos  $\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  e, como  $\cos(90 - \theta) = \text{sen}\theta$ , segue que  $\text{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

Esta expressão atribui a  $\theta$  um único valor entre 0 e 90 quando  $z > 0$  e um único valor entre  $-90$  e 0 quando  $z < 0$ . No primeiro caso dizemos que a latitude de P é  $\theta^\circ$  N enquanto que no segundo a latitude de P é  $(-\theta)^\circ$  S.

Por outro lado, no triângulo retângulo  $\Delta OAC$  temos

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Estas expressões definem um único  $\varphi$  entre 0 e 180 quando  $y > 0$  e dizemos que a longitude de P é  $\varphi^\circ$  E. Quando  $y < 0$ ,  $\varphi$  assume um único valor entre  $-180$  e 0 e, neste caso, a longitude de P é  $(-\varphi)^\circ$  W.

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por  $P = (3\sqrt{3} \cdot 10^6, -3 \cdot 10^6, 6\sqrt{3} \cdot 10^6)$ . Considere como unidade de medida o metro.

Temos  $x^2 + y^2 + z^2 = 27 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{12} + 108 \cdot 10^{12} = 144 \cdot 10^{12}$  e  $x^2 + y^2 = 27 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{12} = 36 \cdot 10^{12}$ . Logo  $\operatorname{sen}\theta = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10^6}{12 \cdot 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e, portanto,  $\theta = 60$ .

Como  $\operatorname{sen}\varphi = -\frac{3 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = -\frac{1}{2}$  e  $\operatorname{cos}\varphi = \frac{3\sqrt{3} \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  obtemos  $\varphi = -30$ .

Assim as coordenadas geográficas de P são  $\theta = 60^\circ$  N e  $\varphi = 30^\circ$  W. Supondo o raio da Terra igual a  $6,4 \cdot 10^6$  metros temos que a elevação de P mede  $12 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^6 = 5,6 \cdot 10^6$  metros.

O processo acima pode ser invertido: conhecendo-se a latitude  $\theta$ , a longitude  $\varphi$  e a elevação de um ponto P, podemos determinar suas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Como antes interpretamos as designações N/S para  $\theta$  e E/W para  $\varphi$  como positivas/negativas, respectivamente. Por exemplo, um ponto com latitude  $40^\circ$  N e longitude  $70^\circ$  W terá  $\theta = 40^\circ$  e  $\varphi = -70^\circ$  enquanto que um ponto com latitude  $40^\circ$  S e longitude  $70^\circ$  E terá  $\theta = -40^\circ$  e  $\varphi = 70^\circ$ .

A partir da elevação de P obtemos o valor de  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  que denotaremos por  $r$ . Logo  $\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{r}$  e, portanto,  $z = r \operatorname{sen}\theta$ .

Por outro lado, como  $\operatorname{cos}\theta = \operatorname{sen}(90 - \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$  segue que

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{cos}\varphi = r \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\varphi \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\varphi = r \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Para referência futura repetimos no quadro abaixo as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas.

$\begin{aligned} x &= r \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\varphi \\ y &= r \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$
---



## ATIVIDADES

- Determine a equação geral de cada uma das superfícies esféricas abaixo.  
 $S_1$ : centro (5,5,15) e raio 13.  
 $S_2$ : centro (4,2,5) e raio 3.  
 $S_3$ : centro (5,1,7) e raio 5.  
 $S_4$ : centro (0, -2, -3) e raio 7.
- Verifique se as equações dadas abaixo são equações gerais de superfícies esféricas. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio.
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$ .
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$ .
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y - 6z + 35 = 0$ .
  - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 15 = 0$ .
- Obtenha uma equação da superfície esférica de centro  $C = (3, -2, 5)$  que é:
  - tangente ao plano Oxy;
  - tangente ao plano Oyz;
  - tangente ao plano Oxz.
- Considere as quatro superfícies esféricas dadas na atividade 1 acima. Determine as equações dos planos que contém  $S_1 \cap S_2$ ,  $S_1 \cap S_3$  e  $S_1 \cap S_4$ . Resolva o sistema linear obtido e ache o ponto de intersecção desses três planos. Verifique que esse ponto pertence simultaneamente às quatro superfícies esféricas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ .
- Determine as coordenadas geográficas e a elevação dos seguintes pontos do espaço ( considere as coordenadas cartesianas dadas em metros e o raio da Terra medindo  $6,4 \cdot 10^6$  metros ):
  - $P = (3\sqrt{3} \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6, -6\sqrt{3} \cdot 10^6)$ ;
  - $P = (-3\sqrt{3} \cdot 10^6, -3 \cdot 10^6, -6\sqrt{3} \cdot 10^6)$ ;
  - $P = (-3 \cdot 10^6, 3\sqrt{3} \cdot 10^6, 6 \cdot 10^6)$ ;
  - $P = (3 \cdot 10^5, -3\sqrt{3} \cdot 10^5, 6 \cdot 10^5)$ .

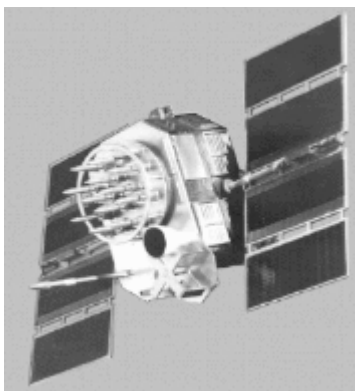
## RESPOSTAS

- $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 30z + 106 = 0$   
 $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 10z + 36 = 0$   
 $S_3: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 14z + 50 = 0$   
 $S_4: x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 6z - 36 = 0$
- $P = (2, 1, 3)$

## 10. A MATEMÁTICA DO GPS

A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura para **Global Positioning System**. Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a

receptores determinar a sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.



O projeto foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos com o propósito de que aeronaves e navios militares pudessem determinar, em qualquer circunstância de tempo, sua posição exata. Ajuda no lançamento de mísseis e a localização de tropas terrestres em movimento foram outras necessidades que motivaram tal projeto.

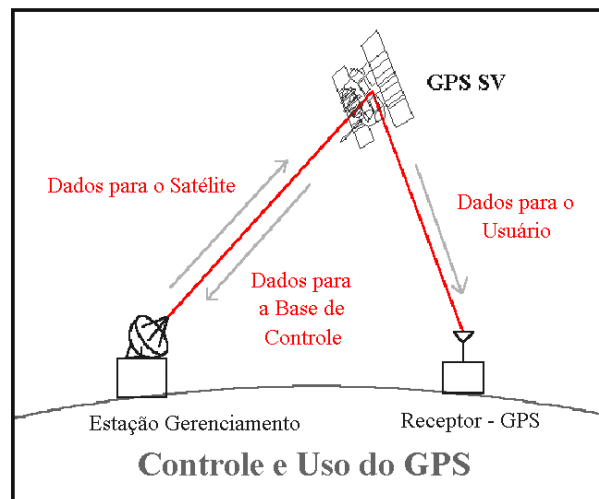
Os projetistas do GPS também o planejaram para uso civil, porém, com precisão menor do que para as operações militares.

O sistema NAVSTAR (abreviatura para **N**avigation **S**atellite **T**iming and **R**anging), nome oficial dado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos ao GPS, consiste de um segmento espacial (os satélites), um segmento de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e um segmento do usuário.



Os vinte e quatro satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e pré-determinadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra ( veja atividade 9 da seção 5 ). Isso assegura com que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizados por até dez satélites.

Todos os vinte e quatro satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Existe uma “estação master”, localizada no Colorado (Estados Unidos), que com o auxílio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitoram a performance total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário. Após o processamento de todos esses dados as correções e sinais de controle são transferidas de volta para os satélites.



Afinal, de que maneira o GPS determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário) funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Esta diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal ( aproximadamente  $2,99792458 \cdot 10^8$  m/s – a **velocidade da luz** ) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas como o descrito na seção anterior. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a equação geral da superfície esférica imaginária.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada, não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas ( latitude, longitude ) e a elevação.

A precisão do tempo é essencial na operação do GPS. Um erro de um micro segundo (  $10^{-6}$  segundos ) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção resulta num erro de 300 metros. Unidades receptoras do GPS

extremamente precisas ( e caras! ) podem determinar sua posição a menos de um metro.

Com o fim da guerra fria, o sistema GPS passou a oferecer uma precisão muito maior para o usuário civil, disponibilizando a ele a mesma precisão que só os militares tinham a algum tempo atrás. Hoje em dia, com auxílio do piloto automático e do GPS, uma aeronave civil é capaz de percorrer distâncias transatlânticas e pousar sem a interferência do piloto com erro de alguns centímetros com o eixo da pista.

A navegação é a função primária do GPS sendo usado em aeronaves, navios, veículos e por indivíduos que usam o receptor portátil ( “de bolso” ). Atualmente o GPS tem se mostrado útil em diversas situações das quais destacamos algumas.

1. Roteirista de viagens: determinam além da sua posição dentro de uma cidade, quais as atrações e pontos turísticos mais próximos, hotéis, postos de emergências, etc.
2. Monitoramento de abalos sísmicos: tais abalos são precedidos por alterações no campo gravitacional que distorcem as ondas de rádio permitindo, através do GPS, tentar prever a ocorrência de um terremoto com algumas horas de antecedência.
3. Meteorologia: o GPS gera informações para a previsão da meteorologia, estudo do clima e outros campos de pesquisa relacionados.
4. Localização para resgate: o serviço usa o GPS para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.
5. Aplicações industriais: áreas infectadas por pestes são identificadas por fotografias aéreas e, com uso do GPS, um trator pode ser guiado para aplicações de pesticidas.
6. Uso militar: coordenadas de ataque, orientação e controle para mísseis balísticos, marcação para artilharia, bombardeio de aeronaves, defesa aérea, rastreamento de submarinos, localização de minas e radares inimigos, atos terroristas, etc.

Na atividade a seguir pretendemos discutir, do ponto de vista matemático, o método utilizado pelo GPS na determinação da posição de um ponto sobre a superfície terrestre. As informações transmitidas no sistema GPS envolvem, por uma questão de precisão, dez ou mais dígitos. Para um aproveitamento mais realista da atividade, sugerimos a utilização de calculadoras ou softwares com capacidade de resolver sistemas lineares com coeficientes dessa ordem. Outra alternativa, abrindo mão eventualmente da precisão, é trabalhar com um número menor de dígitos utilizando a notação científica. Suponha que o raio da Terra meça  $6,378164 \cdot 10^6$  metros e considere a velocidade da luz sendo de  $2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

## ATIVIDADE

A tabela abaixo indica as efemérides ( em metros ) de cada satélite.

	x	y	z
Satélite 1	$1,877191188 \cdot 10^6$	$-1,064608026 \cdot 10^7$	$2,428036099 \cdot 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \cdot 10^7$	$-1,308719098 \cdot 10^7$	$2,036005484 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \cdot 10^7$	$-4,336916128 \cdot 10^6$	$9,090267461 \cdot 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \cdot 10^6$	$7,251740720 \cdot 10^6$	$2,527733606 \cdot 10^7$

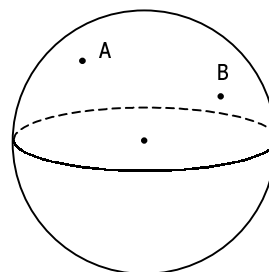
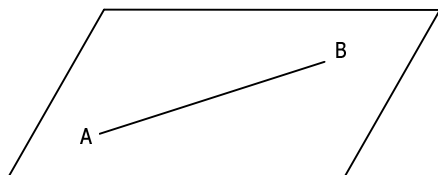
Um receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo ( em segundos ) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

- Calcule a distância entre o receptor e cada satélite.
- Escreva as equações gerais das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas em a).
- Determine as coordenadas cartesianas do ponto P que pertence simultaneamente às quatro superfícies esféricas obtidas em b). (**Sugestão:** Veja atividade 4 da seção 9.)
- Determine a latitude, a longitude e a elevação do ponto P.
- Consulte um atlas geográfico ou um globo terrestre para identificar a posição desse usuário do GPS.

## 11. A DISTÂNCIA NUMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A distância  $d(A,B)$  entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A a B. No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta  $\overline{AB}$  e seu comprimento AB é a distância entre A e B. Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta uma vez que ela é curvada em todas as direções e túneis através da Terra não são permitidos. Como medir a distância entre dois pontos A e B neste caso?



Quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica S são as circunferências máximas, é razoável esperar que a distância ( em S ) entre dois pontos

A e B seja o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por A e B. Uma prova formal desta afirmação será dada adiante.

O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir do conhecimento da medida  $\alpha$  do ângulo  $\angle AOB$  onde O é o centro da superfície esférica S. Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, uma regra de três simples nos dá o valor procurado.

Sendo r o raio da superfície esférica temos

$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ -----} 2\pi r \\ \alpha^\circ \text{ -----} d(A,B) \end{array}$$

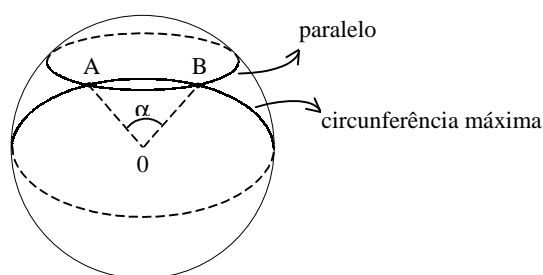
de modo que  $d(A,B) = (\alpha / 360) \cdot (2\pi) \cdot r$ .

Todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas enquanto que, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Logo quando A e B possuem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser usada para achar a medida  $\alpha$ . Analogamente quando A e B estão sobre o Equador é a diferença entre as longitudes que nos permite calcular  $\alpha$ . Vejamos como.

As cidades de Curitiba e Goiânia estão sobre o mesmo meridiano (  $49^\circ W$  ) e suas latitudes são  $26^\circ S$  e  $17^\circ S$ , respectivamente. Estão assim separadas por  $9^\circ$  de latitude e, tomando o raio da Terra como 6400 km, segue que a distância entre elas é dada por  $(9 / 360) \cdot (2\pi) \cdot 6400 \approx 1005$  km.

As cidades de Quito, no Equador, e Entebe, em Uganda, estão ambas sobre o Equador. A longitude de Quito é  $79^\circ W$  enquanto que a de Entebe é  $32^\circ E$ . Logo a diferença entre suas longitudes é de  $111^\circ$  de modo que a distância entre elas é igual a  $(111 / 360) \cdot (2\pi) \cdot 6400 \approx 12399$  km.

Quando duas cidades A e B estão sobre um mesmo paralelo, que não seja o Equador, o caminho mais curto possível entre elas, ao contrário do que diz nossa intuição, **não é** o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  daquele paralelo e sim o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por A e B.



Por exemplo, as cidades de Nova York e Nápoles estão praticamente sobre o mesmo paralelo ( $41^\circ N$ ) e suas longitudes são  $74^\circ W$  e  $14^\circ E$ , respectivamente. O comprimento do arco menor do paralelo entre as duas cidades é cerca de 7419 km (verifique).

Se A e B representam as cidades de Nova York e Nápoles, respectivamente, vejamos como calcular neste caso o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por A e B, ou seja, como calcular  $\alpha = m(\angle AOB)$ .

Considerando-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas como descrito na seção 9 e supondo, como de costume, o raio da Terra medindo 6400 km, podemos escrever

$$A = 6400 (\cos 41^\circ \cos(-74^\circ), \cos 41^\circ \sin(-74^\circ), \sin 41^\circ)$$

$$B = 6400 (\cos 41^\circ \cos 14^\circ, \cos 41^\circ \sin 14^\circ, \sin 41^\circ),$$

ou seja,

$$A = 6400 (0,20802, -0,72547, 0,65606)$$

$$B = 6400 (0,73229, 0,18257, 0,65606).$$

A medida procurada  $\alpha$  será obtida por meio da relação  $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \alpha$  onde  $\langle, \rangle$  indica o produto interno usual entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  enquanto que  $\|\vec{OA}\|, \|\vec{OB}\|$  são os módulos desses vetores, neste caso ambos iguais as 6400.

Como  $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 6400^2 [0,15233 - 0,13244 + 0,43041] = 6400^2 \cdot 0,4503$  segue que  $\cos \alpha = 0,4503$  e, portanto,  $\alpha = 63^\circ$ .

O comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por A e B, que é a distância entre A e B, é então dada por  $(63 / 360) \cdot 2\pi \cdot 6400 \approx 7037$  km. Note como esta distância é menor do que aquela calculada ao longo do paralelo.

O argumento acima pode ser utilizado para calcular a distância entre dois pontos quaisquer A e B do globo terrestre. Dadas suas coordenadas geográficas, obtemos suas coordenadas cartesianas e, usando o produto interno  $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$ , determinamos  $\alpha = m(\angle AOB)$ . A distância procurada  $d(A, B)$  é então dada por  $d(A, B) = (\alpha / 360) \cdot (2\pi) \cdot 6400$ .

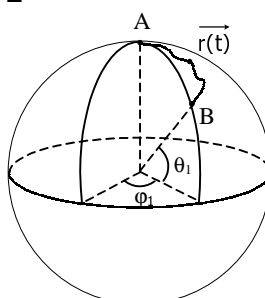
Encerramos a seção apresentando uma prova formal do fato que  $d(A, B)$  é o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por A e B. Isso pode ser feito com umas poucas simplificações e a ajuda do cálculo diferencial e integral.

Primeiro, podemos supor sem perda de generalidade que a superfície esférica que estamos trabalhando tem raio igual a 1 unidade (a que você quiser) e que seu centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Segundo, pela simetria da superfície esférica podemos assumir que o ponto A é o Pólo Norte. O outro ponto, B, será dado pelas suas coordenadas geográficas que vamos supor medidas em **radianos**. Digamos que a latitude de B é  $\theta_1$  enquanto que sua longitude é  $\varphi_1$ .

A circunferência máxima que passa por A e B contém o meridiano por B de modo que o arco menor  $\widehat{AB}$  tem por comprimento  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$  (lembre-se que o raio da superfície esférica é 1).

Devemos agora considerar uma trajetória arbitrária ligando A e B e mostrar que seu comprimento é maior ou igual a  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ .



Se nos imaginarmos viajando de A até B, em cada instante  $t$ , estaremos num ponto do globo terrestre com uma latitude  $\theta(t)$  e uma longitude  $\varphi(t)$ . Iniciando nossa viagem no instante  $t = 0$  e a finalizando no instante  $t_1$  teremos  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta(t_1) = \theta_1$  e  $\varphi(t_1) = \varphi_1$ .

Uma trajetória arbitrária ligando A a B é então descrita por um vetor posição  $\vec{r}(t)$  dado por  $\vec{r}(t) = (\cos\theta(t) \cos\varphi(t), \cos\theta(t) \sin\varphi(t), \sin\theta(t))$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ .

Derivando-se essa função vetorial em relação ao tempo  $t$  obtemos o vetor velocidade  $\vec{r}'(t)$  da trajetória e conseqüentemente sua velocidade  $\|\vec{r}'(t)\|$  no instante  $t$ .

Cálculos rotineiros nos dão que  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \cos^2 \theta(t)} \geq \sqrt{\theta'(t)^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t)$ .

Lembrando que o comprimento da trajetória é calculado pela expressão

$$L = \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt$$

concluimos que  $L \geq \int_0^{t_1} -\theta'(t) dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1$  e temos assim provado o resultado desejado.

## ATIVIDADES

Em todos os exercícios desta série suponha que o raio da Terra meça 6400 km.

1. As cidades de Macapá (Brasil) e Pontianak (Indonésia) estão ambas situadas sobre o Equador. Consulte um atlas geográfico para achar a longitude de cada uma dessas localidades e determine a distância entre elas.
2. Qual a distância de Salvador ao Pólo Sul? E ao Pólo Norte? E a Fortaleza? (**Sugestão:** Salvador e Fortaleza estão sobre um mesmo meridiano.)
3. Chicago e Roma situam-se na mesma latitude ( $42^\circ$  N) mas em longitudes diferentes: a de Chicago é aproximadamente  $88^\circ$  W e a de Roma aproximadamente  $12^\circ$  E.
  - a) Suponha que um piloto tenha ido de Chicago a Roma em vôo no rumo leste, permanecendo o tempo todo na mesma latitude. (Muita gente acha que esse é o caminho mais curto possível). Que distância o piloto teve de voar?
  - b) Qual a distância de Chicago a Roma por circunferência máxima?
  - c) Quanto tempo se economizaria voando em uma circunferência máxima num avião a jato capaz de fazer uma velocidade média de 900 km/h?
4. Qual é a distância entre Nova York ( $40^\circ 40'N$ ,  $74^\circ W$ ) e Buenos Aires ( $34^\circ 30'S$ ,  $58^\circ 30'W$ ) ?

## RESPOSTAS

3. a) cerca de 8300 km  
b) cerca de 7752 km



- c) aproximadamente 36 minutos  
4. cerca de 8545 km

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Azevedo, G.G. e Santos, F.M. – *Panorama do Brasil I* , Editora Atual, 1990.
- [2] Feeman, T.G. – *Portraits of the Earth* , American Mathematical Society, 2002.
- [3] Hy Kim – *Angled Sunshine, Seasons and Solar Energy*, The Mathematics Teacher Vol 90, N° 7, October 1997.
- [4] Jennings, G.A. – *Modern Geometry with Applications* , Springer,1997.
- [5] Moise, E. – *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* , Third Edition, Addison Wesley Publishing Co., 1990.
- [6] Nord, G.D., Jabon, D. and Nord, J. – *The Mathematics of the Global Positioning System* , The Mathematics Teacher Vol 90, N° 6, September 1997.
- [7] Waiveris, C. and Craine, T.V. – *Where are we?*, The Mathematics Teacher Vol 89, N° 6, September 1996.

### Sites na Internet

<http://www.geocities.com/capecanaveral/lab/9947/>  
[www.garmin.com](http://www.garmin.com)  
<http://astro.if.ufrgs.br/indexhtml>