Resolução de Equações Algébricas por Radicais

Gervasio G. Bastos

Resumo

Visão histórica do problema da resolução de equações algébricas, desde os antigos egípcios até Galois. A "completação de quadrados" e os artifícios de cálculo para resolver as equações cúbicas e quárticas. Discussão das equações com coeficientes reais. Comentários sobre a impossibilidade de resolução de equações com grau superior a quatro e o surgimento da teoria dos grupos.

1 Introdução

Nesta exposição apresentamos os métodos clássicos para resolver as equações algébricas com grau $2 \leq n \leq 4$, em que se procura determinar expressões para as raízes de um dado polinômio $f(x)$ com grau n, em função de seus coeficientes, envolvendo somente as operações algébricas fundamentais e mais a extração de raízes quadradas, cúbicas, etc. A isso chamamos a *resolução por radicais* da equação $f(x) = 0$. Para simplificar a questão, mas sem perder a essência do método de solução, consideraremos somente equações com coeficientes reais.

A equação quadrática, apesar de já manuseada no Antigo Egito cerca de l700 anos A. C., somente no século XII foi posta na forma como hoje conhecemos, graças à contribuição de Baskhara (matemático hindu) que a escrevera em versos. As equações do terceiro e quarto graus tiveram suas fórmulas estabelecidas no século XVI pela escola italiana representada por S. del Ferro (1465?-1526), N. Tartaglia (1500?-57), G. Cardano (1501-76) e L. Ferrari (1522-65), entre outros. Deve-se a del Ferro a resolução da equação cúbica (ele manteve o seu método em segredo), mais tarde também resolvida independentemente por N. Tartaglia. Tudo isso se deu até 1545, ano em que G. Cardano a publicou, com as devidas referências a del Ferro e Tartaglia, em seu livro "Ars Magna", juntamente com a fórmula da equação quártica, esta última estabelecida "a seu pedido"por seu discípulo L. Ferrari. No final do século XVIII, o matemático italiano P. Ruffini deu uma prova (com algumas lacunas em sua argumentação) da impossibilidade de se resolver por radicais a equação do 5.º grau. A primeira prova convincente da impossibilidade de resolução da equação quíntica foi estabelecida, no início do século XIX, pelo matemático norueguês N. H. Abel (1802-29). O trabalho de Abel foi completado pelo gênio francês E. Galois (1811-32), que caracterizou as equações $f(x) = 0$, com grau arbitrário n, que são solúveis por radicais, por meio de uma propriedade de certo grupo G_f de permutações de suas raízes, atualmente denominado o grupo de Galois de f. Pode-se dizer que exatamente aí nasce a teoria dos grupos. A partir desse resultado, conclui-se que a equação geral de grau $n \geq 5$ não pode ser resolvida por radicais. Uma boa referência em língua portuguesa para essa parte da história da matemática se encontra em [M].

Chamaremos *equação algébrica de grau* $n \geq 2$ à uma igualdade

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0 \quad (n)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $a_n \neq 0$. Procura-se determinar os números x, a "incógnita", de modo que a igualdade seja satisfeita. Como conseqüência do teorema fundamental da álgebra, sabemos que o polinômio $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{R}[t]$, de grau n, fatora-se como

$$f(t) = a_n(t - z_1)...(z - z_n) \; (*)$$

onde $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ (= corpo dos números complexos) não necesariamente distintos, univocamente determinados. Nesse sentido, dizemos que toda equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes complexas, podendo haver repetições, i. e. contando suas *multiplicidades.* As *raízes, coeficientes, grau*, etc. da equação (n) são, por definição, as raízes, coeficientes, grau, etc. do polinômio f. Desenvolvendo o segundo membro de $(*)$, e comparando os coeficientes de mesmo grau, obtêm-se as relações entre *coeficientes e raízes* de um polinômio:

$$\begin{aligned}
&z_1 + ... + z_n = -a_{n-1}/a_n \\
&z_1 z_2 + ... + z_{n-1} z_n = a_{n-2}/a_n \\
&\vdots \\
&\textstyle\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} z_{i1} z_{i_2} ... z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}/a_n \quad \binom{*}{*} \\
&\vdots \\
&z_1 ... z_n = (-1)^n a_0/a_n
\end{aligned}$$

Para encontrar as raízes de $f(x) = 0$, podemos dividir todos os coeficientes de f por $a_n \neq 0$, e assim supor, sem perda de generalidade, que $a_n = 1$.

2 A Equação de 2.º Grau

Para $n = 2$, temos a *equação quadrátrica*

$$x^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

Para resolvê-la, basta "completar o quadrado": $x^2+2(b/2)+(b/2)^2+c-(b/2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c-(b/2)^2 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2} = \left(\frac{b^2-4c}{4}\right)^{1/2} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, onde $\Delta = b^2 - 4c$ é chamado o *discriminante* (2). Define-se para $r < 0 : \sqrt{r} = i\sqrt{-r}$, onde i é a unidade imaginária no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Obtém-se, assim, a conhecida *fórmula de Baskhara*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

3 A Equação do 3.º Grau

O processo de "completamento do cubo" para a equação $x^3+ax^2+bx+c = 0$ apenas retira o seu coeficiente de 2.º grau. De fato, podemos escrever $x^3 + 3(\frac{a}{3})x^2 + 3(\frac{a}{3})^2x + (\frac{a}{3})^3 + (b - \frac{a^2}{3})x + c - \frac{a^3}{27} = (x+\frac{a}{3})^3 + p(x+\frac{a}{3}) + q = 0$, onde $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. Agora, basta resolver a *equação reduzida*

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

cujas raízes x_i fornecem as três raízes $x_i - a/3$ da equação original completa.

Para resolver (3), usa-se um artifício de cálculo: $x = u + v$, com $u \neq 0$ e $v \neq 0$, a determinar. Note-se que podemos supor $x \neq 0$, i. e. $q \neq 0$; caso contrário recaímos em uma equação quadrática. Assim, $(u+v)^3+p(u+v)+q = 0 \Leftrightarrow u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v) = 0$. Obviamente, obtém-se uma raiz $x = u+v$, se pudermos resolver o sistema de equações em u e v:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases} \quad (A)$$

As soluções de (A) são necessariamente soluções (u, v) do seguinte sistema, o qual pode ser resolvido facilmente em u^3 e v^3:

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \quad (B)$$

No entanto, (B) tem a desvantagem de introduzir "soluções estranhas", já que nem todos os u e v encontrados em (B) servem para (A). De fato, devemos reter apenas os valores de u e v (dados por raízes cúbicas) tais que $uv=-p/3$. Pelas relações $(\substack{*\\ *})$, vemos que u^3 e v^3 são as raízes da equação $y^2+qy-\dfrac{p^3}{27}=0$, chamada a *equação quadrática resolvente* de (3). Uma vez encontradas as raízes $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ da resolvente, podemos tomar $u=\alpha^{1/3}$ e $v=\beta^{1/3}$.

Nota: Sabemos se z é uma das raízes cúbicas complexas de $\gamma\in\mathbb{C}$, então as três raízes cúbicas de γ são z, wz e $\overline{w}z$, onde $w=e^{i(2\pi/3)}=\cos 2\pi/3+i\operatorname{sen} 2\pi/3=-1/2+i\sqrt{3}/2$ é uma raiz cúbica da unidade.

Em (B) os possíveis valores para uv são $-\dfrac{p}{3}$, $-\dfrac{wp}{3}$ ou $-\dfrac{w^2p}{3}$. Devemos eliminar as soluções "estranhas"(u,v) tais que $uv\neq-\dfrac{p}{3}$. Pela fórmula de Baskhara, aplicada à resolvente quadrática, obtemos $u^3=-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}$ e $v^3=-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}$.

Temos, então nove soluções (u,v) para o sistema (B), onde u e v representam, respectivamente, uma das raízes cúbicas complexas de $-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}$ e $-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}$.

Escolhamos para u qualquer uma das raízes cúbicas complexas de $-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}$, que indicaremos por $u=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$. Tomemos $v=-\dfrac{p}{3u}$. Então,

$$\begin{aligned} v^3 &= -\frac{p^3}{27u^3} = -\frac{p^3}{27(-\frac{q}{2}+\sqrt{q^2/4+p^3/27})} \\ &= \frac{p^3(-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27})}{27(-\frac{q}{2}+\sqrt{q^2/4+p^3/27})(-\frac{q}{2}-\sqrt{q^2/4+p^3/27})} \\ &= -\frac{p^3(-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27})}{27u^3v^3} \\ &= -q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27} \end{aligned}$$

Logo, v é uma das raízes cúbicas complexas de $-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}$ com $3uv=-p$, a qual denotaremos por $v=\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$. Obtemos então uma raiz de (3) dada por

$$x = u + v = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

Uma vez obtida essa raiz, $x = u + v$, observemos que
$[x - (u + v)][x - (wu + \overline{w}v)][x - (\overline{w}u + wv)] =$
$[x - (u + v)][x - (wu + w^2v)][x - (w^2u + wv)] =$
$[x - (u + v)][x^2 - (wu + w^2v + w^2u + wv)x + (u^2 + w^2uv + wuv + v^2)] =$
$[x - (u + v)][x^2 - (u + v)(w + w^2)x + u^2 - uv + v^2] =$
$x^3 - [(u + v) + (u + v)(-1)]x^2+$
$[(u+v)^2(-1)+u^2-uv+v^2]x-(u+v)(u^2-uv+v^2) = x^3-3uv+(u^3+v^3) =$
$x^3 + px + q$.

Logo, as raízes de (3) são dadas por

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} \\
x_2 &= w\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \overline{w}\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} \\
x_3 &= \overline{w}\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + w\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}
\end{aligned}$$

onde os radicais $\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$ e $\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$ são escolhidos sob a condição $uv = -p/3$. Portanto, as raízes x de (3) se expressam pela chamada *fórmula de Cardano*:

$$x = w^k\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \overline{w}^k\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}},\ k = 0, 1, 2.$$

Example 1 $x^3 - x + 1 = 0$. *Temos* $p = -1$ *e* $q = 1$. *Portanto, temos*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{1/4 - 1/27}} + \sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{1/4 - 1/27}} \\
&= \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + \sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}} \\
x_2 &= w\sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + \overline{w}\sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}} \\
x_3 &= \overline{w}\sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + w\sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}}
\end{aligned}$$

onde $w = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *e os dois radicais podem ser tomados como os radicais cúbicos reais, pois* $(\sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}})(\sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}}) = 1/3 = -p/3$.

Example 2 *Tomemos agora um exemplo de equação com raízes prescritas:* $(x-5)(x+1)(x+4) = x^3-21x-20 = 0$. *Escolhendo inicialmente qualquer raiz cúbica* $u = \sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}}$, *vimos que existe uma única raiz cúbica* $v = \sqrt[3]{10 - i\sqrt{243}}$ *tal que* $5 = u + v$. *Agora, tudo o que podemos acrescentar é que* $\{-1, -4\} = \{wu+\overline{w}v, \overline{w}u+wv\}$. *Poderíamos, é claro, ter partido de* -1 *ou de* -4.

Example 3 *A equação* $x^3 - 3x + 2 = 0$ *tem como raízes*
$x_1 = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -2$
$x_2 = w\sqrt[3]{-1} + \overline{w}\sqrt[3]{-1} = 1$
$x_3 = \overline{w}\sqrt[3]{-1} + w\sqrt[3]{-1} = 1.$

3.1 O Discriminante

O *discriminante* da equação (3) é definido por
$\delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$, onde $x_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 3)$ são as raízes da equação.

Proposition 4 *O discriminante da equação* $x^2 + px + q$ *é dado, em termos dos seus coeficientes, por*
$\delta = -4p^3 - 27q^2.$

Proof. Sabemos que as raízes da equação são dadas por $x_1 = u+v$, $x_2 = wu + w^2v$ e $x_3 = w^2u + wv$, onde u (resp. v) é uma das raízes cúbicas complexas de $-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$ (resp. $-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$) e $uv = -p/3$. Logo,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (1-w)u + (1-w^2)v = (1-w)(u - w^2v) \\ x_1 - x_3 &= (1-w^2)u + (1-w)v = (1-w)(-w^2u + v) \\ x_2 - x_3 &= (w - w^2)u + (w^2 - w)v = w(1-w)(u-v) \end{aligned}$$

$\therefore (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = w(1-w)^3w^2(v^3 - u^3) =$
$(1-w)^3(-2\sqrt{q^2/4 + p^3/27})$.

Por outro lado temos $(1-w)^6 = [(1-w)^3]^2 = (1 - 3w + 3w^2 - w^3)^2 = (3i\sqrt{3})^2 = -27$.
$\therefore \delta = [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2 = -27(q^2 + 4p^3/27) = -4p^3 - 27q^2.$
■

Como as raízes da equação do 3.º grau completa $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são obtidas subtraindo-se $a/3$ das raízes x_i da equação reduzida, então o discriminante é o mesmo que o da equação reduzida. Fazendo as substituições $p = b - a^2/3$ e $q = -2a^3/27 + c$, obtemos $\delta = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$. Do mesmo modo, podemos obter expressões para as raízes da equação completa em termos dos coeficientes a, b e c.

Em termos do discriminante, as raízes da cúbica reduzida são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{-\delta/108}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{-\delta/108}} \\ x_2 &= w\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{-\delta/108}} + \overline{w}\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{-\delta/108}} \\ x_1 &= \overline{w}\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{-\delta/108}} + w\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{-\delta/108}} \end{aligned}$$

onde os radicais cúbicos indicam raízes cúbicas tais que $(\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{-\delta/108}})(\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{-\delta/108}}) = -p/3$, e w é a raiz cúbica da unidade dada por $w = e^{2\pi i/3} = \cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$.

3.2 Discussão da Equação do 3.º Grau

Consideremos o polinômio $f(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$, e a equação cúbica $f(x) = x^3 + px + q = 0$. Em primeiro lugar, observemos que $z \in \mathbb{C}$ é raiz de $f(X)$ se e somente se $\overline{z}$ é raiz de $f(X)$. De fato, de $x^3 + px + q = 0$, tiramos $(\overline{x})^3 + p\overline{x} + q = \overline{x^3 + px + q} = \overline{0} = 0$.

1. A equação tem uma raiz tripla se e somente se $p = q = 0$. Com efeito, se $p = q = 0$, é claro que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Reciprocamente, se $x_1 = x_2 = x_3 = c$, tem-se $x^3 + px + q = (x-c)^3 = x^3 - 3cx^2 + 3c^2x + c^3$, para todo $x \in \mathbb{C}$. Logo, $c = 0$, i.e. $p = q = 0$.

2. A equação tem uma raiz dupla, $x_1 = x_2 \neq x_3 \Leftrightarrow \delta = 0$ e $(p,q) \neq (0,0)$. A implicação "$\Rightarrow$ " decorre imediatamente da definição do discriminante e de (1). Novamente por (1), se $(p,q) \neq (0,0)$, então temos, pelo menos, duas raízes distintas. Se, além disso, $\delta = 0$, teremos somente uma raiz dupla.

3. As três raízes são simples (i.e. não há raiz repetida) se e somente se $\delta \neq 0$, como se vê a partir da definição do discriminante.

4. $\delta \geq 0$ se e somente se todas as raízes da equação são reais. A condição é obviamente necessária, pois o quadrado de qualquer número real é não negativo. Também é suficiente, pois se uma das raízes é imaginária, tem-se duas imaginárias conjugadas, digamos x_1 e $x_2 = \overline{x_1}$, e temos $f(X) = (X - x_1)(X - \overline{x_1})(X - x_3)$. Comparando os termos constantes, obtemos $-|x_1|^2 x_3 = q \in \mathbb{R}$; logo, $x_3 = c \in \mathbb{R}$. Portanto, $\delta = [(x_1 - \overline{x_1})(x_1 - c)(\overline{x_1} - c)]^2 = [2\Im(x_1) i\, |x_1 - c|^2]^2 = -r^2 < 0$.

5. Se $\delta < 0$, podemos tomar $x_1 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{-\delta/108}} + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{-\delta/108}}$, onde as raízes cúbicas são as reais, pois o produto delas é $-p/3$. Ademais, temos neste caso, duas raízes complexas não reais conjugadas. Pelas relações $(\substack{*\\ *})$, tem-se: $q = -x_1|x_2|^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0$.

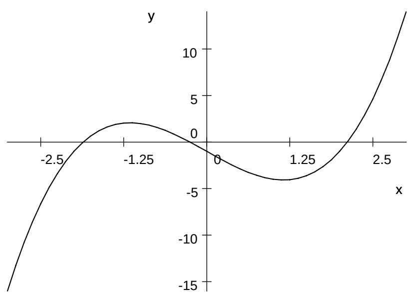
6. Se $\delta > 0$, tem-se três raízes reais distintas. Neste caso, tem-se $-4p^3 - 27q^2 > 0$ e portanto $p < 0$.

Quando a equação do 3.º grau, com coeficientes racionais, $f(x) = 0$ tem uma raiz $x_1 \in \mathbb{Q}$, podemos escrever $f(x) = (x - x_1)g(x)$. Portanto, as raízes dessa equação são x_1 e mais as raízes da equação quadrática $g(x) = 0$, não havendo necessidade do uso da fórmula de Cardano. Caso contrário, $f(x) = x^3 + px + q$ é um polinômio com coeficentes racionais, irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Se $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem três raízes reais (irracionais), x_1, x_2, x_3, distintas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-q/2 + i\sqrt{\delta/108}} + \sqrt[3]{-q/2 - i\sqrt{\delta/108}} \\
x_2 &= w\sqrt[3]{-q/2 + i\sqrt{\delta/108}} + w^2\sqrt[3]{-q/2 - i\sqrt{\delta/108}} \\
x_3 &= w^2\sqrt[3]{-q/2 + i\sqrt{\delta/108}} + w\sqrt[3]{-q/2 - i\sqrt{\delta/108}}
\end{aligned}
$$

Notemos que não obstante serem reais, as raízes se expressam em termos de radicais cúbicos de números complexos não reais. Esta situação é conhecida como o *casus irreducibilis*, o qual na época de Cardano era envolto em mistério pois os números complexos não eram ainda bem definidos; por exemplo, os radicais quadráticos de números negativos eram chamados *números imaginários*. Hoje sabemos que os dois radicais na expressão de x_1 são complexos conjugados.

Example 5 $x^3 - 4x - 1 = 0$. *Temos* $p = -4$, $q = -1$, $\delta = -4 \cdot (-4)^3 - 27 \cdot (-1)^2 = 229 > 0$. *Assim, a equação tem três raízes reais distintas, dadas pela fórmula de Cardano:*
$x_1 = \sqrt[3]{1/2 + i\sqrt{229/108}} + \sqrt[3]{1/2 - i\sqrt{229/108}}$
$x_2 = w\sqrt[3]{1/2 + i\sqrt{229/108}} + \overline{w}\sqrt[3]{1/2 - i\sqrt{229/108}}$,
$x_3 = \overline{w}\sqrt[3]{1/2 + i\sqrt{229/108}} + w\sqrt[3]{1/2 + i\sqrt{229/108}}$. *Usando o computador, encontramos essas raízes dadas numericamente:*
$\{[x = -1.8608], [x = -0.2541], [x = 2.1149]\}$; *o gráfico da curva* $y = x^3 - 4x - 1$ *é o que se vê abaixo.*



4 Equação do 4.º Grau

A equação completa $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ pode ser escrita na forma $(x+a/4)^4+p(x+a/4)^2+q(x+a/4)+r$, pelo processo de completamento da quarta potência. Assim basta considerar a equação do quarto grau reduzida $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (4). Como no caso da equação cúbica, façamos $x = u + v + z$, com $u \neq 0, v \neq 0, z \neq 0$. Temos: $x^2 - (u^2 + v^2 + z^2) = 2(uv + uz + vz)$
$\therefore [x^2 - (u^2 + v^2 + z^2)]^2 = 4(uv + uz + vz)^2 \Leftrightarrow x^4 - 2(u^2 + v^2 + z^2)x^2 + (u^2 + v^2 + z^2)^2 = 4[u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 + 2(u^2vz + uv^2z + uvz^2)] = 4(u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2)+$
$8uvz(u + v + z) \Leftrightarrow x^4 - 2(u^2 + v^2 + z^2)x^2 - 8(uvz)x + [(u^2 + v^2 + z^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2)] = 0$. Assim, se (u, v, z) é uma solução do sistema: $\begin{cases} u^2 + v^2 + z^2 = -p/2 \\ uvz = -q/8 \\ u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 = (p^2 - 4r)/16 \end{cases}$, então $x = u + v + z$ é uma raiz de (4). É mais fácil resolver o sistema seguinte $\begin{cases} u^2 + v^2 + z^2 = -p/2 \\ u^2v^2z^2 = q^2/64 \\ u^2v^2 + u^2z^2 + v^2z^2 = (p^2 - 4r)/16 \end{cases}$ em u^2, v^2, z^2. De fato, temos que u^2, v^2 e z^2 são as raízes da cúbica

$$y^3 + (p/2)y^2 + [(p^2 - 4r)/16]y - q^2/64 = 0$$

chamada a *cúbica resolvente* de (4). Encontramos então números complexos $u^2 = \alpha, v^2 = \beta, z^2 = \gamma$. Escolhendo duas raízes quadradas $u = \sqrt{\alpha}$ e $v = \sqrt{\beta}$, determinamos $z = -q/8uv$. Como $\gamma = z^2 = q^2/64u^2v^2 = (-q/8uv)^2$, temos que $z = -q/8uv$ é uma das raízes quadradas de γ. Assim, $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ é uma raiz de (4). Temos então as quatro raízes de (4), dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \\ x_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ x_3 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ x_4 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \end{aligned}$$

Example 6 *Na equação $x^4 + 8x + 4 = 0$, temos $p = 0, q = 8$ e $r = 4$. Logo, a cúbica resolvente é $y^3 - (16/16)y - 64/64 = y^3 - y - 1 = 0$, com $\delta = -4(-1)^3 - 27 \cdot (-1)^2 = -23 < 0$. Logo, $u^2 = \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + \sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}}$ (radicais reais),*
$v^2 = w\sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + \overline{w}\sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}}$
$z^2 = \overline{w}\sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{23/108}} + w\sqrt[3]{-1/2 - \sqrt{23/108}}$, onde $w = -1/2 +$

$i\sqrt{3}/2$.
Para $f(x) = x^4 + x + 4$*, temos* $f\,'(x) = 4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{1/4}$. *Temos* $f(-\sqrt[3]{1/4}) = (-\sqrt[3]{1/4})^4 - \sqrt[3]{1/4} + 4 = 4 - \frac{3}{16}4^{\frac{2}{3}} = 3.5275$, $f''(x) = 12x^2$ *e portanto* $f''(-\sqrt[3]{1/4}) > 0$. *Assim, não há raiz real para a nossa equação; todas raízes são complexas não reais, dadas por*

$$x_1 = \sqrt[2]{\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} + \sqrt[2]{w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\overline{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} + \sqrt[2]{\overline{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}}$$

$$x_2 = \sqrt[2]{\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} - \sqrt[2]{w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\overline{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} - \sqrt[2]{\overline{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}}$$

$$x_3 = -\sqrt[2]{\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} + \sqrt[2]{w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\overline{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} - \sqrt[2]{\overline{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}}$$

$$x_4 = -\sqrt[2]{\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} - \sqrt[2]{w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\overline{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} + \sqrt[2]{\overline{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}}.$$

Os três radicais quadráticos em cada raiz são tomados satisfazendo à condição:

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} \cdot \sqrt[2]{w\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+\overline{w}\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} \cdot \sqrt[2]{\overline{w}\sqrt[3]{-1/2+\sqrt{23/108}}+w\sqrt[3]{-1/2-\sqrt{23/108}}} = -1/8.$$

Usando o computador, encontramos essas raízes numericamente:
$[x = -1.0039 - 0.87102i]$, $[x = -1.0039 + 0.87102i]$,
$[x = 1.0039 - 1.1211i]$, $[x = 1.0039 + 1.1211i]$.

5 A Equação de Grau $n \geq 5$

A insolubilidade da equação geral de grau $n \geq 5$ é provada nos cursos de álgebra sobre a teoria dos corpos, podendo ser encontrada em [E, §9]. Parte deles é dedicada às extensões algébricas de corpos, culminando com o chamado teorema fundamental da teoria de Galois para uma extensão $K \subset L$ de certo tipo, determinando uma correspodência biunívoca entre os subcorpos intermediários $K \subseteq F \subseteq L$ e os subgrupos do grupo $G(L|K)$ dos automorfismos de L sobre K. Resulta dessa teoria que a equação $f(x) = x^n + t_1x^{n-1} + ... + t_n = 0$ pode ser resolvida por radicais se e somente se $G_f = G(L|K)$ é um grupo solúvel, onde L é construído a partir do polinômio f. Prova-se que esse grupo pode ser considerado como um subgrupo do grupo simétrico S_n, das permutações das n raízes de f. Hoje em dia, a teoria dos grupos faz parte do programa do curso inicial de álgebra abstrata dos cursos de graduação em matemática. Um dos resultados importantes da teoria dos grupos é o que mostra que S_n somente é solúvel se $n \leq 4$ (veja.[B], cap.2). Como a equação geral de grau n tem S_n como o grupo G_f, então conclui-se que $f(x) = 0$, para $n \geq 5$ não admite uma fórmula para suas raízes como as dos casos $n \leq 4$.

6 Referências

[B] G. G. Bastos, *Notas de Álgebra*, Edições Livro Técnico, Fortaleza, 2002

[E] O. Endler, *Teoria dos Corpos*, Monog. de Matemática N.º44, IMPA, 1987

[M] C. P. Milies, *Breve Introdução à História da Teoria dos Grupos*, Notas da XII Escola de Álgebra, Diamantina (MG), 1992.

Gervasio Gurgel Bastos
UFC
ggbastos@ufc.br