

RESSONÂNCIA

PARA ALÉM DOS CURSOS DE FÍSICA

Antônio Zumpano
Grey Ercole
Hamilton Prado Bueno

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

PREFÁCIO

Algumas frases parecem sintetizar todo um conhecimento. Por exemplo, sabe-se que ressonância ocorre quando a frequência natural de vibração de um sistema (massa-mola, por exemplo) for igual à frequência da força externa que lhe é aplicada.

Contudo, tal frase revela-se insuficiente – didaticamente adequada a uma situação em que a força externa tem a forma $A \cos \omega t$, mas certamente incompleta ou desajustada a situações mais gerais. Mostramos, através de um exemplo simples, que a igualdade das frequências fundamentais da força externa de um sistema massa-mola e da solução do problema homogêneo associado pode não produzir ressonância. Em certo sentido, o objetivo dessas notas é discutir e reinterpretar o sentido daquela frase, mostrando que ela é adequada apenas dentro do escopo da análise harmônica.

Essas notas surgiram da insatisfação (e, algumas vezes, indignação) de um dos seus autores com a apresentação usual do fenômeno de ressonância nos livros didáticos de matemática ou física, partindo da dúvida inicial sobre o sentido da frase que inicia esse prefácio. Como interpretá-la adequadamente, de modo que ela faça sentido para forças externas mais gerais? Surgiu também do descontentamento com o tratamento de ressonância entre duas cordas vibrantes. Assim, escrevemos este texto com o propósito de contentar a nós mesmos...Nele fazemos uma exposição elementar do fenômeno de ressonância. Procuramos tornar sua leitura tão simples quanto possível: resultados básicos sobre as soluções de equações lineares de 2ª. ordem, sobre a transformada de Laplace e sobre a teoria básica de séries de Fourier são recordados aqui mesmo. Algumas vezes esses resultados são apenas enunciados, outras vezes suas demonstrações também são incluídas, em especial, no capítulo sobre séries de Fourier.

Isso, é claro, leva ao receio de que esse pequeno livro torne-se "mais um texto sobre séries de Fourier". Considerada a profusão de tratados sobre o assunto – alguns dos quais bastante didáticos e interessantes –, essa não é uma preocupação menor. E, se olharmos apenas o Capítulo 3, também não é infundada.

Por outro lado, a abordagem de ressonância, feita tanto no caso de um sistema massa-mola (Capítulo 2) quanto através da equação da corda vibrante (Capítulo 4), parece-nos original. Apesar de os resultados expostos não serem desconhecidos (eles provavelmente são utilizados por físicos e engenheiros), não conhecemos qualquer apresentação matemática dos mesmos. Mais do que isso, conseguimos tratá-los de uma maneira elementar. Nesse sentido, achamos que essas notas podem servir como leitura

complementar para um curso introdutório, seja em equações diferenciais ordinárias, seja em séries de Fourier e equações diferenciais parciais.

Procuramos dar um tom corriqueiro ao manuscrito, tentando evitar o estilo "teorema-demonstração". Não damos destaque, na impressão, aos teoremas ou exemplos. Eles são, simplesmente, incorporados à redação. Algumas vezes, contudo, os resultados são apresentados como afirmações, que são provadas com o correr do escrito. Assim, no final do Capítulo 2, essas notas possuem um único "teorema" em destaque, por acharmos que essa apresentação seria a mais conveniente para sintetizar os diferentes resultados obtidos naquele Capítulo.

Algumas palavras sobre o ordenamento do material exposto.

Considerando um sistema massa-mola, o primeiro capítulo traz a apresentação tradicional do fenômeno de ressonância, como nos textos didáticos de matemática ou física.

O segundo capítulo introduz a transformada de Laplace para analisar mais profundamente esse fenômeno. Consideramos uma força externa periódica F aplicada a um sistema massa-mola (sem atrito) e comparamos a frequência da força com a frequência do sistema homogêneo associado. As relações entre essas frequências (não a igualdade delas!) determinam a existência de soluções ressonantes e periódicas.

O terceiro capítulo introduz a equação da onda e apresenta sua solução via série de Fourier. A nossa exposição ressalta aspectos geométricos e pode ser apresentada em poucas aulas.

Finalmente, o último capítulo trata da interação entre duas cordas vibrantes, uma delas produzindo uma onda sonora que atua como força externa sobre a outra. A nossa abordagem desse problema é bastante diferente da usual. Supomos que a vibração $u(x, t)$ da primeira corda produza uma onda sonora que atua como se tivesse variáveis separáveis. Claro, isso implica, em particular, que as funções $X(x)$ e $T(t)$ têm que ser desenvolvidas com períodos diferentes; supomos que essa propriedade seja devida ao caráter esférico da propagação da onda. Dessa forma, conseguimos explicar, por exemplo, que a vibração de uma corda de violão produza ressonância capaz de fazer vibrar a corda de um outro violão. A abordagem usual do assunto (veja, por exemplo, [2] e [5]) não é capaz de fazê-lo.

Belo Horizonte, 15 de setembro de 2004.

Antônio Zumpano	zumpano@mat.ufmg.br
Grey Ercole	grey@mat.ufmg.br
Hamilton Bueno	hamilton@mat.ufmg.br

SUMÁRIO

PREFÁCIO	iii
1 TEORIA CLÁSSICA DO SISTEMA MASSA-MOLA	1
1.1 EQUACIONANDO O SISTEMA	1
1.2 AUSÊNCIA DE ATRITO	2
1.3 FORÇA EXTERNA: BATIMENTO E RESSONÂNCIA	3
1.4 AMORTECIMENTO	5
1.4.1 Força Externa	7
1.5 EXERCÍCIOS	8
2 AINDA SOBRE O SISTEMA MASSA-MOLA	9
2.1 RESSONÂNCIA?	9
2.2 SOLUÇÕES PERIÓDICAS	10
2.3 BUSCANDO AJUDA NA TRANSFORMADA DE LAPLACE	11
2.4 PERÍODOS COMENSURÁVEIS	13
2.5 PERÍODOS INCOMENSURÁVEIS	17
2.6 PERÍODO FUNDAMENTAL DA SOLUÇÃO PERIÓDICA	18
2.7 SINTETIZANDO NOSSOS RESULTADOS	20
2.8 EXERCÍCIOS	21
3 SÉRIES DE FOURIER	22
3.1 A CORDA VIBRANTE	22
3.2 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	23
3.3 SÉRIES DE FOURIER	25
3.4 CHEGA DE FORMALISMO!	28
3.4.1 Convergência Quadrática	28
3.4.2 Convergência Uniforme	31
3.4.3 Voltando à Convergência Quadrática	33
3.4.4 Convergência Pontual	36
3.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CORDA VIBRANTE	40
3.6 EXERCÍCIOS	40
4 RESSONÂNCIA HARMÔNICA	42
4.1 PERÍODO FUNDAMENTAL	42
4.2 COLOCANDO MATEMATICAMENTE O PROBLEMA	46

4.3	PERÍODOS INCOMENSURÁVEIS	50
4.4	EXERCÍCIOS	52
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
	ÍNDICE REMISSIVO	54

CAPÍTULO 1

TEORIA CLÁSSICA DO SISTEMA MASSA-MOLA

Para a maioria dos estudantes de matemática, a palavra ressonância evoca recordações do curso de física e, talvez, de um filme sobre a queda da ponte de Tacoma¹. Aqueles com uma memória mais apurada lembrar-se-ão que ressonância é um fenômeno produzido quando a frequência de vibração natural do sistema coincide com a frequência da força externa.

Mas, para muitos, esses termos ficaram guardados num lugar recôndito do cérebro, esquecidos em conjunto com aquelas lições do curso de física. O fato do mesmo assunto ter sido abordado no curso de equações diferenciais não é suficiente para refrescar essas memórias...

Assim, precisamos começar recordando o significado desses termos e, se for possível, superar a aversão de alguns a esse assunto.

1.1 EQUACIONANDO O SISTEMA

Começamos examinando um sistema massa-mola fazendo uma breve recapitulação da teoria apresentada nos textos de física ou mesmo de equações diferenciais. Para isso, mesmo correndo o risco de ferirmos a suscetibilidade de alguns, apresentamos uma dedução da equação diferencial que rege esse sistema. Se você tem horror a essas considerações físicas, apresentamos duas alternativas: tentar seguir as nossas explicações e fazer um esforço sincero para superar esse pavor ou então ir direto para a equação (1.1).

Considere um objeto de massa m , situado no chão (plano) de uma sala e preso a uma parede lateral através de uma mola. Esse objeto é submetido a uma força horizontal externa F . Consideraremos que a força é exercida sobre o objeto de modo que o movimento seja unidimensional e que medimos a posição $x(t)$ desde uma posição de equilíbrio.

¹Existem dúvidas se a queda daquela ponte foi devida a ressonância.

De acordo com a segunda lei de Newton,

$$\frac{d}{dt}(mx') = F_R,$$

em que F_R denota a força resultante de todas aquelas aplicadas ao objeto. As forças atuantes são todas unidimensionais: pela lei de Hooke, a mola exerce uma força $F_m = -kx$ (o sinal negativo é explicado pelo fato dessa força ser restauradora, isto é, atuar de modo a tentar restabelecer a posição de equilíbrio do sistema), em que a constante $k > 0$ depende apenas da mola; consideraremos a existência de atrito proporcional à velocidade, dado por $F_a = -\gamma x'$, em que $\gamma > 0$ é uma constante. O sinal negativo deve-se ao fato dessa força atuar em direção contrária ao movimento. Finalmente, há a força externa F , de modo que a força resultante é $F_R = -\gamma x' - kx + F$. Vamos supor que, no instante $t = 0$, o objeto esteja na posição de equilíbrio (isto é, $x(0) = 0$) e em repouso (ou seja, $x'(0) = 0$). Chegamos assim ao problema

$$mx'' + \gamma x' + kx = F, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (1.1)$$

1.2 AUSÊNCIA DE ATRITO

Consideramos inicialmente um caso particular da equação homogênea associada a (1.1), correspondente à ausência de atrito:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

em que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Supondo que $x(t) = e^{\lambda t}$ seja solução dessa equação, chegamos à equação algébrica $(\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$, cujas soluções λ são dadas por $\lambda = \pm i\omega_0$. (Note que definimos $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para evitarmos que as soluções λ fosse dadas por raízes.) Em virtude da fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, chegamos à base do espaço de soluções: $\{\cos \omega_0 t, \operatorname{sen} \omega_0 t\}$. Assim, a solução geral de (1.2) é dada por $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$, que pode ser reescrita na forma

$$x(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\operatorname{tg} \delta = B/A$, como pode ser facilmente verificado aplicando-se a fórmula $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e comparando com $A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$.

O **período fundamental** de $x(t)$ é o menor real positivo² T tal que, para todo t , $x(t + T) = x(t)$. Uma vez que $x(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$, verificamos que, no caso da equação (1.2), o período fundamental é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

²Note que, assim, uma função constante não tem período fundamental.

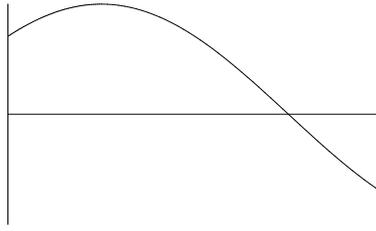


Figura 1.1: A solução geral de (1.2) pode ser escrita na forma $x(t) = R \cos(\omega_0 t + \delta)$ e tem período fundamental $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

De fato, notamos que uma função f e sua translação (ou *shift*) f_a dada por $f_a(t) = f(t - a)$ possuem o mesmo período fundamental. Assim, o período fundamental³ de $x(t)$ é o período fundamental de $R \cos(\omega_0 t)$.

A constante $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é chamada **freqüência natural** do sistema (ou mesmo freqüência *circular*). Ela difere da **freqüência fundamental**, que é definida como o inverso do período fundamental.

1.3 FORÇA EXTERNA: BATIMENTO E RESSONÂNCIA

Consideremos agora que a força externa F seja dada por $F_0 \cos \omega t$. Isso quer dizer que o módulo máximo dessa força é $F_0 > 0$ e que essa força varia com $t \geq 0$ como $\cos \omega t$. Uma solução particular da equação⁴

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (1.3)$$

no caso em que $\omega \neq \omega_0$, pode ser obtida supondo-se $x_p = a \cos \omega t + b \sin \omega t$. (Nos livros de equações diferenciais, esse é o **método dos coeficientes a determinar**. Veja [1].) Levando essa expressão em (1.3), chegamos à equação

$$a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + b(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Como as funções $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ são linearmente independentes (veja a Seção 3.4.1 para elucidar dúvidas sobre o significado dessa frase), obtemos $b = 0$ e

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

³Nem sempre é verdade que a soma de duas funções com período fundamental T tenha esse período fundamental. Considere, por exemplo, as funções $f(t) = \sin t$ e a extensão periódica de período 2π da função g definida por $g(t) = 0$, se $0 \leq t \leq \pi$ e $g(t) = -2\sin t$, se $\pi \leq t \leq 2\pi$. A soma $f + g$ tem período fundamental π , como pode ser facilmente verificado ao considerarmos o gráfico dessa função.

⁴A equação (1.1) no caso de $F = F_0 \cos \omega t$ e $\gamma = 0$ é $mx'' + kx = F_0 \cos \omega t$.

Assim, obtemos a solução geral de (1.3):

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Se as condições iniciais são $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$, obtemos $B = 0$ e $A = -F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$, de modo que a solução de

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

é dada por

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t), \quad (1.4)$$

solução essa que pode ser escrita na forma

$$x(t) = \left(\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

Essa solução $x(t)$ nem sempre é periódica. Ela será periódica dependendo da relação entre ω e ω_0 , como veremos oportunamente. Quando ω está bem próximo de ω_0 , essa solução produz o fenômeno conhecido como **batimento**, representada pelo gráfico

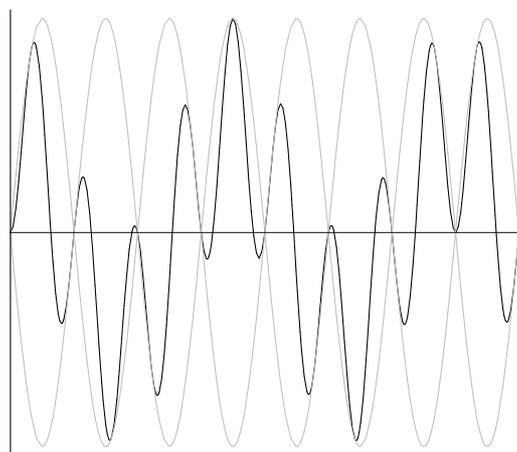


Figura 1.2: No batimento, as soluções nem sempre são periódicas.

Consideremos agora o caso em que $\omega = \omega_0$, quando ocorre o fenômeno de **ressonância**, isto é, a solução $x(t)$ não é limitada. Como $\{\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t\}$ é a base de soluções da equação homogênea associada a (1.2), $\frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$ é uma combinação linear dos elementos dessa base. Assim, qualquer $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ produz um lado esquerdo nulo em (1.3). Uma solução particular dessa equação é obtida ao se considerar

$$x_p(t) = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t). \quad (1.5)$$

Substituindo x_p em (1.3) e resolvendo o sistema resultante, chegamos (de maneira análoga àquela apresentada anteriormente) a $x_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \text{sen}\omega_0 t$. Assim, como a solução geral de (1.3) é dada por

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \text{sen}\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \text{sen}\omega_0 t, \quad (1.6)$$

vemos que, independentemente dos dados iniciais $x(0)$ e $x'(0)$, $|x(t)|$ assume valores arbitrariamente grandes quando $t \rightarrow \infty$. Esse fenômeno é conhecido como ressonância.

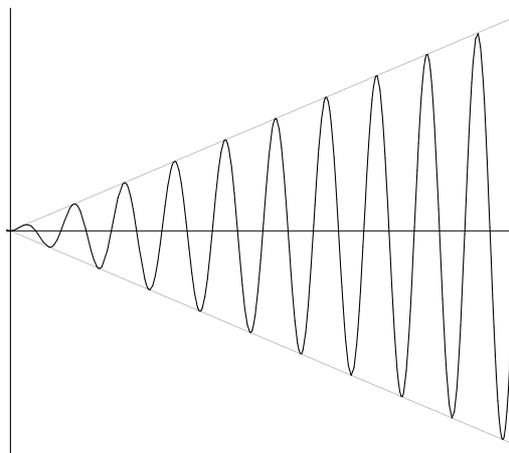


Figura 1.3: Ressonância ocorre quando as soluções tornam-se ilimitadas quanto $t \rightarrow \infty$.

1.4 AMORTECIMENTO

Como antes, uma base de soluções da equação homogênea

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0 \quad (1.7)$$

pode ser encontrada ao se supor que $x(t) = e^{\lambda t}$ seja solução dessa equação. Nesse caso, chegamos à equação $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$, cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}.$$

Se $\gamma^2 - 4mk > 0$, então $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, pois $\sqrt{\gamma^2 - 4mk} < \gamma$. Isso quer dizer que a solução geral de (1.7) é

$$x_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

solução essa que, sem oscilar, tende exponencialmente a zero quando t tende a infinito. O sistema é então chamado de **superamortecido** e sua solução pode cruzar o eixo x no máximo uma vez, dependendo dos dados iniciais. O gráfico desse tipo de solução difere pouco do caso em que o sistema possui uma única raiz real dupla.

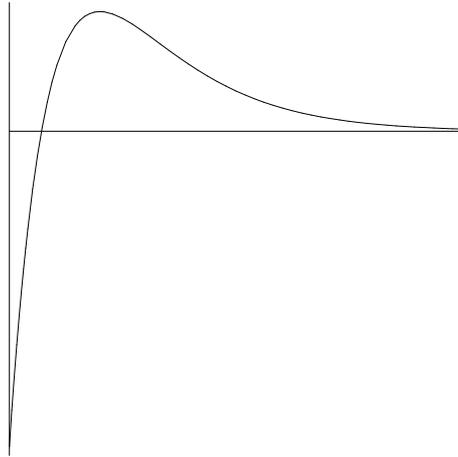


Figura 1.4: A figura mostra o gráfico de $x(t) = 4e^{-2t} - 5e^{-3t}$. No sistema superamortecido, o gráfico pode cruzar o eixo x uma única vez. A constante γ^2 é maior do que $4mk$.

Se $\gamma^2 - 4mk = 0$, então $0 > \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\gamma/2m$ e a solução geral de (1.7), dada por

$$x_h(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t},$$

também tende a zero quando t tende a infinito sem oscilar. O sistema tem **amortecimento crítico** e a solução geral também pode cruzar o eixo x uma única vez.

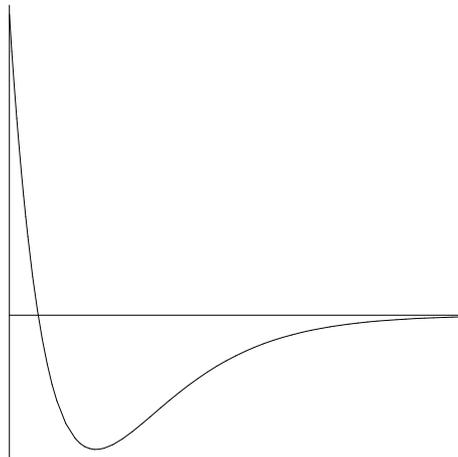


Figura 1.5: A figura mostra o gráfico de $x(t) = e^{-t/2} - te^{-t/2}$. No sistema com amortecimento crítico, o gráfico também pode cruzar o eixo x uma única vez. A constante γ^2 é igual a $4mk$.

As soluções nos casos de um sistema com amortecimento crítico e superamortecido são bastante semelhantes. Note, que no caso de amortecimento crítico, o fator t multiplicando a exponencial negativa retarda o decaimento exponencial. Essa é a principal diferença entre esses dois casos.

Finalmente, se $\gamma^2 - 4mk < 0$, a solução geral é dada por

$$x_h(t) = e^{-\gamma t/(2m)} \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} t \right) \right],$$

que pode ser escrita na forma

$$x_h(t) = R e^{-\gamma t/(2m)} \cos \left(\frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} t - \delta \right),$$

em que $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\text{tg } \delta = B/A$. Assim, o gráfico da solução geral é, a menos de uma mudança de fase δ , dado por uma função cosseno multiplicada por uma exponencial negativa. Em outras palavras, também nesse caso a solução geral $x_h(t)$ tende a zero quanto t tende a infinito exponencialmente com a oscilação. O sistema, neste caso, chama-se **amortecido**.

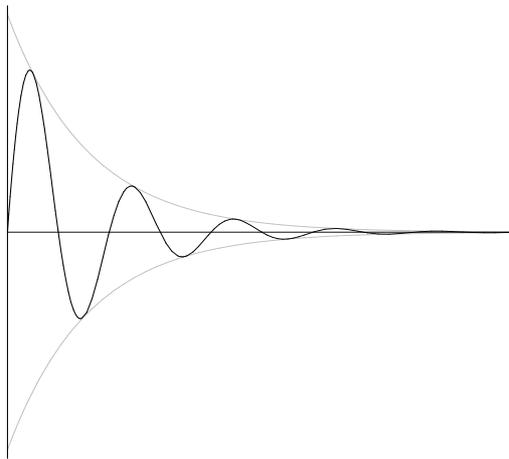


Figura 1.6: No sistema amortecido, a solução oscila em torno do eixo x , tendendo para zero exponencialmente. A constante γ^2 é menor do que $4mk$.

1.4.1 Força Externa

No caso de uma força externa F dada por $F_0 \cos \omega t$, a solução geral de

$$m x'' + \gamma x' + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1.8)$$

é dada por

$$x(t) = x_h + x_p,$$

em que x_p é uma solução particular de (1.8). Após cálculos enfadonhos, chegamos à solução particular

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \beta), \quad (1.9)$$

em que $\operatorname{tg} \beta = \frac{\gamma\omega}{k-m\omega^2}$.

Uma vez que $x_h(t) \rightarrow 0$ quanto $t \rightarrow \infty$, x_h é a **parte transiente** da solução (também chamada **solução transiente**); a solução x_p é periódica (com a mesma periodicidade da força externa) e chamada **parte estacionária** da solução ou **solução estacionária** (ou mesmo **resposta forçada**).

Quando o coeficiente de atrito γ for muito pequeno e ω estiver próximo de ω_0 , verificamos que o denominador em (1.9) torna-se muito pequeno, de forma a produzir soluções de grande amplitude, com efeito semelhante a ressonância.

1.5 EXERCÍCIOS

1. Mostre que, se uma função contínua f satisfizer $f(x+k) = f(x)$ para algum $k > 0$ e não possuir período fundamental, então f é constante.
2. Mostre que, se T for o período fundamental de uma função contínua f e $f(x+k) = f(x)$ para todo x , então k é um múltiplo de T .

CAPÍTULO 2

AINDA SOBRE O SISTEMA MASSA-MOLA

Apresentamos no Capítulo 1 o estudo clássico do sistema massa-mola, tal qual exposto nos livros de física ou de equações diferenciais.

Detendo nossa atenção sobre o sistema sem atrito, surgem algumas questões. Quando cursando a(s) disciplina(s) em que o fenômeno de ressonância foi apresentado, provavelmente não ousamos formulá-las por causa da afobação gerada pela tentativa de dominar o conteúdo dessa(s). Mas agora, com mais calma, elas são absolutamente naturais.

Sendo mais preciso, consideremos o sistema massa-mola

$$x'' + \omega_0^2 x = F, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (2.1)$$

Por exemplo, que tipo de força externa **contínua**¹ F produz soluções periódicas para esse problema? Quando F produz ressonância?

2.1 RESSONÂNCIA?

Como recapitulamos no Capítulo 1, ressonância ocorre quando a frequência natural do sistema é igual à frequência da força externa. Mas será que é mesmo assim?

Consideremos o seguinte exemplo:

$$x'' + x = \cos 2t + \cos 3t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Nesse caso, a frequência natural do sistema é $\omega_0 = 1$, o que nos fornece a solução geral $x(t) = A \cos t + B \sin t$ do problema homogêneo associado. Assim, o período

¹Estamos supondo a continuidade de F para assegurarmos que o problema (2.1) possua solução única!

fundamental da solução geral do sistema homogêneo associado é 2π (se você não se lembra, a definição do período fundamental, bem como a verificação de qual é o período fundamental da solução geral estão nas páginas 2 e 3, respectivamente). Isso quer dizer que a frequência fundamental do sistema homogêneo é $1/(2\pi)$. Como o período fundamental da força externa $\cos 2t + \cos 3t$ é justamente 2π (veja o Exercício 1), sua frequência fundamental também é $1/(2\pi)$, de modo que a solução é ressonante, não é?

Nada mais longe da verdade! Não é difícil verificar que

$$x(t) = \frac{11}{24} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{8} \cos 3t$$

é a solução do problema. Uma solução periódica, muito bem comportada!

2.2 SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Vamos considerar inicialmente as seguintes questões: quais forças externas produzem soluções periódicas? E quais produzem soluções ressonantes?

Para respondê-las, suponhamos que a solução $x(t)$ de (2.1) seja periódica com período fundamental T . Afirmamos que, nesse caso, a força externa deve ter período T .

De fato, como $x(t)$ tem período fundamental T , temos que $x''(t)$ é periódica. Assim, $x'' + \omega_0^2 x$ é uma função periódica com período T . Como $x'' + \omega_0^2 x = F$, temos que $F(t)$ tem período T .

Mas não podemos concluir que T seja o período fundamental de F ! Por exemplo, consideremos o problema

$$x'' + \frac{1}{4}x = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Sua solução é

$$x(t) = \frac{4}{3} \left(\cos \frac{t}{2} - \cos t \right),$$

como se verifica facilmente. O período fundamental dessa solução é $T = 4\pi$, enquanto o período fundamental da força externa é 2π . Assim, a força externa pode ter período fundamental menor do que o período (fundamental) de oscilação da solução do sistema massa-mola.

Conclusão: *Soluções periódicas advêm de forças externas periódicas. Se o período fundamental da força externa F é P , então o período fundamental da solução $x(t)$ é um múltiplo de P , isto é, da forma kP , para algum $k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$.*

Por outro lado, há forças periódicas que não produzem soluções periódicas. Por exemplo, consideremos o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (2.2)$$

A equação (1.4) nos dá sua solução:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (2.3)$$

Afirmção: a solução $x(t)$ é periódica se, e somente se, ω_0/ω for racional.

De fato, se T for um período da solução $x(t)$, então também é um período de $\cos \omega t$. Isso quer dizer que $T = 2n\pi/\omega$ para algum $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Uma vez que $x(0) = 0$, devemos ter $x(T) = 0$ e, portanto, $\cos \omega_0 T = \cos \omega T = 1$. Dessa forma concluímos que $\omega_0 T = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Assim, $2n\pi/\omega = 2k\pi/\omega_0$, o que implica $\omega_0/\omega = k/n$, como afirmado.

Reciprocamente, se ω_0/ω for racional, isto é, se $\omega_0/\omega = k/n$, então $2n\pi/\omega = 2k\pi/\omega_0$. Substituindo em $\cos \omega_0 t - \cos \omega t$, vemos que $P := 2n\pi/\omega = 2k\pi/\omega_0$ é um período. (Veja o Exercício 2.)

Provamos assim o afirmado: a solução (2.3) é periódica se, e somente se, ω_0/ω for racional.

2.3 BUSCANDO AJUDA NA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para analisarmos as soluções periódicas de

$$x'' + \omega_0^2 x = F, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (2.4)$$

buscaremos auxílio na transformada de Laplace.

Denotamos as transformadas de $x(t)$ e $F(t)$ por $\mathcal{L}(x(t)) = \mathfrak{X}(s)$ e $\mathcal{L}(F(t)) = \mathfrak{F}(s)$, respectivamente. As condições iniciais nos garantem que vale a igualdade (veja [1])

$$(s^2 + \omega_0^2)\mathfrak{X}(s) = \mathfrak{F}(s)$$

e, portanto

$$\mathfrak{X}(s) = \frac{\mathfrak{F}(s)}{s^2 + \omega_0^2} =: \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(s). \quad (2.5)$$

Obtemos $x(t)$ ao tomarmos a transformada inversa de Laplace. Uma vez que

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathfrak{G}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}\right) = \frac{1}{\omega_0} \text{sen} \omega_0 t =: g(t)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathfrak{F}\mathfrak{G})(s) = (F * g)(t) = (g * F)(t) = \int_0^t F(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

a transformada inversa do lado direito de (2.5) é dada pela convolução dessas funções (veja [1], seção 6.6 VERIFICAR SEÇÃO), ou seja,

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 \tau) F(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Vamos utilizar nossa experiência com a equação (2.2) para fazermos hipóteses que permitam decidir se a solução (2.6) é periódica.

Suponhamos que a força externa $F(t)$ seja periódica, com período fundamental P . Consideremos $x(t + kP)$. Observe que, **se $x(t)$ for periódica**, então existe $k \in \mathbb{N}^*$ de modo que kP seja o período fundamental de $x(t)$. Mas, mesmo se $x(t)$ não for periódica, temos

$$x(t + kP) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t + kP - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau.$$

Assim, podemos escrever $x(t + kP)$ como

$$\begin{aligned} x(t + kP) &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau + \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se definirmos

$$z(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau, \quad (2.8)$$

concluimos que a igualdade (2.7) garante que, se $x(t)$ for periódica com período kP , então $z(t) \equiv 0$.

Vamos examinar mais atentamente a função $z(t)$. Fazendo a mudança de variável $u = t - \tau$, obtemos

$$z(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-kP}^0 F(u) \text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du. \quad (2.9)$$

Derivando sob o sinal de integração, vemos que $z(t)$ satisfaz a equação

$$z'' + \omega_0^2 z = 0.$$

Assim,

$$z(t) = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t, \quad (2.10)$$

para certas constantes A e B e, se $z(t) \neq 0$, essa função tem período fundamental $2\pi/\omega_0$ (veja a página 3). Em particular, concluímos que $z \equiv 0$ quando tivermos $z(0) = z'(0) = 0$. Observamos também que $z(t)$ corresponde à solução geral do problema homogêneo associado a (2.4).

2.4 PERÍODOS COMENSURÁVEIS

A equação (2.10) sugere interrelacionarmos os períodos de $z(t)$ e $F(t)$. É o que faremos agora. (Esse procedimento corresponde a relacionarmos as frequências da força externa e da solução do sistema homogêneo.)

Vamos analisar com mais detalhe o caso em que as frequências natural do sistema e da força externa são comensuráveis. Em outras palavras (mais modernas), vamos considerar o caso em que

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Para entendermos melhor o significado dessa hipótese, consideremos que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{n}{k}$, com $n, k \in \mathbb{N}^*$. Isso quer dizer que $2n\pi/\omega_0 = kP$, isto é, que um período de $z(t)$ é igual a um período de $F(t)$. (Lembre-se: o período fundamental de $z(t)$ é $2\pi/\omega_0$, enquanto o da força externa é P .)

Afirmção: *Nesse caso, se $z(t) \not\equiv 0$, podemos garantir que a solução $x(t)$ é ressonante.*

De fato, suponhamos que a função z não seja identicamente nula. Isso quer dizer que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $z(t) \neq 0$. Afirmamos que, para $s \in \mathbb{N}$,

$$x(t + skP) = x(t) + sz(t). \quad (2.11)$$

Dessa igualdade decorre imediatamente que $x(t + skP) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$, mostrando que, se $z(t) \neq 0$, a solução $x(t)$ é ressonante.

Para mostrarmos a igualdade (2.11) procedemos por indução: basta notar que, de acordo com (2.9),

$$\begin{aligned} x(t + skP) &= x(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_0^{skP} F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du \\ &= x(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_0^{(s-1)kP} F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \int_{(s-1)kP}^{skP} F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du \\ &= x(t) + (s-1)z(t) + z(t), \end{aligned}$$

pois $skP - (s-1)kP = kP = 2n\pi/\omega_0$ é o período da função $\sin(\omega_0 t - \omega_0 u)$ (com relação à variável u).

Nosso próximo resultado tem maiores implicações.

Afirmção: A solução $x(t)$ de (2.1) satisfaz:

(i) se $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{N}$, então há ressonância **ou** $x(t)$ é periódica;

(ii) se $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, então $x(t)$ é periódica.

A primeira possibilidade é, de certa forma, frustrante. O resultado em (ii) é preciso, enquanto (i) ainda é vago. Vejamos os seguintes exemplos.

Consideremos o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos \omega_0 t + \cos \frac{\omega_0 t}{n}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

A força externa $F(t) = \cos \omega_0 t + \cos \frac{\omega_0 t}{n}$ tem período fundamental $P = \frac{2n\pi}{\omega_0}$, como podemos verificar facilmente. Se $n \neq 1$, a solução do problema é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{n}\right)^2} \left[\cos \frac{\omega_0 t}{n} - \cos \omega_0 t \right].$$

Assim, a solução é ressonante, qualquer que seja o valor de $n \in \{2, 3, \dots\}$. O caso em que $n = 1$ já foi investigado anteriormente e também produz solução ressonante: veja as equações (1.5) e (1.6).

Por outro lado, o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos \frac{\omega_0 t}{n}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

tem força externa $F(t) = \cos \frac{\omega_0 t}{n}$ de período fundamental $\frac{2n\pi}{\omega_0}$, com $n \in \{1, 2, \dots\}$. Se $n > 1$, podemos verificar que a solução não é ressonante.

Passamos a demonstrar nossa afirmação.

Uma vez que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{n}{k}, \quad \text{com} \quad \text{mdc}(n, k) = 1.$$

Observe que essa escolha **determina** n e k . Assim, a função $z(t)$ passa a estar definida com essa especificação de k ; não se trata mais de um k arbitrário, como na seção anterior.

Vamos analisar mais detalhadamente a função $z(t)$. Uma vez que $kP = \frac{2n\pi}{\omega_0}$ corresponde a um período da função $\text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u)$, $z(t)$ pode ser escrito como

$$z(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{kP} F(u) \text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du. \quad (2.12)$$

Obviamente, se $z(t) \equiv 0$, então a solução $x(t)$ é periódica com período kP . Reciprocamente, suponha que $x(t)$ seja periódica com período fundamental T . Vimos que $T = sP$ para algum $s \in \mathbb{N}^*$. Então skP é também um período da solução $x(t)$ e, pela indução que fizemos antes, concluímos que $z(t) \equiv 0$, visto que $x(t + skP) = sz(t) + x(t)$, para todo t . (Veja, nesse ponto, que podemos deduzir daí que s é divisor de k : basta notar que $z(t) \equiv 0$ implica que kP é um período de $x(t)$.)

Assim,

$$x(t) \text{ é periódica} \Leftrightarrow z(t) \equiv 0.$$

Vimos ainda que, se existir t tal que $z(t) \neq 0$, então a solução $x(t)$ não é limitada, isto é, ocorre ressonância. Portanto, toda solução limitada é periódica, o que demonstra, em particular, a afirmação (i).

Para mostramos (ii), analisamos $z(P)$. Temos, de acordo com (2.12),

$$\begin{aligned} z(P) &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{kP} F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 u) du \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^P F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 u) du + \frac{1}{\omega_0} \int_P^{(k+1)P} F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 u) du \\ &\quad - \frac{1}{\omega_0} \int_{kP}^{(k+1)P} F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 u) du. \end{aligned}$$

Se fizermos as mudanças de variável $u = s + P$ na segunda integral e $u = s + kP$ na terceira integral, notamos que

$$\begin{aligned} z(P) &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^P F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 u) du + \frac{1}{\omega_0} \int_0^{kP} F(s) \text{sen}(-\omega_0 s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\omega_0} \int_0^P F(u) \text{sen}(\omega_0 P - \omega_0 s) ds \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{kP} F(u) \text{sen}(-\omega_0 u) du \\ &= z(0). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$z'(t) = \int_0^{kP} F(u) \cos(\omega_0 t - \omega_0 u) du,$$

procedendo analogamente concluímos que

$$z'(P) = z'(0).$$

Em outras palavras, verificamos que $z(t)$ satisfaz o problema de Sturm-Liouville com condições de fronteira periódicas:

$$z'' + \omega_0^2 z = 0, \quad z(0) = z(P), \quad z'(0) = z'(P). \quad (2.13)$$

(Você pode passar direto para a equação (2.14), se você conhece um pouco da teoria dos problemas de Sturm-Liouville periódicos.)

Uma vez que a solução geral da equação $z'' + \omega_0^2 z = 0$ é dada por $z(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, podemos encontrar facilmente a solução de (2.13). De fato, as condições $z(0) = z(P)$ e $z'(P) = z'(0)$ produzem o sistema linear

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 P \\ \sin \omega_0 P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Assim, se existem soluções não-triviais para o problema de Sturm-Liouville, temos $-(A^2 + B^2) \neq 0$. Nesse caso, soluções não-triviais acontecem quando

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_0 P \\ \sin \omega_0 P \end{pmatrix} = \frac{-1}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} -A & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, concluímos que

$$\omega_0 P = 2\ell\pi, \quad (2.14)$$

para algum $\ell \in \mathbb{N}$.

Mas isso mostra que $z(t) \not\equiv 0$ só pode ocorrer quando

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \ell \in \mathbb{N}.$$

Quer dizer, quando $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, temos que $z(t) \equiv 0$ e a solução $x(t)$ é periódica, completando a demonstração.

Como decidir, no caso em que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} = n \in \mathbb{N}^*$ (isto é, o caso $k = 1$ na afirmação que acabamos de provar), se a solução será periódica ou ressonante? Não é difícil: basta analisar $z(0)$ e $z'(0)$. Se ambos valores forem nulos, então $z(t) \equiv 0$ e a solução

será periódica. Caso contrário, a solução será ressonante. Sendo mais explícito, consideremos

$$\int_0^P F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 u) du$$

e

$$\int_0^P F(u) \operatorname{cos}(\omega_0 u) du.$$

Se ambas integrais forem nulas, concluímos que $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0$, o que implica $z(t) \equiv 0$ e que $x(t+P) = x(t)$.

2.5 PERÍODOS INCOMENSURÁVEIS

Mas o que acontece quando

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} ?$$

Nossa resposta para a questão não pode ser demonstrada nesse momento, mas podemos adiantá-la: **as soluções são limitadas, isto é, não ocorre ressonância.** Provaremos esse resultado no Capítulo 4.

Assim, as soluções podem ser periódicas ou não. Vejamos dois exemplos.

Consideremos novamente o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

cujas solução é

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

(Veja a equação (2.2) e, sua solução em (2.3).)

Já vimos também que $x(t)$ é periódica se, e somente se, ω_0/ω for racional. Assim, escolhendo ω e ω_0 de modo que $\omega_0/\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos que a solução $x(t)$ não é periódica.

Por outro lado, consideremos o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + \omega_0^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

em que, como antes, $\omega_0/\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

É fácil verificar que

$$x(t) = 1 - \cos \omega t$$

resolve esse problema. Ou seja, o problema admite solução periódica, com período fundamental igual ao da força externa!

2.6 PERÍODO FUNDAMENTAL DA SOLUÇÃO PERIÓDICA

Continuemos considerando o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = F(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \quad (2.15)$$

Já concluímos que soluções periódicas podem ocorrer tanto no caso em que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, quanto no caso em que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mas qual é o período fundamental dessa solução periódica $x(t)$?

Afirmção: Se $x(t)$ for solução periódica de (2.15) e $\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$, com $\text{mdc}(n, k) = 1$, então o período fundamental T de $x(t)$ satisfaz $T = P$ ou $T = kP$. Se $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $T = P$.

Assim, em particular, no caso de períodos comensuráveis, soluções periódicas quando $k = 1$ sempre têm período fundamental igual ao da força externa. E isso também ocorre no caso de períodos incomensuráveis.

Vamos provar a nossa afirmação. Seguindo a equação (2.7) para $k = 1$, concluímos que, para todo t , vale a igualdade

$$x(t + P) = x(t) + \zeta(t),$$

em que

$$\zeta(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-P}^0 F(u) \text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du$$

tem período fundamental $2\pi/\omega_0$, pois satisfaz à equação $\zeta'' + \omega_0^2 \zeta = 0$ (veja a página 3).

Como estamos supondo que T seja período de $x(t)$, T também é período de $\zeta(t)$. Já vimos também que $T = jP$, uma vez que P é um período de $F(t)$.

Suponhamos que P não seja período de $x(t)$. Então $\zeta(t)$ não é nula. Como T também é um período de $\zeta(t)$, então² $T = \ell(2\pi/\omega_0)$ para algum $\ell \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{\ell}{j} \in \mathbb{Q}$. Isso conclui a demonstração da segunda parte de nossa afirmação, ou seja, se $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $T = P$.

Se, por outro lado, $\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{n}{k}$, com $\text{mdc}(n, k) = 1$ e $T \neq P$, acabamos de mostrar que $\frac{\ell}{j} = \frac{n}{k}$. Daí segue-se que j é múltiplo de k . Ainda, já vimos que $z(t) \equiv 0$ e que, como consequência, kP também é período de $x(t)$, o que força j ser divisor de k . Portanto, $j = k$, concluindo a demonstração de nossa afirmação.

Agora podemos também identificar, no caso

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

²Isso também pode ser concluído pela análise do problema de Sturm-Liouville, visto que $\zeta(0) = \zeta(T)$ e $\zeta'(0) = \zeta'(T)$.

se a solução será periódica ou ressonante. Para isso, basta investigarmos a equação (2.9) no caso em que $k = 1$ (já que soluções periódicas terão período igual ao da força externa). Nesse caso, se a solução for periódica com período P , então $z(t) \equiv 0$. Assim, basta verificarmos se

$$\int_{-P}^0 F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 u) du = 0$$

e

$$\int_{-P}^0 F(u) \cos(\omega_0 u) du = 0,$$

já que essas expressões correspondem a $z(0) = 0$ e $z'(0) = 0$.

Resta, entretanto, uma dúvida: no caso em $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \frac{n}{k}$, com $\operatorname{mdc}(n, k) = 1$, concluímos que os períodos das soluções podem ser P ou kP . Mas essas duas possibilidades realmente ocorrem?

A resposta é afirmativa. Consideremos os seguintes exemplos.

O problema

$$x'' + \omega_0^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t) + \omega_0^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

corresponde à força externa $F(t) = (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t) + \omega_0^2$, que possui período fundamental $P = 2\pi/\omega$. É fácil verificar que $x(t) = 1 - (\cos \omega t)$ é a solução desse problema, solução essa que tem período fundamental $2\pi/\omega$. Portanto, igual ao da força externa.

O problema homogêneo associado tem solução geral dada por $A \cos(\omega_0 t) + B \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, de modo que

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Podemos escolher ω_0 e ω de modo que

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{n}{k}, \quad \text{com } \operatorname{mdc}(n, k) = 1$$

de modo que k assuma qualquer valor!

Como segundo exemplo, consideremos

$$x'' + \omega_0^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Como antes, a força externa tem período fundamental $2\pi/\omega$ e

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\omega}.$$

De acordo com a Afirmação depois da equação (2.3), já vimos que a solução desse problema só é periódica quando $\frac{\omega_0}{\omega} \in \mathbb{Q}$. Suponhamos que esse seja o caso, ou seja, que

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{n}{k}, \quad \text{com } \operatorname{mdc}(n, k) = 1.$$

(Note que podemos fazer isso com liberdade de escolha de n e k .)

Mas a solução do problema é dada por

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t).$$

O período fundamental dessa solução é justamente kP (veja o Exercício 2). Produzimos soluções com período fundamental igual a qualquer múltiplo de P .

2.7 SINTETIZANDO NOSSOS RESULTADOS

Nossa análise foi longa e, talvez, você esteja querendo uma síntese dos resultados que apresentamos. Faremos isso através do

Teorema 2.1 *Soluções periódicas do problema*

$$x'' + \omega_0^2 x = F(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \quad (2.16)$$

advêm de forças externas periódicas. Se o período fundamental da força externa F é P , então o período fundamental da solução $x(t)$ é um múltiplo de P , isto é, da forma sP , para algum $s \in \mathbb{N}^ = \{1, 2, \dots\}$.*

A solução de (2.16) é dada por

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, podemos escrever

$$\begin{aligned} x(t + kP) &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau + \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Definindo

$$z(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_t^{t+kP} \text{sen}(\omega_0 \tau) F(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_0} \int_{-kP}^0 F(u) \text{sen}(\omega_0 t - \omega_0 u) du,$$

vemos que $z(t)$ tem período fundamental $2\pi / \omega_0$.

Consideramos dois casos:

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q} \quad e \quad \frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Se $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, então $x(t)$ é periódica se, e somente se, $z(t) \equiv 0$. Se $z(t) \not\equiv 0$, então a solução é ressonante. Mais precisamente, suponhamos que

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} = \frac{n}{k}, \quad \text{mdc}(k, n) = 1.$$

Então,

(i) se $k = 1$,

$$\int_0^P F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 u) du = 0 \quad (2.17)$$

e

$$\int_0^P F(u) \operatorname{cos}(\omega_0 u) du = 0, \quad (2.18)$$

então a solução é periódica. Por outro lado, se uma dessas integrais não é nula, a solução é ressonante;

(ii) se $k \neq 1$, então a solução é periódica e tem período P ou kP .

Finalmente, as soluções são limitadas se

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Se a solução for periódica, então ela terá período P . Assim, soluções periódicas apenas acontecem quando

$$\int_{-P}^0 F(u) \operatorname{sen}(\omega_0 u) du = 0 \quad (2.19)$$

e

$$\int_{-P}^0 F(u) \operatorname{cos}(\omega_0 u) du = 0, \quad (2.20)$$

pois essas igualdades implicam $z(0) = 0 = z'(0)$.

De todas as afirmações do Teorema, somente não provamos que, no caso

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

as soluções são, necessariamente, limitadas. Isso será feito no Capítulo 4. Finalmente, note que as equações (2.19) e (2.20) não são equivalentes às equações (2.17) e (2.18).

2.8 EXERCÍCIOS

1. Mostre que o período fundamental de $F(t) = \cos 2t + \cos 3t$ é 2π .
2. Considere o problema

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Já vimos que a solução desse problema é periódica se, e somente se, ω/ω_0 for racional. Mostre que, se $\omega/\omega_0 = k/n$, com $\operatorname{mdc}(k, n) = 1$, então $2n\pi/\omega = 2k\pi/\omega_0 =: T$ é o período fundamental da solução.

CAPÍTULO 3

SÉRIES DE FOURIER

3.1 A CORDA VIBRANTE

Em geral, obter soluções de uma equação diferencial parcial é um desafio. Um dos poucos métodos que possui larga aplicabilidade é o de separação de variáveis. Vamos ilustrar a aplicação desse método através do problema da corda vibrante, sem força externa.

O problema consiste na solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Aqui, $u(x, t)$ descreve a posição "vertical" da corda no ponto "horizontal" x e no tempo t . A corda tem comprimento L e suas extremidades (situadas nos pontos 0 e L do eixo horizontal) fixadas na posição vertical nula. Sua posição no instante $t = 0$ é descrita pela função (contínua) $f(x)$ e sua velocidade neste instante é descrita pela função (também contínua) $g(x)$. A constante c depende da densidade linear da corda, bem como da tensão aplicada à mesma.

Não vamos descrever aqui as considerações físicas que levam ao estabelecimento do problema (3.1). Elas podem ser encontradas nas referências [2] e [5]. Apenas enfatizaremos algumas hipóteses que estão sendo utilizadas quando da dedução de (3.1). Em primeiro lugar, a corda é perfeitamente flexível, de modo que nenhum esforço é necessário para dobrá-la. A corda é tão fina que sua seção transversal move-se como um único ponto. Além disso, todo o movimento é transversal ao eixo horizontal x e não existe componente da velocidade nesta direção. Uma boa discussão sobre as hipóteses utilizadas quando da dedução de (3.1) pode ser encontrada em [5].

3.2 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

A equação

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (3.2)$$

é uma das poucas equações diferenciais parciais cuja solução geral pode ser obtida diretamente. Ao invés de escolhermos essa abordagem, utilizaremos o **método de separação de variáveis**, que consiste em supor a existência de uma solução $u(x, t)$ tendo a forma

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

em que $F(x)$ e $G(t)$ são funções reais¹.

Feita essa hipótese, procederemos *formalmente*, isto é, admitiremos que, sob condições adicionais a serem especificadas, todas as passagens matemáticas possam ser justificadas.

Substituindo $u(x, t) = F(x)G(t)$ em (3.2), chegamos à igualdade

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}.$$

Assim, essa igualdade define uma função $\sigma(x, t)$. Fixando a variável x e variando t , vemos que $\sigma(x, t)$ não depende de t . Por outro lado, fixando t e variando x , notamos que σ também não depende de x . Assim, σ é uma constante:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \sigma \in \mathbb{R},$$

de modo que, se o método de separação de variáveis for aplicável, obteremos $u(x, t) = F(x)G(t)$ como solução do par de equações

$$\begin{aligned} F''(x) - \sigma F(x) &= 0, \\ G''(x) - \sigma c^2 G(t) &= 0. \end{aligned}$$

Agora consideramos as condições de fronteira em (3.1). Se a solução $u(x, t) = F(x)G(t)$ satisfaz $u(0, t) = 0 = u(L, t)$, então

$$F(0)G(t) = 0 = F(L)G(t) \quad \text{para todo } t.$$

Se fosse $G(t) \equiv 0$, então $u(x, t) \equiv 0$ e as condições $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ só seriam satisfeitas se $f(x) \equiv 0$ e $g(x) \equiv 0$. Se essas funções não forem nulas, chegamos então ao problema de valor de fronteira

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(L) = 0. \quad (3.3)$$

¹O método também pode ser aplicado com F e G complexas.

Suponhamos que $\sigma > 0$. Nesse caso, a solução geral de $F'' - \sigma F = 0$ é dada por (veja [1]) $F(x) = Ae^{\sqrt{\sigma}x} + Be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Substituindo aí os dados de fronteira $F(0) = 0 = F(L)$, concluímos que $A = B = 0$, o que nos leva novamente à solução identicamente nula. Para $\sigma = 0$, a solução geral de $F''(x) = 0$ é dada por $F(x) = Ax + B$ e os dados $F(0) = 0 = F(L)$ conduzem novamente à solução $u \equiv 0$. Portanto, devemos ter $\sigma < 0$. Chamando então $-\sigma = \lambda^2$, a solução geral de $F'' + \lambda^2 F = 0$ é dada por (veja [1])

$$F(x) = A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x$$

e os dados de fronteira garantem que $A = 0$ e que

$$B \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Como $B = 0$ implica $u \equiv 0$, impomos que $\operatorname{sen} \lambda L = 0$, o que nos mostra que

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\},$$

chamados *autovalores* do problema (3.3). As funções

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \{1, 2, \dots\},$$

são chamadas *autofunções* de (3.3). Note que basta considerarmos $n \in \mathbb{N}^*$, pois valores negativos de n apenas conduzem a autofunções que diferem apenas no sinal daquelas obtidas para n positivo. (Observe que a nomenclatura empregada sugere que estamos num contexto de Álgebra Linear.)

Uma vez que $-\sigma = \lambda^2 \in \mathbb{R}$, as soluções do problema

$$G'' - \sigma c^2 G = 0$$

são dadas por

$$G_n = A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L}.$$

Note que, para cada escolha de $n \in \mathbb{N}^*$, as constantes A_n e B_n podem ser escolhidas arbitrariamente. Multiplicando as funções F_n e G_n , chegamos a

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x, t)$ resolve o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & 0, \\ u(0, t) & = & u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Além disso, somas (finitas) de múltiplos das funções u_n (para valores distintos de n) continuam resolvendo o mesmo problema. (Esse é o **Princípio da Superposição**.) Mas a substituição $t = 0$ em qualquer de tais somas finitas de funções u_n determina valores para $f(x)$ e $g(x)$ (verifique!).

Como superar essa limitação?

Essa é uma daquelas situações na matemática em que, para resolver um problema, criamos outros. Aliás, diversos outros. É o que mostraremos na próxima seção.

3.3 SÉRIES DE FOURIER

Continuando com nosso procedimento formal, vamos considerar, ao invés de somas finitas de soluções u_n , uma série de soluções

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right). \quad (3.5)$$

Uma primeira dúvida impõe-se: se somas finitas de soluções u_n continuam resolvendo (3.4), o mesmo acontece com (3.5)? Isso não é óbvio. Na verdade, nem mesmo podemos garantir que a função $u(x, t)$ esteja bem definida, isto é, que a série convirja. Mas, para sermos sinceros, muitas outras passagens feitas formalmente também não eram óbvias, e isso não nos impediu de fazê-las. Sendo assim...

A substituição de $t = 0$ em (3.5) nos mostra então que a função f deve satisfazer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.6)$$

Se for possível a derivação termo a termo em (3.5) (ah, mais uma hipótese...), então a função g deve satisfazer

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{L} \right) B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.7)$$

A nossa aposta é que, para funções f e g suficientemente gerais, possamos determinar os coeficientes A_n e B_n e também justificar todas as passagens feitas formalmente.

Ao invés de determinarmos os coeficientes A_n e B_n nas expressões (3.6) e (3.7), passaremos a uma situação um pouco mais geral e mostraremos como os coeficientes podem ser encontrados. Para isso, suponhamos que uma função $H(x)$ possa ser representada na forma

$$H(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.8)$$

(Se você está curioso para saber porquê o coeficiente a_0 aparece dividido por 2, veja a seqüência.)

Uma primeira observação, antes de prosseguirmos. O lado direito da igualdade (3.8) tem período $2L$ (note que não estamos dizendo que esse é o período fundamental daquela série) e está definido para todo x . Assim, é natural considerarmos que a função H esteja definida para todo x e tenha período $2L$. Dito de outra forma: suponhamos que H esteja definida num intervalo de comprimento $2L$; estendemos então H ao conjunto \mathbb{R} , de modo que H tenha período $2L$ (de novo, não se trata do período fundamental de H).

Vamos continuar agindo formalmente, quer dizer, vamos pensar que nossas operações matemáticas possam ser justificadas. Integrando de $-L$ a L , obtemos

$$\int_{-L}^L H(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Se a integração da série for possível como integração termo a termo (convergência uniforme possibilita isto!) então, como as funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$ têm período $2L$, vem

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L H(x)dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x)dx. \quad (3.9)$$

Para obtermos os demais coeficientes, fazemos uso das *relações de ortogonalidade*:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} &= 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L, & m = n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n. \end{cases} \\ \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} &= \begin{cases} L, & m = n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Essas relações podem ser obtidas facilmente calculando as integrais envolvidas, mas o sentido da palavra *ortogonalidade* só será esclarecido posteriormente. Essas relações podem ser obtidas segundo uma outra abordagem, muito mais simples e elegante, que utiliza funções complexas. Veja, por exemplo, [3].)

Agora, multiplicando a igualdade (3.8) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$ e então integrando termo a termo, obtemos os coeficientes de Fourier:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m \in \mathbb{N}^*; \quad (3.11)$$

por outro lado, multiplicando por $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integrando termo a termo, vem

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m \in \mathbb{N}^*. \quad (3.12)$$

Ah, agora justificamos a divisão de a_0 por 2. Fazemos assim por mera questão estética, para que as expressões dos coeficientes sejam todas semelhantes... Aqui cabe uma observação: a forma dos coeficientes a_n e b_n implica a unicidade da série de Fourier de uma função f , desde que a série possa ser integrada termo a termo. Isso é válido, por exemplo, se a função f for contínua por partes. Veja, a esse respeito, o Exercício 7 e a Seção 3.4.1.

Tudo isto está muito bom, mas uma dúvida simples ainda não foi resolvida: as séries aqui apresentadas dependem de senos e cossenos; por outro lado, as séries em (3.6) e (3.7) dependem apenas de senos. Qual o significado disso?

Uma simples verificação das igualdades (3.6) e (3.7) mostra que o lado direito de cada uma dessas expressões define (supondo sempre que a série convirja!) uma função ímpar. Assim, as funções f e g daquelas igualdades devem ser funções ímpares! Como f e g só são dadas no intervalo $[0, L]$, isso quer dizer que elas foram estendidas ao intervalo $[-L, L]$ de modo a tornarem-se funções ímpares.

O que podemos dizer sobre séries de Fourier de funções pares e ímpares? É o que vamos responder agora.

Não é difícil verificar que o produto de duas funções pares é uma função par; que o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar; e que o produto de duas funções ímpares é uma função par. (Isso não parece com a multiplicação no conjunto $\{-1, 1\}$?)

Além disso, a integração de uma função ímpar sobre $[-L, L]$ (ou, mais geralmente, sobre qualquer intervalo de comprimento $2L$) é sempre nula, enquanto a integração de uma função par sobre $[-L, L]$ (ou, mais geralmente, sobre qualquer intervalo de comprimento $2L$) é igual a duas vezes o valor de sua integração sobre $[0, L]$.

Consequentemente, se H for uma função par, teremos $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L H(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

e, se H for uma função ímpar, então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L H(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

3.4 CHEGA DE FORMALISMO!

Não é de *bom tom* que nós, matemáticos, sejamos apenas formais. Matemáticos gostam de provas, de resultados bem fundamentados. Mesmo que, desde Gödel, saibamos que não há como fundamentar os postulados que utilizamos: um pouco de idiosincrasia (ou cinismo?) é sempre permitido.

Assim, passemos às definições e aos teoremas. Os resultados desta Seção estão expostos em diversos livros (veja [2]-[5]) e sua inclusão nesse texto foi feita apenas para comodidade do leitor.

Com os coeficientes dados em (3.9), (3.11) e (3.12), a série no lado direito da igualdade (3.8) é chamada **série de Fourier** da função H . Nem sempre a igualdade (3.8) é válida, mesmo se a função H for contínua.

Note que o lado esquerdo da igualdade (3.8) define uma função com período $2L$. Assim, H deve ser uma função periódica, com período $2L$. Portanto, ao investigarmos a igualdade (3.8), basta considerarmos funções periódicas com período $2L$.

3.4.1 Convergência Quadrática

Ao estudarmos a convergência de séries de Fourier, começaremos pela noção de convergência quadrática, por causa de seu forte apelo geométrico. A nossa exposição pressupõe que o leitor conheça alguns resultados básicos da Álgebra Linear. Esses podem ser encontrados em qualquer livro sobre o assunto.

Seja H uma função com período $2L$. A função $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua por partes** (ou seccionalmente contínua) se ela possuir um número finito de descontinuidades em $[-L, L]$, todas elas de primeira espécie (isto é, os limites laterais à direita $H(x^+)$ e à esquerda $H(x^-)$ existem em todos os pontos x). Denotaremos por $CP([-L, L])$ o conjunto de todas as funções contínuas por partes. É fácil verificar que $CP([-L, L])$ é um espaço vetorial. **Identificaremos cada uma das funções em $CP([-L, L])$ com sua extensão periódica de período $2L$.** Note que, se \tilde{H} é essa extensão de $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, temos $\tilde{H}(L^-) = H(L)$ e $\tilde{H}(L^+) = H(-L)$, por exemplo. Ao considerarmos uma função em $CP([-L, L])$, estaremos pensando sempre nessa extensão.

Denotaremos por $C([-L, L]) \subset CP([-L, L])$ o subespaço de todas as funções $H \in CP([-L, L])$ tais que $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua**. Em termos da extensão periódica feita acima, isso quer dizer que uma função contínua $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ não necessariamente origina uma extensão periódica contínua! Mais precisamente, a extensão periódica de $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $H(-L) = H(L)$.

Se denotarmos

$$\langle H, G \rangle = \int_{-L}^L H(x)G(x)dx, \quad (3.13)$$

não é difícil verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um **produto interno** no espaço vetorial (de dimensão infinita) $C([-L, L])$.

Todos os espaços com produto interno satisfazem a **desigualdade de Cauchy-Schwarz** que, no nosso contexto, garante que

$$\int_{-L}^L H(x)G(x)dx \leq \left(\int_{-L}^L [H(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-L}^L [G(x)]^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Como conseqüência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos facilmente que

$$\|H\| = \langle H, H \rangle^{1/2} = \left(\int_{-L}^L [H(x)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

é uma **norma** no espaço $C([-L, L])$. Chamaremos essa norma de **norma quadrática**.

Nesse contexto, as relações de ortogonalidade (3.10) significam que o conjunto

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$$

é um conjunto ortogonal e, portanto, linearmente independente.

Agora consideremos uma questão geométrica. Denotemos por

$$s_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^N \left(A_k \cos \frac{k\pi x}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

com $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ quaisquer. Chamaremos s_N de **polinômio trigonométrico** de ordem N com coeficientes A_k, B_k .

Assim s_N denota um elemento arbitrário do espaço vetorial gerado pelas funções $1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{N\pi x}{L}, \sin \frac{N\pi x}{L}$. Consideremos $H \in C([-L, L])$. Qual é o polinômio trigonométrico que melhor aproxima H na norma quadrática? Mais precisamente, para que coeficientes temos que a norma quadrática $\|H - s_N\|$ é mínima?

A resposta é simples: a função $(H - s_N)$ é perpendicular a s_N se, e somente se, $A_0 = a_0/2, A_k = a_k, B_k = b_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), em que a_k, b_k são os coeficientes de Fourier de H . Para verificar esse fato, basta mostrar que, nesse caso, $(H - s_N)$ é ortogonal a cada uma das funções do conjunto $\{1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{N\pi x}{L}, \sin \frac{N\pi x}{L}\}$. (Veja o Exercício 4.)

Se a_k, b_k são os coeficientes de Fourier de H , denotamos

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$$

a soma parcial de ordem N da série de Fourier de H .

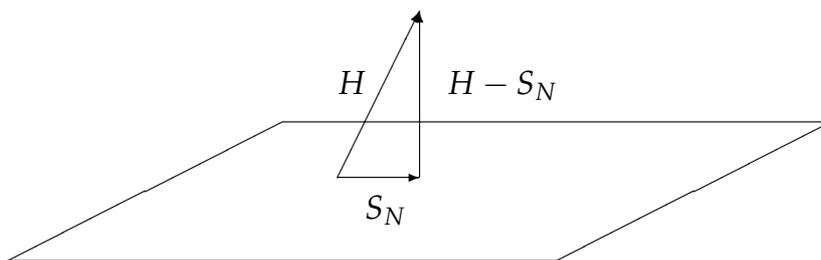


Figura 3.1: A melhor aproximação de H no espaço gerado pelas funções $1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{N\pi x}{L}, \sin \frac{N\pi x}{L}$ é S_N , soma parcial de ordem N da série de Fourier de H .

As relações de ortogonalidade implicam que

$$\|S_N\|^2 = \langle S_N, S_N \rangle = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right). \quad (3.16)$$

Assim, decorre do teorema de Pitágoras (veja o Exercício 3) que

$$\|S_N\|^2 = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \|H\|^2 = \int_{-L}^L [H(x)]^2 dx$$

para todo $N \in \mathbb{N}^*$. Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$, obtemos a **desigualdade de Bessel** :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L [H(x)]^2 dx.$$

Dizemos que S_N converge a H na norma quadrática, em símbolos, $S_N \rightarrow H$ em L^2 , se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - H\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-L}^L |H(x) - S_N(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

Como o teorema de Pitágoras garante que

$$\|H - S_N\|^2 = \|H\|^2 - \|S_N\|^2,$$

passando ao limite quando $N \rightarrow \infty$, concluímos que

$$S_N \rightarrow H \text{ em } L^2 \Leftrightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L [H(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

A igualdade do lado direito da última expressão é conhecida como **identidade de Parseval**.

Nesse ponto, podemos concluir a validade da identidade de Parseval mostrando que toda função $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ com $H(-L) = H(L)$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico. Mais precisamente, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio trigonométrico P_ϵ tal que $\sup_{t \in [-L, L]} |H(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon$. (Em vários textos, funções contínuas como acima são descritas como funções definidas no círculo S^1 .) Como essas funções são (claramente) densas no espaço $C([-L, L])$ com a norma quadrática, concluímos daí o afirmado. (Para esse procedimento, veja, por exemplo, [4]. Uma abordagem mais precisa, que constitui uma variação sobre esse método, pode ser encontrada em [2] e [3].)

Concluiremos a validade da identidade de Parseval na próxima Subseção. Contudo, é importante ressaltar um fato: todo o desenvolvimento que aqui fizemos continua sendo válido para funções em $CP([-L, L])$. Assim, se $H \in CP([-L, L])$, vale

$$S_N \rightarrow H \text{ em } L^2 \Leftrightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L [H(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

No texto, não abordamos diretamente funções em $CP([-L, L])$ porque, nesse caso, a equação (3.13) não define um produto interno nesse espaço, já que $\langle H, H \rangle$ pode ser nulo mesmo quando $H \neq 0$; em conseqüência, (3.15) não define uma norma. Existem duas maneiras desse impasse ser contornado. A primeira consiste em notar que a desigualdade de Cauchy-Schwarz e demais propriedades utilizadas no desenvolvimento do texto só dependem de propriedades satisfeitas por (3.13). Esse método está proposto nos exercícios deste Capítulo. A segunda abordagem é utilizada em textos mais avançados e consiste em identificar funções em $CP([-L, L])$ que sejam iguais em quase todos os pontos (isto é, a menos de um conjunto de medida nula). Esse é o procedimento usado ao se definir o espaço $L^2([a, b])$, presente nos cursos de medida e integração.

Encerramos esta Subseção com um comentário a respeito da identidade de Parseval: o espaço gerado pelo conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{L}, \sin \frac{k\pi x}{L}, \dots \right\}$$

é formado por combinações lineares (finitas!) dos elementos de \mathcal{B} . Assim, a identidade de Parseval tem a seguinte interpretação geométrica: ela nos garante que toda função $H \in CP([-L, L])$ está no **fecho** do espaço gerado por \mathcal{B} . Observe também que não normalizamos os elementos de \mathcal{B} , isto é, aqueles elementos não são unitários.

3.4.2 Convergência Uniforme

A convergência pontual da série de Fourier dá significado às igualdades (3.6) e (3.7). Mas, a obtenção de (3.7) foi feita assumindo que a série de Fourier da (pretensa) solução $u(x, t)$ (isto é, a equação (3.5)) pudesse ser derivada termo a termo. Em geral, isso só é possível mediante hipóteses de convergência uniforme...

Iniciamos com uma observação que une os resultados desta Subseção com aqueles da Subseção anterior: se $S_N \rightarrow S$ uniformemente, então $S_N \rightarrow S$ em L^2 . De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2L}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

para todo $N \geq N_0$. Então, para tais $N \in \mathbb{N}^*$, vale

$$\|S_N - S\| = \left(\int_{-L}^L [S_N(x) - S(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-L}^L \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{2L}} \right]^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{\epsilon^2}{2L} \int_{-L}^L dx \right)^{1/2} = \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - S\| = 0,$$

como queríamos mostrar.

Como o limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas é uma função contínua, a convergência uniforme da série de Fourier de H exige que a função H seja contínua. Mais do que isso, como S_N é contínua em qualquer intervalo aberto contendo $[-L, L]$, devemos ter que $H(-L) = H(L)$.

Agora fazemos outra observação de caráter introdutório: se H for uma função tal que $H' \in CP([-L, L])$, então a série de Fourier de H' é obtida mediante derivação termo a termo da série de Fourier de H . Este é um resultado notável, pois não estamos assumindo convergência uniforme!

Para verificá-lo, denotemos por a_n e b_n os coeficientes de Fourier de H e a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de H' . Integração por partes nos permite relacionar esses coeficientes: se $n \in \mathbb{N}^*$, vale

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{LH(x)}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{LH'(x)}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] = -\frac{L}{n\pi} b'_n. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n.$$

Quer dizer,

$$H = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \Rightarrow \quad H' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi b_n}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi a_n}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

(Note que a hipótese $H' \in CP([-L, L])$ foi usada para garantir a validade da integração por partes.)

Como consequência da relação entre os coeficientes de H e H' , temos:

Afirmção: Seja $H \in C([-L, L])$ com $H(-L) = H(L)$. Suponhamos que $H' \in CP([-L, L])$. Então $S_N \rightarrow H$ uniformemente, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$N \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{t \in [-L, L]} |H(x) - S_N(x)| < \epsilon.$$

A prova de nossa afirmação agora não é difícil:

$$\begin{aligned} |S_N(x) - S_M(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^M a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \sum_{n=N+1}^M \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^M \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \sum_{n=N+1}^M \sqrt{\left(\frac{L}{n\pi} b'_n\right)^2 + \left(\frac{L}{n\pi} a'_n\right)^2} \\ &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} \sqrt{(b'_n)^2 + (a'_n)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz no \mathbb{R}^n , vem que

$$\begin{aligned} |S_N(x) - S_M(x)| &\leq \frac{L}{\pi} \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} \sqrt{(b'_n)^2 + (a'_n)^2} \\ &\leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N+1}^M \left[\sqrt{(b'_n)^2 + (a'_n)^2} \right]^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{L}{\pi} \left(\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N+1}^M (b'_n)^2 + (a'_n)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Uma vez que a desigualdade de Bessel garante que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (b'_n)^2 + (a'_n)^2$ é limitada e uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ é convergente, concluímos que a seqüência S_N é uniformemente de Cauchy. Assim, S_N converge uniformemente para uma função S .

Afirmamos que $S = H$, fato que mostraremos na Subseção 3.4.4, quando estudarmos a convergência pontual da série de Fourier. Com esse resultado, concluímos a prova de nossa afirmação.

A convergência uniforme da série de Fourier pode ser provada sob condições um pouco mais gerais: veja [2], p. 69.

3.4.3 Voltando à Convergência Quadrática

Como já mostramos que a convergência uniforme $S_N \rightarrow H$ implica a convergência quadrática $S_N \rightarrow H$ em L^2 , a identidade de Parseval está verificada no caso em que

$H(-L) = H(L)$ e $H' \in CP([-L, L])$. Agora vamos mostrar que essas hipóteses podem ser suprimidas.

Afirmção: Sejam $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe uma função contínua $H_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (i) $H_\epsilon(a) = \alpha$ e $H_\epsilon(b) = \beta$;
- (ii) $H'_\epsilon \in CP[a, b]$;
- (iii) $\|H - H_\epsilon\| < \epsilon$.

Para mostrarmos nossa afirmação, começamos relembrando que uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado é uniformemente contínua nesse intervalo. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |H(x) - H(y)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2(b-a)}}.$$

Se necessário, escolhamos um valor menor para δ , de modo que também seja satisfeita a desigualdade

$$8K^2\delta < \frac{\epsilon^2}{2},$$

em que

$$K = \max \left\{ \max_{x \in [a, b]} |H(x)|, |\alpha|, |\beta| \right\}.$$

Consideremos, então, $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, tal que $x_j - x_{j-1} < \delta$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Seja H_ϵ a função cujo gráfico é a linha poligonal que passa pelos pontos (a, α) , $(x_j, H(x_j))$ (para $j = 1, 2, \dots, n-1$) e pelo ponto (b, β) .

É claro que H_ϵ é contínua, $H_\epsilon(a) = \alpha$, $H_\epsilon(b) = \beta$ e $H'_\epsilon \in CP[a, b]$. Além disso, para todo $j \in \{2, \dots, n-1\}$, H_ϵ restrita a cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ assume todos os valores entre $H(x_{j-1})$ e $H(x_j)$. Logo, para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, temos

$$H(x) - H(x_j) \leq H(x) - H_\epsilon(x) \leq H(x) - H(x_{j-1})$$

ou

$$H(x) - H(x_{j-1}) \leq H(x) - H_\epsilon(x) \leq H(x) - H(x_j),$$

conforme seja $H(x_j) \leq H(x_{j-1})$ ou $H(x_j) \geq H(x_{j-1})$. (Observe que, se $H(x_j) < H(x_{j-1})$, então $H(x_j)$ e $H(x_{j-1})$ são, respectivamente, o mínimo e o máximo de H_ϵ no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.)

Portanto, se $x \in [x_{j-1}, x_j]$ para $j \in \{2, \dots, n-1\}$, então

$$|H(x) - H_\epsilon(x)| \leq \max \{|H(x) - H(x_{j-1})|, |H(x) - H(x_j)|\} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2(b-a)}}.$$

Por sua vez, se $x \in [a, x_1] \cup [x_{n-1}, b]$, então $|H(x) - H_\epsilon(x)| \leq 2K$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|H - H_\epsilon\|^2 &= \sum_{j=2}^{j=n-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [H(x) - H_\epsilon(x)]^2 dx + \int_a^{x_1} [H(x) - H_\epsilon(x)]^2 dx \\ &\quad + \int_{x_{n-1}}^b [H(x) - H_\epsilon(x)]^2 dx \\ &\leq \left[\sum_{j=2}^{j=n-1} \frac{\epsilon^2}{2(b-a)} (x_j - x_{j-1}) \right] + 4K^2[(x_1 - a) + (b - x_{n-1})] \\ &= \frac{\epsilon^2}{2(b-a)} (x_{n-1} - x_1) + (4K)^2 \delta \leq \frac{\epsilon^2}{2} + 8K^2 \delta < \epsilon^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|H - H_\epsilon\| < \epsilon,$$

como queríamos mostrar.

Agora estamos em condições de mostrar que a identidade de Parseval é válida para todas as funções $H \in C([-L, L])$.

Como sabemos, se S_N denota a soma parcial de ordem N da série de Fourier de H , a identidade de Parseval é válida se verificarmos que $S_N \rightarrow H$ em L^2 .

Dado $\epsilon > 0$, tome H_ϵ contínua em $[-L, L]$ tal que $H_\epsilon(-L) = H_\epsilon(L)$, $H'_\epsilon \in CP[-L, L]$ e $\|H - H_\epsilon\| < \frac{\epsilon}{2}$. (Note que o valor $H_\epsilon(L)$ pode ser escolhido arbitrariamente!)

Seja $\tilde{S}_N(x)$ a soma parcial de ordem N da série de Fourier da função H_ϵ . Do teorema sobre convergência uniforme sabemos que \tilde{S}_N converge uniformemente para H_ϵ no intervalo $[-L, L]$ e que, conseqüentemente, \tilde{S}_N converge em média quadrática para H_ϵ neste intervalo. Assim, existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$N \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{S}_N - H_\epsilon\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, sabemos que \tilde{S}_N é uma combinação linear das funções do conjunto $\{1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{N\pi x}{L}, \sin \frac{N\pi x}{L}\}$, enquanto S_N é a melhor aproximação de H (na norma quadrática) no espaço gerado por essas funções. Logo, temos que

$$\|S_N - H\| \leq \|\tilde{S}_N - H\|.$$

Portanto, se $N \geq N_0$, então

$$\|S_N - H\| \leq \|\tilde{S}_N - H\| \leq \|\tilde{S}_N - H_\epsilon\| + \|H_\epsilon - H\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Concluimos que S_N converge em média quadrática para H , o que é equivalente a Identidade de Parseval para H .

Temos também como concluir que a igualdade de Parseval é verdadeira para qualquer função $H \in CP([-L, L])$. Isto decorre da demonstração acima e do Exercício 8.

Ressaltamos, entretanto, que uma suposição importante foi feita no desenvolvimento acima: de acordo com a demonstração da convergência uniforme da seqüência S_N , sabemos que existe uma função contínua S tal que $S_N \rightarrow S$ uniformemente. Daí podemos concluir que $S_N \rightarrow S$ em L^2 . Mas, não sabemos ainda caracterizar a função S ! Isso será feito na próxima Subseção, quando mostraremos que $S = H$.

3.4.4 Convergência Pontual

Seja (como antes!) S_N a soma parcial de ordem N da série de Fourier de H . Vamos obter uma expressão alternativa para S_N .

Substituindo as expressões dos coeficientes de Fourier a_n e b_n na expressão de $S_N(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L H(y) dy + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) \cos \frac{n\pi y}{L} dy \cos \frac{n\pi x}{L} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} dy \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\cos \frac{n\pi y}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi(y-x)}{L} \right] dy \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) D_N(y-x) dy \quad (3.17)$$

em que

$$D_N(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi \xi}{L} \quad (3.18)$$

é o **Núcleo de Dirichlet**.

A função D_N possui propriedades interessantes: para cada $N \in \mathbb{N}^*$, ela é contínua, par, periódica de período $2L$ e

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_N(\xi) d\xi = 1.$$

As primeiras propriedades são imediatas. Quanto à última,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L D_N(\xi) d\xi &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos \frac{n\pi\xi}{L} \right) d\xi \\ &= \frac{2}{L} \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \Big|_0^L \right] = 1 \end{aligned}$$

Agora vamos obter uma expressão alternativa para o núcleo de Dirichlet.

Afirmção: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2N+1}{2} \theta \right)}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}. \quad (3.19)$$

Para mostrarmos nossa afirmação, começamos considerando o caso em que $\operatorname{sen}(\theta/2) \neq 0$, ou seja, $\theta \neq 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $a = \theta/2$ e $b = n\theta$ na identidade trigonométrica

$$2\operatorname{sen}a \cos b = \operatorname{sen}(b+a) - \operatorname{sen}(b-a),$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(\theta/2) \cos(n\theta) &= \operatorname{sen}(n\theta + \theta/2) - \operatorname{sen}(n\theta - \theta/2) \\ &= \operatorname{sen}(n\theta + \theta/2) - \operatorname{sen}((n-1)\theta + \theta/2) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(\theta/2) \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) &= \sum_{n=1}^N [\operatorname{sen}(n\theta + \theta/2) - \operatorname{sen}((n-1)\theta + \theta/2)] \\ &= \operatorname{sen}(N\theta + \theta/2) - \operatorname{sen}(\theta/2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{sen}(\theta/2) + 2\operatorname{sen}(\theta/2) \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) = \operatorname{sen}(N\theta + \theta/2).$$

Dividindo essa última igualdade por $2\operatorname{sen}(\theta/2)$, obtemos (3.19).

Vamos agora tratar o caso em que $\theta_0 = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, temos $\cos(n\theta_0) = 1$ e o lado esquerdo de (3.19) fica igual a $\frac{1}{2} + N$. O lado direito de (3.19), por

sua vez, pode ser calculado ao se considerar o limite quando $\theta \rightarrow \theta_0$. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2N+1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}(\theta/2)} &= \left(\frac{2N+1}{2}\right) \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\cos\left(\frac{2N+1}{2}\theta\right)}{\cos(\theta/2)} \\ &= \left(\frac{2N+1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{2N+1}{2}\theta_0\right)}{\cos(\theta_0/2)} \\ &= \left(\frac{2N+1}{2}\right) \frac{\cos((2N+1)k\pi)}{\cos(k\pi)} \\ &= \frac{2N+1}{2} = \frac{1}{2} + N. \end{aligned}$$

Decorre imediatamente de nossa afirmação que o núcleo de Dirichlet tem a seguinte expressão alternativa:

$$D_N(\xi) = \frac{\operatorname{sen}\left((2N+1)\frac{\pi}{2L}\xi\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}\xi\right)} \quad (3.20)$$

Agora estamos em condições de obter nosso resultado principal desta Subseção.

Afirmção: Seja $H \in CP([-L, L])$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{H(x^+) + H(x^-)}{2}$$

em cada ponto x em que existem as derivadas laterais $H'(x^+)$ e $H'(x^-)$.

Vejam: da expressão de S_N em termos do núcleo (3.17) e do fato de que H e D_N têm período $2L$ decorre que

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(y) D_N(y-x) dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L-x}^{L-x} H(\xi+x) D_N(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(\xi+x) D_N(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x+\xi) D_N(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^L H(x+\xi) D_N(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que, se existe o limite lateral $H'(x^-)$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x+\xi) D_N(\xi) d\xi = \frac{H(x^-)}{2}.$$

De fato, temos

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x + \xi) D_N(\xi) d\xi = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [H(x + \xi) - H(x^-)] D_N(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x^-) D_N(\xi) d\xi$$

e, como

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x^-) D_N(\xi) d\xi = H(x^-) \frac{1}{L} \int_{-L}^0 D_N(\xi) d\xi = \frac{H(x^-)}{2},$$

basta mostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [H(x + \xi) - H(x^-)] D_N(\xi) d\xi = 0. \quad (3.21)$$

Para o cálculo desse limite, usaremos a expressão alternativa de D_N . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [H(x + \xi) - H(x^-)] D_N(\xi) d\xi &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [H(x + \xi) - H(x^-)] \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi(2N+1)}{2L} \xi \right)}{2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{2L} \xi \right)} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 v(\eta) \text{sen}((2N+1)\eta) d\eta \end{aligned}$$

em que

$$v(\eta) = \frac{H(x + \frac{2L}{\pi}\eta) - H(x^-)}{2 \text{sen} \eta}.$$

Basta, então, verificar que $v \in CP[-\frac{\pi}{2}, 0]$. De fato, uma vez feita essa verificação, o Exercício 6 garante que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^0 v(\eta) \text{sen}((2N+1)\eta) d\eta = 0,$$

que é a igualdade (3.21).

Claramente temos que $v \in CP[-\frac{\pi}{2}, 0]$. Portanto, para que tenhamos $v \in CP[-\frac{\pi}{2}, 0]$, devemos mostrar que o limite lateral $v(0^-)$ é finito. A verificação desse fato é imediata e decorre da existência de $H'(x^-)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^-} v(\eta) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{H(x + \frac{2L}{\pi}\eta) - H(x^-)}{\frac{2L}{\pi}\eta} \frac{\frac{2L}{\pi}\eta}{2 \text{sen} \eta} \\ &= H'(x^-) \frac{L}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{\eta}{\text{sen}(\eta)} = H'(x^-) \frac{L}{\pi}. \end{aligned}$$

De modo análogo, provamos que a existência de $H'(x^+)$ leva a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L H(x + \xi) D_N(\xi) d\xi = \frac{f(x^+)}{2}.$$

Concluimos que, se $H \in CP[-L, L]$ e, se os limites laterais $H'(x^-)$ e $H'(x^+)$ existem, então

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^0 H(x + \xi) D_N(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^L H(x + \xi) D_N(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{H(x^-)}{2} + \frac{H(x^+)}{2} = \frac{H(x^+) + H(x^-)}{2}, \end{aligned}$$

que é justamente nossa afirmação.

O nosso último resultado é conhecido como **Teorema de Fourier**.

Desse resultado decorre imediatamente que $S_N(x) \rightarrow H(x)$ no caso em que a função $H : [-L, L]$ é contínua. Isso completa a demonstração de que $S = H$.

3.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CORDA VIBRANTE

A solução do problema da corda vibrante, quando interpretada no sentido clássico, isto é, uma solução da equação (3.1), destoa daquilo observado fisicamente. Por exemplo, um problema em que a função f seja contínua, mas não possua derivada $f'(x)$ em um ponto x (por exemplo, a corda dedilhada), não possui solução no sentido clássico. Veja-se, a esse respeito, [2] e [5].

Isso deve-se à própria maneira utilizada para se deduzir a equação da onda. Antes de obter-se a equação diferencial $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, chega-se a uma equação integral que deve ser satisfeita pela função u (veja [2] e [5]). A passagem da equação integral para a equação diferencial é feita à custa de supor que a solução u seja suficientemente regular. Ora, se em problemas cotidianos essa regularidade não é satisfeita, essa passagem é indefensável.

A única solução para esse impasse é obtida em um contexto mais avançado, que trata de derivadas generalizadas. Isso foge ao escopo de nosso texto, chegando às raízes da necessidade de espaços de Sobolev.

Assim, com certa ingenuidade, passaremos a admitir que qualquer solução obtida como série de Fourier corresponde a uma solução do problema da corda vibrante (3.1). Essa abordagem pode ser justificada nesse contexto mais amplo de espaços de Sobolev.

3.6 EXERCÍCIOS

1. Mostre a desigualdade de Cauchy-Schwarz 3.14. Mostre, então, que ela é válida também para funções $f \in CP([-L, L])$.

2. Considere $CP([-L, L])$, o espaço de todas as funções contínuas por partes $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique que, usando a definição de $\langle f, g \rangle$ já dada para o espaço $C([-L, L])$, então $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ não é uma norma nesse espaço.

3. Sejam $f, g \in CP([-L, L])$. Mostre que

$$\|f \pm g\|^2 = \|f\|^2 \pm 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2.$$

Deduzza, então, o teorema de Pitágoras:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0.$$

4. Dado $f \in C([-L, L])$, mostre que a melhor aproximação de f no espaço gerado por $1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{N\pi x}{L}, \sin \frac{N\pi x}{L}$ é

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

em que a_k, b_k são os coeficientes de Fourier de f .

5. Demonstre, como consequência da desigualdade de Bessel, o Lema de Riemann-Lebesgue: se $f \in C([-L, L])$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

6. Seja $f \in CP[a, b]$. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx.$$

(Sugestão: Mostre o resultado inicialmente para o caso em que $a = 0$ e $0 < b \leq \pi$. Depois, analise o caso em que $a = 0 < \pi < b$. Por último, lembre-se que $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$.)

7. Seja $f \in CP([-L, L])$. Justifique: a série de Fourier de $\int_a^b f$ é obtida da série de Fourier de f por meio de integração termo a termo.

8. Mostre que, dada uma função contínua por partes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma função $f_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que:

(a) $f_\epsilon(a) = \alpha$ e $f_\epsilon(b) = \beta$;

(b) $f'_\epsilon \in CP[a, b]$;

(c) $\|f - f_\epsilon\|_2 < \epsilon$.

CAPÍTULO 4

RESSONÂNCIA HARMÔNICA

Neste Capítulo, estudaremos a interação entre duas cordas vibrantes. Sendo mais preciso, a vibração de uma corda gera ondas sonoras, que atuam sobre uma segunda corda como uma força externa. As ondas sonoras produzidas pela primeira corda podem provocar ressonância capaz de fazer vibrar a segunda corda. Mostraremos que a existência de ressonância depende, não da frequência de oscilação da primeira corda, mas sim da frequência dos harmônicos presentes em sua vibração. (Se essa frase parece incompreensível, não fique preocupado. Tudo será esclarecido no momento oportuno.)

4.1 PERÍODO FUNDAMENTAL

Consideremos uma corda vibrante, cujo movimento é descrito pelo problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, t) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Essa é uma corda de comprimento L e constante c , cujas extremidades são mantidas fixas e que possui posição inicial descrita pela função $f(x)$ e velocidade inicial nula.

Como vimos, a solução da equação (4.1) é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

em que

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

A solução $u(x, t)$ é periódica tanto na variável espacial x quanto na variável temporal. A periodicidade na variável espacial não tem interesse aqui: a função $f(x)$ foi estendida periodicamente e a periodicidade em x apenas expressa esse fato, que é irrelevante, pois as extremidades da corda estão fixas.

A periodicidade que nos interessa é a temporal, pois ela é que estabelece a altura (frequência) do som.

Relembramos, no contexto da corda vibrante, duas definições dadas anteriormente: o **período fundamental** da corda vibrante é o menor número **positivo** T tal que $u(x, t + T) = u(x, t)$ para todo $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$; a **frequência fundamental** da corda vibrante é o inverso de seu período fundamental:

$$\varphi = \frac{1}{T}.$$

Essa definição estabelece uma medida para os sons que percebemos e distinguimos: os graves e os agudos. Daí podemos falar em *altura* do som. Mais agudo quanto mais alto, isto é, quanto maior for a sua frequência; mais grave quanto mais baixo, quanto menor sua frequência.

Consideremos a solução $u(x, t)$ de (4.1). Se o coeficiente B_1 (chamado **primeiro harmônico**) não for nulo, então é fácil ver que

$$T = \frac{2L}{c} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{c}{2L}.$$

Quando o primeiro harmônico for nulo ($B_1 = 0$), já não é tão fácil determinar a frequência fundamental. Vejamos isto em dois exemplos.

Consideremos uma corda de comprimento $L = \pi$ e constante $c = 1$. Então, a solução do problema (4.1) é

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nt) \operatorname{sen}(nx).$$

Suponhamos que, para uma determinada função f , tenhamos $B_n = 0$ para todo $n \notin \{2, 3\}$, ou seja,

$$u(x, t) = B_2 \cos(2t) \operatorname{sen}(2x) + B_3 \cos(3t) \operatorname{sen}(3x).$$

É fácil verificar que $T = 2\pi$ (veja o Exercício 1) e, portanto, $\varphi = 1/(2\pi)$. Contudo, existem 3 pontos da corda que não vibram com essa frequência: o ponto $x = \pi/2$, cuja frequência de vibração é $\frac{3}{2\pi}$ e os pontos $x = \pi/3$ e $x = 2\pi/3$, ambos com frequência de vibração $1/\pi$.



Figura 4.1: Os zeros das funções $\operatorname{sen}2x$ e $\operatorname{sen}3x$ em $[0, \pi]$ produzem pontos que vibram com frequência diferente da frequência fundamental da corda vibrante.

Consideremos agora a mesma corda, com solução do problema (4.1) dada por

$$u(x, t) = \cos(nt) \operatorname{sen}(nx),$$

isto é, o caso em que $B_k = 0$ para todo $k \neq n$. Neste caso, $T = 2\pi/n$. Repare que essa é a solução do problema da corda vibrante para o caso em que $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$.

Concluimos que a frequência fundamental da corda depende de sua posição inicial. Isso é espantoso, não é? Normalmente nada se menciona sobre o assunto nos textos didáticos. Notamos também que existem pontos da corda que vibram com frequência maior do que a fundamental.

Mas surge uma dúvida simples:

Existe sempre a frequência fundamental da corda vibrante? Isto é, existe sempre um menor número real positivo T tal que

$$u(x, t + T) = u(x, t) \quad \forall x \in [0, L] \text{ e } t \geq 0?$$

A resposta dessa pergunta é afirmativa, desde que $u \neq 0$. De fato, consideremos, mais geralmente, a série de Fourier

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha t.$$

Mostraremos que a função $\phi(t)$, se não for constante¹, tem período fundamental igual a $2\pi/(d\alpha)$, em que

$$d = \operatorname{mdc}(\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \neq 0\}) =: \operatorname{mdc}(A).$$

A função $\phi(t)$ é periódica e $2\pi/(d\alpha)$ é um período de ϕ . Seja p o período fundamental de $\phi(t)$. Então, $2\pi/(d\alpha) = rp$, para algum $r \in \mathbb{N}^*$. Temos,

$$\begin{aligned} \phi(t + p) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos[n\alpha(t + p)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos(n\alpha p) \cos(n\alpha t) - \operatorname{sen}(n\alpha p) \operatorname{sen}(n\alpha t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\alpha t) = \phi(t). \end{aligned}$$

Pela unicidade da série de Fourier, concluimos que $\operatorname{sen}(n\alpha p) = 0$ e $\cos(n\alpha p) = 1$, para todo $n \in A$. Assim, $n\alpha p = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$ e todo $n \in A$. Substituindo o valor de p , obtemos que $rd \mid n$ para todo $n \in A$ e, portanto, $r = 1$. Quer dizer, $p = 2\pi/(d\alpha)$.

¹O mesmo argumento pode ser utilizado para séries de Fourier com termos em senos e cossenos.

Voltando agora ao caso da corda vibrante, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A argumentação acima, com $\alpha = \pi c/L$ garante a existência de um período fundamental para a corda vibrante. Contudo, ainda não podemos concluir que ele seja igual a $2L/(dc)$, visto que existe dependência na variável x .

Vimos, nos exemplos anteriores, que podem existir pontos cuja frequência fundamental é maior do que a frequência fundamental da corda. **Quantos pontos podem existir com frequência fundamental maior do que a frequência fundamental da corda?** Qual a frequência de vibração captada pelo ouvido humano?

Vamos supor que o período fundamental de um determinado ponto x_0 seja menor do que $p = 2L/(dc)$. Defina

$$\phi(t) = u(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \right) \cos \frac{n\pi ct}{L}.$$

Como vimos, o período fundamental de $\phi(t)$ é $p_0 = 2L/(d_0c)$, em que

$$d_0 = \operatorname{mdc}(A_0) = \operatorname{mdc} \left(\left\{ n \in \mathbb{N}^* : a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \neq 0 \right\} \right).$$

Para que p_0 seja menor do que p , é necessário que d_0 seja maior do que d . Mas, para isso acontecer, é preciso que $\operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} = 0$ para algum n , pois assim teremos $A_0 \subsetneq A$, possibilitando o aumento do máximo divisor comum. Portanto, podemos ter apenas uma quantidade enumerável de pontos com período fundamental menor do que o período fundamental p da corda.

Com um pouco mais de esforço, podemos concluir que existe, no máximo, uma quantidade *finita* de tais pontos, visto que, $\operatorname{mdc}(A)$ é, na verdade, o máximo divisor comum de uma quantidade *finita* de elementos de A :

$$\operatorname{mdc}(A) = \operatorname{mdc}(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad \text{em que } n_j \in A, j = 1, \dots, k.$$

Em particular, podemos concluir que o período fundamental da corda vibrante é $2L/(dc)$, visto que existem muitos pontos tais que $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \neq 0$. Mais do que isso, podemos concluir que a frequência desse número finito de pontos não interfere na frequência captada pelo ouvido humano.

Uma terceira pergunta talvez seja óbvia do ponto de vista físico, mas tem interesse matemático: **um ponto estacionário** (isto é, $u(x, t) = u(x, 0)$ para todo $t \geq 0$) **tem**

que necessariamente estar na posição de equilíbrio? Mais geralmente, em termos matemáticos: se $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0$, podemos concluir que $u(x, t) = 0$?

Suponhamos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Então

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Portanto, quanto o ponto x estiver parado, a unicidade da série de Fourier implica que $a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0$ para todo n , ou seja, $u(x, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Veja que, assim, um ponto estacionário satisfaz $u(x, t) = u(x, 0) = 0$.

O seguinte exemplo mostra que pode existir um ponto da corda que não é estacionário, mas que em algum instante tem sua velocidade e aceleração nulas. Considere

$$u(x, t) = 4 \cos t \operatorname{sen} x + \cos(2t) \operatorname{sen}(2x).$$

(Trata-se de uma corda com $L = \pi$ e $c = 1$.)

Temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -4 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(2x)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -4 \cos t \operatorname{sen} x - 4 \cos(2t) \operatorname{sen}(2x).$$

Logo, no instante $t = \pi$, a velocidade e aceleração do ponto $x = \pi/3$ são nulas, enquanto $u(\pi/3, t) = (\sqrt{3}/2)[4 \cos t + \cos(2t)]$.

4.2 COLOCANDO MATEMATICAMENTE O PROBLEMA

Consideremos duas cordas, a primeira com comprimento L_1 e constante c_1 , e a segunda com comprimento L_2 e constante c_2 .

Vamos supor que o movimento da primeira corda é dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} = 0, \\ u(0, t) = u(L_1, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, trata-se de uma corda com constante c_1 , de comprimento L_1 , cuja posição inicial é descrita pela função $f(x)$ e cuja velocidade inicial é nula.

Por sua vez, o movimento da segunda corda é descrito por

$$\begin{cases} u_{tt} - c_2^2 u_{xx} = F, \\ u(0, t) = u(L_2, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, t) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, a segunda corda tem constante c_2 , comprimento L_2 , posição e velocidade nulas. O termo F exprime a força externa à qual a segunda corda é submetida. Mais precisamente, F é justamente a solução u_1 da equação (4.2).

Como vimos, a solução da equação (4.2) é dada por

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi c_1 t}{L_1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L_1}, \quad (4.4)$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L_1} dx.$$

(Se você está estranhando a notação a_n ao invés de B_n , fique tranquilo. Mais uma vez, procedemos assim apenas por questões estéticas. Matemáticos gostam sempre de uma certa harmonia na notação, que ficará evidente com o decorrer de nossa exposição.)

Para estudarmos o problema (4.3), empregaremos um método diferente do usual. (Compare com [2], seção 5.6 ou [5], seção 20.)

O movimento da primeira corda produz uma onda sonora que faz vibrar o ar em torno dela, que atua sobre a segunda corda como força externa $F(x, t)$. É razoável supor que essa força externa tenha variáveis separáveis. De fato, a vibração do ar ocorre de maneira uniforme, algumas partes com maior intensidade, outras com menor intensidade. Ou seja, o som produzido por essa vibração pode ter maior ou menor volume, mas sempre tem o mesmo timbre (isto é, forma da onda). Por exemplo, a posição de um ouvinte numa sala de concerto não altera a frequência ouvida por ele: se um instrumento é ouvido como afinado numa parte da sala, ele também será ouvido como afinado em outra parte. O ouvinte sempre será capaz de identificar que o som veio de um violão, independente de estar do lado direito ou do lado esquerdo do palco; quer dizer, o timbre é o mesmo. (Uma observação de caráter filosófico: se identificarmos a solução do problema da corda vibrante (que descreve a movimentação das partículas da corda) com a onda sonora produzida por ela, essa seria uma justificativa para o próprio método de separação de variáveis. Não é o que estamos fazendo aqui: estamos dizendo que a onda sonora **atua como se fosse uma função $F(x, t)$ de variáveis separáveis**, mas não estamos dizendo que $u(x, t)$, dada pela equação (4.4), tenha variáveis separáveis.)

Assim, podemos considerar que

$$F(x, t) = X(x)T(t), \quad \text{em que} \quad T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi c_1 t}{L_1}.$$

Note que nossa suposição implica que **todos os harmônicos que compõem a estrutura temporal da função $u_1(x, t)$ são transferidos para a estrutura temporal de $F(x, t)$** . Ou seja, a função $T(t)$ é composta por todos os coeficientes $a_n \neq 0$ em $u_1(x, t)$, visto que os zeros das funções $\text{sen} \frac{n\pi x}{L_1}$ formam um conjunto pequeno (sendo preciso, de medida nula). Notamos que a expressão de $T(t)$ a explica a notação a_n !

Expressamos então a função $X(x)$ em termos de uma série de Fourier de senos. Uma vez que as extremidades da segunda corda estão fixas, a componente da força aí atuante é nula. Portanto, vale $X(0) = 0 = X(L_2)$:

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2}.$$

Observe que não estamos desenvolvendo as funções $T(t)$ e $X(x)$ com a mesma periodicidade! Aliás, é fácil produzir contra-exemplos mostrando que a solução $u_1(x, t)$ não pode ser escrita na forma $X(x)T(t)$ com ambas as funções desenvolvidas como série de Fourier com o mesmo período.

Para resolvermos (4.3), faremos uma tentativa com a forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, L_2].$$

Procedendo formalmente na substituição de $v(x, t)$ na equação (4.3), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n''(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} v_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2} = T(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2}.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(v_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} v_n(t) - T(t) b_n \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L_2} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in [0, L_2].$$

Portanto, concluímos que cada função $v_n(x, t)$ deve satisfazer a equação

$$y'' + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L_2^2} y = b_n T(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (4.5)$$

em que os dados iniciais correspondem às condições iniciais da segunda corda. Para resolvermos ao problema (4.5), uma vez que

$$T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi c_1 t}{L_1},$$

consideramos cada um dos problemas

$$y'' + \frac{n^2\pi^2c_2^2}{L_2^2}y = b_n a_k \cos \frac{k\pi c_1 t}{L_1}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad n, k \in \mathbb{N}^*. \quad (4.6)$$

Esse procedimento equivale à aplicação de uma versão generalizada do Princípio da Superposição: a solução de (4.5) é a soma (infinita) das soluções de cada um dos problemas (4.6). Note que eles têm todos a mesma forma: aquela apresentada no Capítulo 1.

Sintetizamos os resultados já obtidos para esse problema:

1. se $\frac{n\pi c_2}{L_2} \neq \frac{k\pi c_1}{L_1}$, então as soluções de (4.6) são dadas por

$$y(t) = \frac{b_n a_k}{\frac{n\pi c_2}{L_2} - \frac{k\pi c_1}{L_1}} \left[\cos \frac{k\pi c_1 t}{L_1} - \cos \frac{n\pi c_2 t}{L_2} \right],$$

conforme vimos na equação (1.4);

2. se $\frac{n\pi c_2}{L_2} = \frac{k\pi c_1}{L_1}$, então ocorre ressonância, pois as soluções de (4.6) são dadas por

$$y(t) = \frac{b_n a_k}{2 \frac{n\pi c_2}{L_2}} t \cos \frac{n\pi c_2 t}{L_2},$$

conforme vimos na equação (1.6).

A nossa abordagem do problema permite explicar as ressonâncias que podemos perceber: a onda sonora produzida por um violão é capaz de fazer vibrar, por ressonância, a corda de um violoncelo, por exemplo.

Agora estamos em condições de oferecer uma nova interpretação para a existência de ressonância no sistema massa-mola. Segundo as equações (2.17) e (2.18), ressonância ocorre quando uma das integrais

$$\int_0^P F(u) \sin(\omega_0 u) du \quad \text{ou} \quad \int_0^P F(u) \cos(\omega_0 u) du$$

for não-nula. Lembre-se que estamos analisando o caso em que $\frac{\omega_0 P}{2\pi} =: N \in \mathbb{N}^*$. Assim, desenvolvendo $F(u)$ como função periódica de período P em série de Fourier,

$$F(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi u}{P} + b_n \sin \frac{2n\pi u}{P},$$

vemos que, se um dos harmônicos a_N, b_N for não-nulo, haverá ressonância.

Reinterpretada sobre essa ótica, é apropriada a frase "ressonância ocorre quando a frequência natural de vibração do sistema coincide com a da força que lhe é aplicada", desde que essa força seja analisada à partir de seus harmônicos.

4.3 PERÍODOS INCOMENSURÁVEIS

No Capítulo 2 afirmamos que soluções da equação

$$x'' + \omega_0^2 x = F(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

são sempre limitadas quando

$$\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

em que P denota o período fundamental da força externa $F(t)$. Em particular, isso significa que não há ressonância.

Vamos agora provar essa afirmação.

Seja $S_N(x)$ a soma parcial de ordem N da série de Fourier de F . Como sabemos $S_N \rightarrow F$ em L^2 . Essa convergência implica que, para cada $t \geq 0$ fixo, temos

$$\int_0^t S_N(\tau) \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau \rightarrow \int_0^t F(\tau) \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

De fato, notando que

$$\|F - S_n\| = \left(\int_{-P/2}^{P/2} [F(t) - S_n(t)]^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^P [F(t) - S_N(t)]^2 dt \right)^{1/2},$$

a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante, para $0 \leq t \leq kP$ e $k \in \mathbb{N}^*$, que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t [F(\tau) - S_N(\tau)] \operatorname{sen}(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau \right| &\leq \int_0^{kP} |F(\tau) - S_N(\tau)| d\tau \\ &= k \int_0^P |F(\tau) - S_N(\tau)| d\tau \\ &\leq k\sqrt{P} \left(\int_0^P |F(\tau) - S_N(\tau)| d\tau \right)^{1/2} \\ &= k\sqrt{P} \|F - S_N\|. \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}^*$ pode ser escolhido arbitrariamente, provamos a convergência da integral para cada $t \in [0, \infty)$.

Ora, de acordo com a igualdade (2.6), a integral do lado esquerdo de (4.7) nos dá a solução x_N do problema

$$x'' + \omega_0^2 x = S_N, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

enquanto a integral do lado direito nos fornece a solução x de

$$x'' + \omega_0^2 x = F, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Assim, verificamos que (4.7) significa que $x_N(t) \rightarrow x(t)$ pontualmente em $[0, \infty)$.

Contudo, somente essa convergência não é suficiente para podermos concluir a limitação de $x(t)$. Mostraremos que, quando $\frac{\omega_0 P}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a seqüência $x_N(t)$ é uniformemente limitada em $[0, \infty)$, o que implica imediatamente que $x(t)$ é limitada.

Para estimarmos

$$x_N(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{2n\pi\tau}{P} + b_n \sin \frac{2n\pi\tau}{P} \right) \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau,$$

resolvemos as integrais envolvidas. Temos:

$$\frac{1}{\omega_0} \int_0^t \frac{a_0}{2} \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau = \frac{a_0}{2\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)],$$

$$\frac{a_n}{\omega_0} \int_0^t \cos \frac{2n\pi\tau}{P} \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau = \frac{a_n P^2 \omega_0 [\cos(\omega_0 t) + 1 - 2 \cos(\frac{n\pi t}{L})^2]}{\omega_0 (2n\pi + \omega_0 P)(2n\pi - \omega_0 P)},$$

$$\frac{b_n}{\omega_0} \int_0^t \sin \frac{2n\pi\tau}{P} \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) d\tau = \frac{b_n 2P [n\pi \sin(\omega_0 t) - \omega_0 P \sin \frac{n\pi t}{P} \cos \frac{n\pi t}{P}]}{\omega_0 (2n\pi + \omega_0 P)(2n\pi - \omega_0 P)}.$$

Assim, cotando cada uma dessas integrais e então aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \left| c_1 + c_2 \left(\sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{n - c_3} + b_n \frac{1}{n - c_3} \right) \right| \\ &\leq C_1 + C_2 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} \right] \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - c_3)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

em que $c_i, i \in \{1, 2, 3\}$, são constantes positivas. A desigualdade de Bessel então nos garante que

$$|x_N(t)| \leq C$$

para certa constante C . Isso prova o afirmado.

Note que o caráter oscilatório das funções seno e cosseno foi decisivo no procedimento acima: os diversos cancelamentos foram responsáveis pela limitação obtida.

Na verdade, o mesmo raciocínio pode ser adaptado de forma a mostrar que a convergência $x_N \rightarrow x$ é uniforme em $[0, \infty)$: basta aplicar o M -teste de Weierstraß.

4.4 EXERCÍCIOS

1. Mostre que o período fundamental de

$$u(x, t) = B_2 \cos(2t) \operatorname{sen}(2x) + B_3 \cos(3t) \operatorname{sen}(3x)$$

é $T = 2\pi$.

2. Na suposição $u_1(x, t) = X(x)T(t)$, feita na Seção 4.2, por que motivo ressaltamos que os zeros de $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L_1}$ formam um conjunto "pequeno"?
3. Mostre que, se p é o ínfimo de todos os reais positivos tais que $u(x, t + p) = u(x, t)$ para todo $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$, então $u(x, t) = u(x, 0)$ para todo $x \in [0, L]$.
4. Mostre que, se p é o período fundamental da corda vibrante, então todos os períodos são múltiplos de p .
5. Seja $A \subset \mathbb{N}^*$ um subconjunto não-vazio. Mostre que existe $d \in \mathbb{N}^*$ tal que $d \mid n$ para todo $n \in A$ e, se $k \mid n$ para todo $n \in A$, então $k \mid d$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] W. E. Boyce e R. C. DiPrima: Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, LTC, Rio de Janeiro, 2002.
- [2] D. G. de Figueiredo: Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [3] T. W. Körner: Fourier Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [4] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [5] H. F. Weinberger: A First Course in Partial Differential Equation with Complex Variables and Transform Methods, Dover, New York, 1995.

ÍNDICE REMISSIVO

- batimento, 4
- coeficientes de Fourier, 26
 - de uma função ímpar, 27
 - de uma função par, 27
- convolução, 12
- desigualdade
 - de Bessel, 30
 - de Cauchy-Schwarz, 29
- equação
 - do sistema massa-mola, 5
 - sem atrito, 2
- freqüência
 - fundamental, 3, 43
 - natural, 3
- função contínua por partes, 28
- identidade de Parseval, 30
 - interpretação geométrica, 31
 - validade da, 36
- método
 - de separação de variáveis, 23
 - dos coeficientes a determinar, 3
- núcleo de Dirichlet, 36, 38
- norma quadrática, 29
- período fundamental, 2, 43
- polinômio trigonométrico, 29
- primeiro harmônico, 43
- princípio da superposição, 25
- problema
 - da corda vibrante, 22
 - de Sturm-Liouville, 16
 - com condições de fronteira periódicas, 16
- produto interno em $C([-L, L])$, 29
- relações de ortogonalidade, 26
- ressonância, 4
- série de Fourier, 28
 - convergência em L^2 , 35
 - convergência pontual, 38
 - convergência uniforme, 33
 - soma parcial, 29
- separação de variáveis, 23
- sistema massa-mola, 5
 - amortecido, 7
 - amortecimento crítico, 6
 - superamortecido, 5
- solução
 - estacionária, 8
 - transiente, 8
- Sturm-Liouville, 16
- teorema de Fourier, 40
- teorema de Pitágoras, 30
- transformada
 - de Laplace, 11
 - inversa de Laplace, 11