Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações

Dan Avritzer

2^a bienal da sociedade brasileira de matemática
Salvador- Outubro de 2004

Aos participantes da II bienal da SBM

Estas notas foram inicialmente escritas para ser utilizadas na 11^a Escola de Álgebra realizada em São Paulo em julho de 1990. Elas pretenderam ser uma introdução à geometria enumerativa que fosse elementar e rica em exemplos. Uma boa parte delas versa sobre Grassmannianas e as utilizamos para resolver alguns problemas de geometria enumerativa. Elas foram editadas nas atas da escola que como se sabe têm uma edição limitada. Desde então, apesar de há muito esgotadas, estas notas têm sido solicitadas por vários colegas e alunos a procura de um texto elementar sobre Grassamannianas e geometria enumerativa. Por outros lado, nos últimos anos, o assunto evoluiu muito, com os desenvolvimentos que ocorreram na última década do século passado, notadamente os trabalhos de Kontsevich de 1994 [13], seguidos de outros (veja a introdução ao último capítulo). Surgiu então a idéia de reeditar para esta bienal as notas da 11^a escola de álgebra, acrescidas de uma material mais atual. É isto que você tem em mãos onde apenas o último capítulo foi escrito recentemente para dar uma idéia dos desenvolvimentos que ocorreram nos últimos 13 anos. Como a 1^a versão, este texto é elementar e não aborda o assunto com a sofisticação que ele adquiriu nos últimos 30 anos. Pretende ser apenas uma primeira aproximação para que o aluno interessado seja motivado para estudos posteriores. Gostaria de agradecer a organização da II bienal da sociedade brasileira de matemática pela oportunidade de ensinar este mini-curso e escrever estas notas.

Salvador, Outubro de 2004.

Introdução

O aluno que resolve estudar Geometria Algébrica costuma se deparar com duas dificuldades iniciais. Por um lado, a Geometria Algébrica possui uma vasta história e os livros textos atuais costumam omitir a maior parte dela, ou remetê-la aos exercícios, mesmo por que é difícil tratar em um único texto a Geometria Algébrica Clássica e a Geometria Algébrica Contemporânea.

Por outro lado, a teoria moderna é sofisticada exigindo uma formação sólida que, sejamos realistas, não é oferecida pelas universidades brasileiras. Estas notas pretendem ser um compromisso entre a necessidade de estudar o material clássico (já que é daí que vêm os exemplos que justificam os desenvolvimentos da teoria verificados nos últimos 40 anos) e o gosto apressado do leitor atual que não tem tempo de estudar os grossos manuais, em vários volumes, do passado.

Para isto escolhemos um tópico, a Geometria Enumerativa, que, também ela, tira seus exemplos e seus problemas do passado, mas que, nos dias atuais, conheceu um desenvolvimento extraordinário, desesembocando na chamada Teoria de Interseção.

Daremos uma ideia mais concreta do que é a Geometria Enumerativa ao final do Capítulo 1. Neste capítulo faremos também uma revisão do Plano Projetivo, do Espaço Projetivo e das propriedades dos conjuntos algébricos nestes espaços. Propositalmente omitimos a conexão entre este assunto e a Álgebra Comutativa. Fazemos referência a alguns dos resultados de Álgebra Comutativa habitualmente citados neste contexto nos exercícios. O objetivo é chegar o mais rapidamente possível às Variedades Grassmannianas.

É o que fazemos no Capítulo 2, com o estudo da Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}_3$. O estudo destas variedades data da metade do século XIX(1844) e foi iniciado pelo matemático que lhes deu o nome, Hermann Grassmann. A Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ é o conjunto dos planos de $\mathbb{C}^4$. Pode também ser pensada como uma quádrica de $\mathbb{P}_5$ e como tal possui uma rica geometria. O estudo desta geometria e sua relação com as retas de $\mathbb{P}_3$ será levado a cabo nos capítulos 2 e 3. Resolvemos neste ponto um primeiro problema enumerativo: Quantas retas do espaço interceptam 4 retas dadas?

Durante todo o texto tentei manter a um mínimo os pré-requisitos necessários. Estas notas pretendem ser accessíveis a um aluno em final de bacharelado.

Gostaria de agradecer aos colegas Israel Vainsencher, Eliana Farias e Soares , Maria Cristina Ferreira, Sylvie Marie Kamphorst Leal da Silva e Maria Elasir Gomes Seabra. Ao primeiro por ter me apresentado a um assunto tão instigante e repleto de motivações quer clássicas, quer modernas;quer geométricas, quer algé bricas. A Eliana e Cristina, pelo cuidado com que leram versoẽs iniciais deste texto e pelas numerosas sugestões que ofereceram. A Sylvie e Elasir por terem me apresentado ao maravilhoso mundo do LaTeXe pela ajuda que me deram no uso deste programa para escrever este texto. Gostaria de agradecer especialmente a Paulo Antônio Fonseca Machado, que inicialmente como aluno, elaborando uma dissertação de mestrado sobre o tema, e mais tarde como colega, muito contribuiu para minha compreensão deste assunto e consequentemente para estas notas, inclusive oferecendo muitas sugestões para o aprimoramento do texto. Finalmente, gostaria de agradecer a comissão organizadora da décima primeira Escola de Álgebra pela oportunidade de lecionar este mini-curso.

Belo Horizonte,junho de 1990.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

O Espaço Projetivo

1.1 Curvas Afins

A História da álgebra se confunde com o estudo das raízes de polinômios. Se em um primeiro momento este estudo se fixou na busca de fórmulas que expressassem as raízes de um polinômio de uma variável em função dos seus coeficientes , com o estudo de polinômios de duas variáveis fica definitivamente selado o enlace da Álgebra com a Geometria. Ao perceber que uma equação do tipo $f(X,Y) = 0$ descreve uma curva no plano, Descartes inventou um novo ramo da matemática conhecido hoje como Geometria Algébrica. Neste capítulo estudaremos as primeiras propriedades das curvas planas, vistas como raízes de polinômios de duas variaáveis.

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais , $\mathbb{R}^2$ o plano real e $\mathbb{R}[X,Y]$ o anel dos polinômios com coeficientes reais nas variáveis X e Y. Dado $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ um ponto $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ é chamado um zero de f se $f(a_1,a_2) = 0$.

Se f é não constante o conjunto dos zeros de f , denotado por $V(f)$, será chamado (provisoriamente) de curva plana afim associada a f.

Exemplo 1 *Seja $f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$. A curva plana afim associada é o círculo de raio 1 e centro na origem.*

Exemplo 2 *Seja $f(X,Y) = Y^2 - X(X^2 - 1) \in \mathbb{R}[X,Y]$. A curva plana afim associada é a cúbica não singular.*

Exemplo 3 *Seja $f(X,Y) = X^2 + Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$.*
$X^2 + Y^2 = 0 \rightarrow X = Y = 0$ *e a curva associada é constituida pela origem do plano.*

Exemplo 4 *Seja $f(X,Y) = X^2 + Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$. A Equação $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ não possui soluções reais e a curva neste caso é vazia.*

Exemplo 5 *Sejam $f(X,Y) = X$ e $g(X,Y) = X^2$. Neste caso temos, $V(f) = V(g)$ =Eixo dos y's.*

Os exemplos 3 e 4 acima mostram a incoveniência de, no estudo das curvas planas, nos restingirmos aos zeros reais de polinômios, já que nestes casos verificamos uma escassez de pontos. Daqui por diante, a menos de menção explícita em contrário trabalharemos com polinômios em $\mathbb{C}[X,Y]$, o anel de polinômios nas variáveis X, Y com coeficientes complexos e estudaremos seus zeros em $\mathbb{C}^2$, o plano complexo. O Exemplo 5 indica que mesmo considerando zeros de polinômios em $\mathbb{C}^2$ a mesma curva pode corresponder a polinômios muito distintos. Faremos então a seguinte definição:

Definição 1 *Uma Curva Plana Afim é o conjunto dos zeros $F = V(f)$ em $\mathbb{C}^2$ de um polinômio irredutível não constante $f \in \mathbb{C}[X,Y]$. O grau de F (Notação: ∂F) é o grau do polinômio f.*

Observação:A boa definição do grau é uma consequência do Teorema dos Zeros de Hilbert. (Veja exercício 1.4)

Nosso primeiro resultado afirma que considerando zeros de polinômios em $\mathbb{C}^2$ não acontecem anomalias como as verificadas nos exemplos 3 e 4 acima.

Proposição 1 *Seja $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ um polinômio iredutível não constante. Então $F = V(f)$ é constituida por um número infinito de pontos.*

Demonstração: Seja

$$f(X,Y) = a_0(Y) + a_1(Y)X + a_2(Y)X^2 + ... + a_n(Y)X^n$$

um polinômio qualquer não constante. ($a_i(Y) \in \mathbf{C}[\mathbf{Y}]$). Seja $i > 0$ tal que a_i naõ é identicamente nulo. Como $\mathbf{C}$ é algebricamente fechado, dado $y \in \mathbf{C}$ tal que $a_i(y) \neq 0$ existe $x \in \mathbf{C}$ tal que $f(x,y) = 0$. Como existem infinitos tais y's existem infinitos pontos $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tais que $f(x,y) = 0$, terminando a demonstração.

Dadas duas curvas $F, G \subset \mathbb{C}^2$ uma primeira pergunta que se pode fazer é a cerca do conjunto $F \cap G$. É finito?Em caso afirmativo, quantos pontos possui?Para isto consideremos alguns exemplos.

Exemplo 6 *Sejam $F = V(X^2 + Y^2 - 1)$ e $G = V(X - Y)$. Substituindo a segunda equação na primeira temos $2X^2 = 1 \Longrightarrow X = \pm\sqrt{2}/2$. Donde :*

$$F \cap G = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\}$$

é constituido por dois pontos. $(2 = \partial F . \partial G)$

Exemplo 7 *Sejam $F = V(X^2 - Y - 1)$ e $G = V(4X^2 + Y^2 - 4)$.*
F é a parábola $X^2 = Y + 1$ e G é a elipse $X^2 + Y^2/4 = 1$.

Fazendo os cálculos para encontrar $F \cap G$ temos porém uma surpresa:

$$Y + 1 = 1 - Y^2/4,$$

*é satisfeita para dois valores de $Y, Y = 0$ ou $Y = -4$.Para $Y = 0$,temos dois valores de $X, X = \pm 1$(como esperado).Quando $Y = -4 \Longrightarrow X = \pm\sqrt{3}i$. Ou seja, $F \cap G$ é constituida de quatro pontos. Observe que $4 = \partial F . \partial G$. (Este exemplo aponta mais uma das razoẽs porque estamos trabalhando sobre **C**.)*

Exemplo 8 *Sejam* $F = V(X.Y)$ *e* $G = V(X(X-Y))$. *(Atenção!Pela definição acima, F e G não são curvas)*

$$XY = 0 \Longleftrightarrow X = 0 \, ou \, Y = 0; X(X-Y) = 0 \Longleftrightarrow X = 0 \, ou \, X = Y.$$

Vemos que F e G possuem uma reta em comum a reta $V(X)$.

Os últimos três exemplos parecem indicar que quando consideramos polinômios irredutíveis $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ as curvas $F = V(f)$ e $G = V(g)$ possuem um número finito de pontos em comum e este número é dado por $\partial F.\partial G$. Sabemos, no entanto, que isto não é verdade. Por exemplo duas retas paralelas F e G não se interceptam e $\partial F.\partial G = 1$. Intuitivamente porém gostaríamos de dizer que duas retas paralelas se encontram no 'infinito'. Assim, se pudéssemos trabalhar com pontos no infinito talvez pudéssemos afirmar que duas curvas se interceptam em um número finito de pontos e este número é dado pelo produto de seus graus. Na próxima seção, introduziremos o Espaço Projetivo e poderemos trabalhar com pontos no infinito.

1.2 Curvas Projetivas Planas

Seja K=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Em $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ considere a seguinte relação de equivalência:

$x \sim y \Longleftrightarrow$ se existe $k \in \mathbf{K}, k \neq 0$ tal que $y = kx$.

Definição 2 *:O Plano Projetivo é o conjunto das classes de equivalência de* $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ *pela relação de equivalência acima e é denotado por* $\mathbb{P}_2(\mathbf{K})$.

Cada uma destas classes corresponde a uma reta de $\mathbb{K}^3$ passando pela origem e reciprocamente. Dado um ponto $P = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$, sua classe de equivalência $\bar{P}$ em $\mathbb{P}_2(\mathbf{K})$ é denotada por $(x_0 : x_1 : x_2)$. Dizemos que $(x_0 : x_1 : x_2)$ são as coordenadas homogêneas do ponto $\bar{P}$. (usamos ':' como um lembrete para o fato que o terno acima está definido a menos de multiplicação por constante não nula.)

O plano $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$) pode ser pensado como um subconjunto de $\mathbb{P}_2(\mathbf{R})$(resp. $\mathbb{P}_2(\mathbf{C})$). Ponhamos K=$\mathbb{R}$ para fixar ideias. Sejam X, Y, Z as coordenadas do $\mathbb{R}^3$ e consideremos o plano $Z = 1$. Podemos identificar este plano com o plano euclidiano da seguinte maneira: Observe que dado um ponto P de $Z = 1$ existe uma única reta passando pela origem e por P, ou seja, cada ponto P de $Z = 1$ está associado a um único $\bar{P}$ de $\mathbb{P}_2$. Por outro lado, dada uma reta L do $\mathbb{R}^3$ passando pela origem temos duas possibilidades:

- L está contida no plano $Z = 0$.
- L corta o plano $Z = 1$ em um único ponto.

Assim podemos identificar os pontos do plano $Z = 1$ com o subconjunto de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ formado pelas retas do $\mathbb{R}^3$ que não estão contidas no plano $Z = 0$. As retas do $\mathbb{R}^3$ que estão contidas no plano $Z = 0$ são chamadas de pontos no infinito de $\mathbb{P}_2$(Notação: H_∞). Temos:

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$$

Tudo o que foi dito acima vale para $K = \mathbb{C}$. Em particular, temos:

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \cup H_\infty$$

Os exemplos seguintes ilustram o porque desta nomenclatura.

Exemplo 9 *Considere as retas $L, L' \subset \mathbb{R}^2$ dadas por $L = V(X - Y)$ e $L' = V(X - Y + 1)$. Pensando no $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ como acima temos:*

A maneira natural de estender L a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é considerar L=V(X-Y), onde agora estamos considerando os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x - y = 0$, ou seja o plano $X = Y$. No caso de L' não poderemos proceder da mesma maneira pois dado um ponto (x, y, z) tal que $x - y + 1 = 0, k(x, y, z)$ não pertence ao plano $X - Y + 1 = 0$ para qualquer $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$. Ou seja, dado um ponto qualquer de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ não podemos decidir se ele anula ou não $X - Y + 1$! A extensão natural de L' a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é $L' = V(X - Y + Z)$, pois quando $Z = 1$ temos a reta original e se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com $x - y + z = 0, k(x, y, z), k \in \mathbf{R}, k \neq 0$ também satisfaz a equação $X - Y + Z = 0$. Os dois planos acima se interceptam na origem e portanto ao longo de toda uma reta a saber a reta dada por $Z = 0, X = Y$. Vemos assim que as retas L e L' paralelas em $\mathbb{R}^2$ quando estendidas a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ se encontram no ponto no infinito cujas coordenadas homogêneas são $(1 : 1 : 0)$.

Observe qua as retas $L, L' \subset \mathbb{R}^2$ quando estendidas a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ foram acrescidas de exatamente um ponto: o ponto no infinito. De uma maneira geral sejam $L_1 = AX + BY + C$ e $L_2 = A'X + B'Y + C'$ duas retas do $\mathbb{R}^2$. Se L_1, L_2 não são paralelas sua interseção pode ser calculada pela regra de Cramer:

$$X = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

$$Y = \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

Em coordenadas homogêneas o ponto $P = L_1 \cap L_2$ é dado por

$$\left(BC' - B'C/\Delta : AC' - A'C/\Delta : 1\right), \text{ onde } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Se L_1, L_2 são, paralelas $\Delta = 0$. As extensões de L_1, L_2 a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ são dadas por

$$L_1' = V(AX + BY + CZ), L_2' = V(AX + BY + CZ) \tag{1.1}$$

respectivamente. Como $\Delta = 0$ as equações possuem uma solução comum que é dada por $(BC' - B'C, A'C - AC', \Delta)$

Vemos assim que a extensão de uma reta do $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ acrescenta um ponto no infinito a reta de tal forma que todas as retas paralelas passam por um mesmo ponto no infinito.

Exemplo 10 *Considere* $f = X - Y^2, g = Y \in \mathbb{R}[X,Y]$. *Em* $\mathbb{R}^2$, $F = V(f)$ *e* $G = V(g)$ *possuem um único ponto de interseção:a origem, enquanto aqui* $\partial F.\partial G = 2$. *Ao contrário do exemplo 7, olhando para os zeros em* $\mathbb{C}^2$ *não obtemos nenhum outro ponto. Consideremos a extensão de F e G a* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. *Pelas mesmas razoẽs do exemplo anterior as extensoẽs de F e G a* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *são dadas respectivamente pelos zeros de* $F' = Y$, $G' = ZX - Y^2$. *Calculando a interseção obtemos o ponto que faltava :*
$Y = 0, Z = 0$, *que corresponde ao ponto* $(1:0:0)$ *em coordenadas homogêneas.*

Os polinômios F' e G' considerados acima são exemplos do que chamamos de polinômios homogêneos. Mais precisamente, um polinômio $F(X_0, X_1, ..., X_n) \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$ é chamado um polinômio homogêneo de grau d se

$$F(\lambda X_0, \lambda X_1, ..., \lambda X_n) = \lambda^d\, F[X_0, X_1, ..., X_n] \text{ para todo } \lambda \in K \setminus \{0\}.$$

Observe que esta condição implica que esteja bem definido o anulamento de um polinômio F ao longo de uma reta $(\lambda X_0, \lambda X_1, ..., \lambda X_n) \subset K^{n+1}$. Um polinômio F é homogêneo de grau d se e somente se seus monômios são todos de grau d. (Ver exercício 1.5)Dado um polinômio homogêneo $F(X_0, X_1, X_2)$ um ponto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$ é um zero de F se $F(x_0, x_1, x_2) = 0$.

Definição 3 *Uma Curva Projetiva Plana é o conjunto dos zeros em* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *de um polinômio homogêneo ,irredutível e não constante. O grau de uma curva projetiva* $F = V(f)$, *f polinômio homogêneo ,irredutível e não constante é definido como sendo o grau de f.*

Exemplo 11 *Uma cônica de* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *é dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2, ou seja, um polinômio da forma:*

$$F(X,Y,Z) = a_0X^2 + a_1XY + a_2XZ + a_3Y^2 + a_4YZ + a_5Z^2.$$

Dada uma cônica afim qualquer:

$$f(x,y) = aX^2 + bXY + cX + dY^2 + eY + f,$$

podemos obter sua extensão $F* = V(f*)$ *da seguinte maneira. Considere a identificação natural de* $\mathbb{C}^2$ *com o plano* $Z = 1$ *em* $\mathbb{C}^3$. *Dado um ponto* $(x,y,1) \in V(f)$ *a reta determinada por* $(x,y,1)$ *e a origem deve pertencer a* $F*$. *Assim vemos que o polinômio* $f*$ *procurado é o polinômio cujos zeros são o cone em* $\mathbb{C}^3$ *de vértice na origem e cuja diretriz é a cônica f. Este cone é dado pelo polinômio*

$$f* = aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2,$$

como se vê fazendo $Z = 1$ *na equacão acima.*

Trata-se de um fato geral que não será demostrado aqui:Dada uma curva afim $F = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ definimos seu fecho projetivo como sendo a menor curva projetiva $\bar{F}$ tal que sua restrição a $\mathbb{C}^2$ é a curva F. O fecho projetivo de $F = V(f)$ pode ser obtido homogeneizando o polinômio f(X, Y) para obter o polinômio f*(X,Y,Z), e em seguida tomando F*=V(f*(X,Y,Z)). Para isto, seja n o grau do monômio de f de grau máximo. Obtemos f* multiplicando cada monômio não nulo de grau i pela potência Z^{n-i} de Z. Assim se

$$f(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} f_i(X,Y), \text{ onde } f_i(X,Y) \text{ homogêneos de grau i, temos:}$$

$$f*(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n} Z^{n-i} f_i(X,Y).$$

Os zeros em $\mathbb{C}^3$ do polinômio $f*$ formam o que denominamos cone afim associado a curva projetiva $F* = V(f*) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Voltemos ao problema inicial que abordamos no início do capítulo. Dadas duas curvas projetivas $F = V(f)$ e $G = V(g)$ é verdade que o número de pontos de $F \cap G$ é dado por $\partial F.\partial G$?A resposta ainda é não, pois podemos ter, por exemplo, uma reta tangente a uma cônica interceptando-a em apenas um ponto. Intuitivamente porém vemos que o ponto de tangência deveria ser contado como 2 pontos pois se considerarmos uma reta secante à cônica tendendo à reta tangente, vemos que os dois pontos de interseção da secante com a cônica tendem ao ponto de tangência. O mesmo acontece se considerarmos a interseção da cúbica $V(Y^2 - X^2(X+1))$ com uma reta passando pela origem. Apesar da interseção ser apenas um ponto vê-se que este ponto deveria ser contado duas vêzes. É possível formalizar estas ideias definindo os conceitos de multiplicidade de interseção e de pontos múltiplos de uma curva . Isto não será feito aqui. O leitor interessado poderá consultar ([7] ou [21]) . Diremos apenas que se contarmos multiplicidades adequadamente vale o chamado Teorema de Bézout segundo o qual o número de pontos de interseção de duas curvas F e G é dado por $\partial F.\partial G$(contadas as multiplicidades).

1.3 Variedades Projetivas

O Espaço Projetivo $\mathbb{P}^n$ é a generalização natural para n dimensões do plano projetivo. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão n+1(não necessariamente $\mathbb{C}^{n+1}$). Consideremos em $V \setminus \{0\}$ a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe}\, k \in \mathbf{C}, k \neq 0 \text{ tal que } y = kx$$

Definição 4 *O Espaço Projetivo $\mathbb{P}^n(V)$ é o conjunto das classes de equivalência de $V \setminus \{0\}$ pela relação acima.*

Observe que $x \sim y$ se e somente se x, y estão em uma mesma reta.Portanto, $\mathbb{P}^n(V)$ é o conjunto dos sub-espaços vetoriais de V de dimensão 1. Fixada uma base de V podemos identificar V com $\mathbb{C}^{n+1}$ e representar cada elemento de $x \in V$ por suas coordenadas $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$. Se $\bar{x} \in \mathbb{P}^n(V)$ e $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ é um representante se $\bar{x}$ então escrevemos
$x = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ e dizemos que as coordenadas cartesianas de x são as coordenadas homogêneas de $\bar{x}$. Assim como no caso do plano projetivo, já estudado, as coordenadas homogêneas de $\bar{x}$ de $\mathbb{P}^n(V)$ só estão determinadas a menos de multiplicação por um escalar não nulo.

Quando introduzimos o plano projetivo observamos que $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}_2$ da seguinte maneira: Seja $x \in \mathbb{P}_2$ então $x = (x_0 : x_1 : x_2)$;se $x_2 \neq 0$, x corresponde a um único ponto de $\mathbb{C}^2$,que é identificado com $(x_0 : x_1 : 1)$, via a aplicação
$\phi_2(x_0, x_1) = (x_0 : x_1 : x : 1)$; se $x_2 = 0$, x é chamado de ponto no infinito. Observe que a escolha do plano $x_2 = 1$ como o plano a ser identificado com $\mathbb{C}^2$ é arbitrária.Poderíamos fazer o mesmo com o plano $x_0 = 1$ considerando a aplicação:

$$\phi_0 : (x_1, x_2) \longrightarrow (1 : x_1 : x_2),$$

ou ainda com o plano $x_1 = 0$,considerando uma aplicação análoga.

Em geral, seja $U_i = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbf{P}^n(V), x_i \neq 0\}$. Cada $x \in U_i$ possui um único conjunto de coordenadas homogêneas da forma:

$$x = (x_0/x_i : x_1/x_i : ... : x_{i-1}/x_i : 1 : ... : x_n/x_i)$$

(tome $x \in U_i$ qualquer e considere $(1/x_i)x$).

Vamos definir

$$\phi_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(V) \text{ por}$$
$$\phi_i(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1 : a_2 : ..., a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : ... : a_n).$$

ϕ_i define uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{C}^n$ e os pontos de $U_i \subset \mathbb{P}^n(V)$. Observe que

$$\mathbb{P}^n(V) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i,$$

portanto $\mathbb{P}^n$ pode ser coberto por n+1 subconjuntos cada um dos quais é essencialmente $\mathbb{C}^n$.Por isto chamamos $\mathbb{P}^n$ de Espaço Projetivo de n dimensões. Se, como fizemos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, notarmos

$$H_\infty = \{x = (x_0 : x_1 : ... : x_n)\mathbb{P}^n(V)/x_n = 0\},$$

então podemos escrever

$$\mathbb{P}^n(C) = \mathbb{C}^n \cup H_\infty$$

H_∞ é chamado o hiperplano no infinito. Se $V = \mathbf{C}^4$ o espaço projetivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}^4)$ será denotado por $\mathbb{P}^3$. Este caso particular terá grande importância na sequência por isto o examinaremos mais de perto. Dado $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ homogêneo, um ponto $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$ é chamado um zero de f se $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$.Assim como nos primeiras duas seções notaremos o conjunto dos zeros de f por V(f). Uma superfície de $\mathbb{P}^3$ é o conjunto dos zeros de um polinômio homogêneo, não constante e irredutível $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$. O grau da superfície $F = V(f)$, denotado por ∂F, é o grau do polinômio f. Se $\partial f = 1$, F é chamado um plano, se $\partial f = 2$, F é chamado uma quádrica.

Exemplo 12 *Considere os dois planos*
$F = V(aX + bY + cZ + d), G = V(a'X + b'Y + c'Z + d') \subset \mathbb{C}^3$. *A maneira natural de estender* F, G *a* $\mathbb{P}^3$ *é considerar* $F' = V(aX + bY + cZ + dW), G' = V(a'X + b'Y + c'Z + d'W)$. *Os planos* F', G' *possuem interseção não vazia em qualquer caso. Se* F, G *se interceptam a interseção de* F', G' *é a reta projetiva fecho projetivo da reta de interseção de* F, G. *Se* F, G *são paralelas a interseção de* F', G' *é uma reta contida no plano no infinito.*

Em geral, um conjunto algébrico de $\mathbb{P}^n(V)$ é o lugar dos zeros comuns de um conjunto de polinômios homogêneos e irredutíveis e não constantes $f_1, f_2, ..., f_r \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]$. Se $F = V(f), F$ é dita uma hipersuperfície e seu grau é o grau de f. Se $\partial f = 1$ a superfície é chamada um hiperplano. Se $\partial f = 2$ a hipersuperfície é chamada uma quádrica. Se F é a interseção de k hiperplanos linearmente independentes a superfície é chamada um (n-k)-plano.

Exemplo 13 *Considere o conjunto algébrico* $C = F \cap G$ *dado pelos zeros comuns dos seguintes polinômios:*
$f(X, Y, Z, W) = XY - ZW, g(X, Y, Z, W) = Z.$
$F = V(f)$ *é a chamada quádrica não singular. Fazendo* $W = 1$ *e considerando sua interseção real temos a superfície que nos cursos de cálculo é conhecida como Parabolóide Hiperbólico. (Veja a Figura 1.5.)*$G = V(g)$ *é simplesmente um dos planos coordenados. A curva* C *interseção das duas superfícies é obtida fazendo* $Z = 0$ *na equação de F. Temos:*

$$Z = 0 \Longrightarrow XY = 0 \Longrightarrow X = 0 \text{ ou } Y = 0,$$

ou seja, C *é a união das retas* $L_1 = V(Z, X)$ *e* $L_2 = V(Z, Y)$. C *também pode ser dada por* $C = V(Z, X.Y)$.

O Exemplo acima mostra que, mesmo se considerarmos inicialmente dois polinômios irredutíveis f, g, quando consideramos sua interseção $C = V(f) \cap V(g)$, podemos obter um conjunto que também pode ser dado por polinômios que possuem uma fatoração não trivial. Geometricamente a interseção de superfícies constituidas de "um único pedaço"pode dar origem a uma curva constituida de "mais de um pedaço". Gostaríamos de evitar estas situações, não só por uma questão de coerência com as demais definições (curvas algébricas e projetivas), como porque, com esta condição , fica mais fácil enunciar alguns teoremas como , por exemplo , o Teorema de Bézout. Para isto faremos as seguintes definições.

Definição 5 *Um conjunto algébrico $X \subset \mathbb{P}^n(V)$ é dito irredutível se sempre que $X = X_1 \cup X_2$, com X_1, X_2 algébricos tivermos $X = X_1$ ou $X = X_2$.*

Definição 6 *Um conjunto algébrico $X \subset \mathbb{P}^n(V)$ é dito uma Variedade Projetiva se X é irredutível.*

Exemplo 14 *Seja*

$$F = V(f), f(X,Y,Z) = a_0X^2 + a_1XY + a_2XZ + a_3Y^2 + a_4YZ + a_5Z^2,$$

uma cônica projetiva .(Neste exemplo f não é necessariamnte irredutível.) Como $cf, c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ define a mesma cônica que f, vemos que F pode ser pensado como um elemento bem definido de $\mathbb{P}^5(V)$, onde V é o espaço vetorial de dimensão 6 dos polinômios homogêneos de grau 2 nas variáveis X, Y, Z. Mais precisamente, um elemento $\bar{f} \in \mathbb{P}^5(V)$ é uma classe de equivalência de polinômios onde qualquer representante é da forma $cf, c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ e portanto pode ser identificado com a cônica $C = V(f), f \in \bar{f}$. Por esta identificação a cônica F , acima, pode ser notada assim: $F = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5)$.

Cada ponto de $\mathbb{P}^5(V)$ corresponde , portanto, a uma única cônica. Dizemos que $\mathbb{P}^5(V)$ parametriza as cônicas do plano projetivo. Os espaços projetivos $\mathbb{P}^n$ possuem uma importância fundamental como espaços de parâmetros. Para ilustrar esta afirmativa, considere o conjunto das cônicas que passam por um ponto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$. Esta cônicas satisfazem a equação:

$$A_0x_0^2 + A_1x_0x_1 + A_2x_0x_2 + A_3x_1^2 + A_4x_1x_2 + A_5x_2^2 = 0.$$

Esta equação pensada no $\mathbb{P}^5(V)$ das cônicas é a equação de um hiperplano. (Os A_i's são as variáveis.)Se considerarmos cinco destes planos vemos que, em geral, eles se interceptam em um ponto. Isto mostra que dados cinco pontos em $\mathbb{P}_2$,entre os quais quaisquer três não estão alinhados,existe única cônica passando por eles.(Veja os exercícios 1.8 e 1.9.) No próximo capítulo estudaremos outros espaços de parâmetros de objetos geométricos.

Vamos agora tentar generalizar o Teorema de Bézout que enunciamos anteriormente pra curvas projetivas para o contexto de Variedades Projetivas de $\mathbb{P}^n$. Uma primeira dificuldade é que se $n > 2$ não existe nenhuma garantia que duas variedades quaisquer de $\mathbb{P}^n$ se interceptem. Considere o seguintes exemplos:

Exemplo 15 *Considere o plano $P = V(aX + bY + cZ + dW) \subset \mathbb{P}^3$ e a reta de $\mathbb{P}^3$ dada por $L = V(a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4W, a_1'X + a_2'Y + a_3'Z + a_4'W)$. Analisando o sistema formado por estas três equações vemos que para quaisquer valor dos coeficientes o plano intercepta a reta em um ponto, exceto quando a reta está contida no plano.*

Exemplo 16 *Considere agora a interseção de duas retas em* $\mathbb{P}^3$*:*

$$L_1 = V(a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4W, a_1'X + a_2'Y + a_3'Z + a_4'W),$$

$$L_2 = V(b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4W, b_1'X + b_2'Y + b_3Z + b_4'W).$$

Analisando o sistema formado pelas quatro equações acima vemos que dependendo do valor dos coeficientes existem as seguintes possibilidades:

- *a única solução do sistema é a origem caso em que as retas não se interceptam.*
- *o sistema possui infinitas soluções e neste caso as retas se interceptam em um ponto ou são coincidentes.*

Os resultados vistos nos dois últimos exemplos sobre interseção de retas e planos em $\mathbb{P}^3$ se generalizam facilmente para interseções de sub-espaços lineares de $\mathbb{P}^n$: Para que duas variedades lineares V_1, (de dimensão n_1), V_2, (de dimensão n_2) $\subset \mathbb{P}^n$ se interceptem obrigatoriamente é preciso que $n_1 + n_2 \geq n$.Se $n_1 + n_2 > n$,$dim(V_1 \cap V_2) > 0$.Quando consideramos duas variedades V_1, V_2 quaisquer a questão é muito mais complicada.A própria noção de dimensão de uma variedade V é delicada e não será tratada formalmente aqui.Admitiremos como noção intuitiva o que seja dimensão de um conjunto algébrico de $\mathbb{C}^n$.Dada uma Variedade Projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ temos que:

$$X = \sum_{i=o}^{n} X_i, X_i = U_i \cap X,$$

onde os $U_i's$ são essencialmente $\mathbb{C}^n$.Definiremos a dimensão de X como sendo o máximo das dimensões dos X_i.
Vale então um resultado analógo ao que enunciamos para sub-espaços lineares: Para que duas variedades V_1, (de dimensão n_1), V_2, (de dimensão n_2) $\subset \mathbb{P}^n$ se interceptem obrigatoriamente é preciso que $n_1 + n_2 \geq n$.Se $n_1 + n_2 > n$,$dim(V_1 \cap V_2) > 0$. Enunciaremos aqui uma versão fraca do Teorema de Bézout sem demonstração. A demonstração de uma versão mais forte,bem como dos resultados aludidos acima sobre dimensão pode ser encontrada em ([9],pg.47).

Teorema 1 *Uma hipersuperfície* $F \subset \mathbb{P}^n$ *de grau d intercepta uma reta genérica em d pontos.*

Usaremos no texto frequentemente o termo genérico significando que a "maioria"das figuras de um certo tipo possuem uma determinada propriedade. Aqui queremos dizer que a "maioria"das retas de $\mathbb{P}^n$ intercepta F em d pontos. Este conceito pode ser formalizado mas esta formalização escapa aos objetivos destas notas.

Consideremos um outro exemplo sobre a família de cônicas de $\mathbb{P}_2$ e seu espaço de parâmetros.

Exemplo 17 *Seja dada uma cônica* $C \subset \mathbb{P}_2$ *e considere o conjunto* $H \subset \mathbb{P}^5$ *de todas as cônicas que são tangentes a C. Pode-se mostrar (Veja [**?**].) que H é uma hipersuperfície de* $\mathbb{P}^5$ *de grau 6.*

Para contar o número de cônicas que passam por 4 pontos dados e são tangentes a C podemos considerar a interseção de H com os quatro hiperplanos H_1, H_2, H_3, H_4, que parametrizam as cônicas que passam por cada um dos 4 pontos dados. Seja $L = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$. Se os quatro pontos são genéricos L é uma reta que pelo Teorema de Bézout intercepta H em 6 pontos. Concluimos que, genericamente, existem 6 cônicas passando por 4 pontos dados e tangentes a uma cônica C.

Os exemplos 13 e 16 ilustram um tipo de problema que dá origem a toda uma área da Geometria Algébrica: A Geometria Enumerativa. Em Geometria Enumerativa é dada uma família de objetos geométricos e impõe-se condições à família de tal forma que apenas um número finito satisfaçam à estas condições. (No exemplo acima a família é a das cônicas e as condições são ser tangente a uma cônica fixa e passar por 4 pontos.)A Geometria Enumerativa preocupa-se com o cálculo deste número finito. Conforme ficou evidente nos exemplos considerados a resolução de um problema enumerativo passa pelo estudo de um espaço de parâmetros para a família em questão. No exemplo acima o espaço $\mathbb{P}^5$ que parametriza as cônicas foi suficiente para o problema considerado. Em geral, encontrar um espaço de parâmetros adequado para uma determinada família e um determinado problema pode ser uma tarefa delicada . Nos próximos capítulos estudaremos as Variedades Grassmannianas que aparecem como espaço de parâmetros de muitas famílias importantes de objetos geométricos.

1.4 Exercícios

1. Dado $X \subset \mathbb{P}^n$, o conjunto dos polinômios $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]$ que se anulam em X é chamado o ideal de X e denotado por $I(X)$.

   $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]/f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para todo $(a_1, a_2, ..., a_n) \in X\}$.

   Podemos estender a noção de conjunto de zeros de um polinômio a um conjunto qualquer da seguinte maneira: Seja $S \subset \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]$ um conjunto de polinômios. Definimos:

   $$V(S) = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n/f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \text{para todo } f \in S\}.$$

   Mostre que:

   (a) $X \subset Y$ então $I(X) \supset I(Y)$.

   (b) $I(V(S)) \supset S$ para todo subconjunto S de polinômios de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]$.

   (c) $V(I(X)) \supset X$ para todo subconjunto $X \subset \mathbb{C}^n$.

   (d) $X, Y \subset \mathbb{P}^n I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.

2. Dado um ideal $I \subset A$ definimos o radical de I, denotado por $\sqrt{I}$ como sendo o conjunto :

   $$\sqrt{I} = \{a \in A/a^n \in I \text{ para algum } n > 0, n \in \mathbf{Z}.\}$$

   Mostre que se I é um ideal de um anel A então $\sqrt{I}$ é um ideal de A.

3. Um ideal $P \subset A$ é dito primo se sempre que $ab \in P$ e a não pertence a P implica que $b \in P$.

   (a) Mostre que se $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ irredutível então o ideal (f) é primo.

   (b) Mostre que se P é primo então $\sqrt{P} = P$.

4. Um dos resultados centrais da Álgebra Comutativa é o Teorema dos zeros de Hilbert:(A demonstração pode ser encontrada em [22].) Seja $I \subset \mathbb{C}[X, Y]$ um ideal então temos $I(V(I) = tI$.Use o teorema dos zeros de Hilbert (também conhecido como Nullstellensatz) para mostrar que a definição de grau de uma curva plana afim (o caso projetivo é semelhante) é boa.

5. Seja $f \in \mathbb{C}[X, Y], f = \sum f_i$,onde cada f_i é um monômio de grau i. Seja $P \in \mathbb{P}_2$ e suponha que $f(x_0, x_1, x_2) = 0$,para toda escolha de coordenadas homogêneas $(x_0 : x_1 : x_2)$ para P.Mostre que $f_i(x_0, x_1, x_2) = 0$, para qualque escolha de coordenadas homogêneas para P.

6. Mostre que se $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ é um polinômio homogêneo então f se escreve como produto de polinômios de grau um.

7. Um ideal $I \subset \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ é dito homogêneo se $f \in I$ implica que todas as componentes homogênes de f pertencem a I. Seja $I = (f), f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ o ideal de uma curva algébrica projetiva.Mostre que I é um ideal homogêneo.

8. Encontre a condição para que cinco hiperplanos em $\mathbb{P}^5$ se encontrem em umúnico ponto.

9. Seja $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Como T preserva as retas de $\mathbb{C}^3$ passando pela origem temos definida uma aplicação natural $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$,chamada projetividade ou mudança de coordenadas em $\mathbb{P}_2$.Mostre que fixados 4 pares de pontos $P_i, T_i, i = 1, 2, 3, 4 \in \mathbb{P}_2$,existe uma mudança de coordenadas T tal que $T(P_i) = T_i$.

10. Em geral,um isomorfismo linear $T : V \longrightarrow V$,V espaço vetorial de dimensão n+1 induz uma mudança de coordenadas $T : \mathbb{P}_n(V) \longrightarrow \mathbb{P}_n(V)$.Mostre que dados n+2 pares de pontos $(P_i, T_i), P_i, T_i \in \mathbb{P}_n(V)$ existe uma mudança de coordenadas T tal que $T(P_i) = T_i$.

CAPÍTULO 2

A Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}^3$

2.1 Coordenadas de Plücker

A grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$ é o espaço que parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$ da mesma maneira que o $\mathbb{P}^5$ das cônicas parametriza as cônicas do plano projetivo. Ela surge naturalmente sempre que desejamos resolver um problema enumerativo envolvendo retas no espaço. Como exemplo considere o seguinte problema enumerativo: Sejam dadas 4 retas em $\mathbb{P}^3$ em posição geral. Quantas retas de $\mathbb{P}^3$ interceptam as 4 retas dadas? Este problema foi abordado por Schubert no século XIX e resolvido da seguinte maneira. Especialize as quatro retas dadas L_1, L_2, L_3, L_4 de tal maneira que o primeiro par se encontre em um ponto P_1 e o segundo par em um ponto P_2. Temos então duas soluçoẽs: a reta M determinada por P_1, P_2 e a reta N interseção do plano α determinado por L_1, L_2 e o plano β determinado por L_3, L_4.

No século XIX aplicava-se então o princípio da continuidade, devido a Poncelet, que dizia que quando as retas L_i fossem quaisquer o número de soluçoẽs para o problema seria o mesmo. Ainda no século XIX este tipo de solução sofreu objeçoẽs dos matemáticos da época. Daremos uma solução mais formal a este problema introduzindo o espaço de parâmetros adequado: a Grassmanniana de retas.

A Grassmanianna de retas de $\mathbb{P}^3$ é uma generalização do espaço projetivo $\mathbb{P}^3$. Lembre-se que $\mathbb{P}^3$ foi construído da seguinte maneira: Consideramos $\mathbb{C}^4$ e um ponto de $\mathbb{P}^3$ é uma reta de $\mathbb{C}^4$ passando pela origem. No caso da grassmanniana de retas os pontos serão sub-espaços de dimensão dois.

Definição 7 *A Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$ é o conjunto dos subespaços lineares de $\mathbb{C}^4$ de dimensão dois que passam pela origem, que será notado por $\mathbf{G}(\mathbf{2},\mathbf{4})$. Chamaremos os sub-espaços lineares de $\mathbb{C}^4$ de dimensão dois de planos.*

Segue da definição que a Grassmanniana parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$, já que uma reta de $\mathbb{P}^3$ é um plano de $\mathbb{C}^4$ passando pela origem. Vejamos agora como trabalhar com este conjunto.

Uma boa estratégia para estudar um conjunto é cobri-lo por subconjuntos menores cuja estrutura conhecemos. No caso de $\mathbb{P}^n$ fomos capazes de escrever $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ onde cada U_i é essencialmente $\mathbb{C}^n$. Faremos algo parecido com $\mathbf{G}(\mathbf{2},\mathbf{4})$.

Dado um plano $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$ podemos representá-lo por dois vetores linearmente independentes
$a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$ que geram este plano. Ou seja, Λ pode der representado pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Seja

$$U_{12} = \{\Lambda \in \mathbf{G(2,4)} \text{ tal que } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0\}$$

onde Λ está representado por dois geradores como acima. Observe que dada uma representação de um plano $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$ por dois vetores $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^4$ podemos considerar qualquer outro conjunto gerador $b_1, b_2 \in \Lambda$ e escrevê-lo numa matriz como acima e a pertinência de Λ à U_{12} não depende da base escolhida. Segue que podemos escolher geradores b_1, b_2 de forma que cada elemento de U_{12} possui uma única representação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

e reciprocamente cada matriz como acima corresponde a um único plano $\Lambda \in U_{12}$. Assim ,existe uma correspondência biunívoca entre U_{12} e $\mathbb{C}^4$.
Seja

$$U_{ij} = \{\Lambda \in \mathbf{G(2,4)} \text{ tal que } a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} \neq 0\},$$

onde $i < j$. Existem ao todo 6 tais U_{ij}. Vemos então que
$\mathbf{G(2,4)} = \cup_{i<j} U_{ij}$,onde cada U_{ij} corresponde biunivocamente a $\mathbb{C}^4$. Uma das vantagens desta representação é que faz sentido falar na dimensão de $\mathbf{G(2,4)}$.Como cobrimos $\mathbf{G(2,4)}$ por um número finito de U_{ij} todos de dimensão 4 podemos dizer que sua dimensão é 4. Melhor ainda, seremos capazes de identificar $\mathbf{G(2,4)}$ com uma superfície de $\mathbb{P}^5$. Para isto considere $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$ dado por dois geradores:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Seja $p_{ij}, i < j$ o determinante 2x2 obtido considerando as colunas i e j. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 2 *Existe uma correspondencia biunívoca entre os pontos de* $\mathbf{G(2,4)}$ *e os pontos*

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \in \mathbb{P}^5,$$

cujas coordenadas satisfazem a equação:

$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

Demonstração:Dado $\Lambda \in \mathbf{G(2,4)}$ seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

uma matriz que o representa.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{G(2,4)} &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \qquad \text{dada por} \\ \Lambda &\longmapsto (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \end{aligned}$$

onde os $p'_{ij}s$ são os determinantes 2x2 acima. Φ está bem definida pois como $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ e $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$ são linearmente independentes algum dos $p_{ij} \neq 0$. Além disto se

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \end{pmatrix}$$

é uma outra representação para Λ temos $A' = gA$ onde g é uma matriz 2x2 inversível. Denotando por A_{ij} (resp. A'_{ij}) a matriz formada pelas colunas i e j de A (resp. A') temos:

$$A_{ij} = gA'_{ij} \text{ donde, } p_{ij} = det(g)p'_{ij},$$

onde $p_{ij} = det(A_{ij}), p'_{ij} = det(A'_{ij})$. Como $det(g) \neq 0$ segue que

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) = (p'_{12} : p'_{13} : p'_{14} : p'_{23} : p'_{24} : p'_{34})$$

e portanto,Φ está bem definida. As coordenadas (p_{ij}) de Λ são chamadas de coordenadas de Plücker.

A verificacão de que um ponto $\Phi(\Lambda)$ satisfaz a equação acima é fácil:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \quad (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) \; - \; (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \quad (a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14}) \; + \\ (a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14})\,(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) = 0.$$

Reciprocamente suponha que um ponto

$$P = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \; \in \; \mathbb{P}^5,$$

satisfaça a equação acima e que $p_{12} \neq 0$(a demonstração nos outros casos é idêntica). Supondo que $p_{12} = 1$ temos que
$p_{34} = p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}$. Segue que o ponto $\Lambda_0 \in \mathbf{G(2,4)}$ dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{23} & -p_{24} \\ 0 & 1 & p_{13} & p_{14} \end{pmatrix}$$

é tal que $\Phi(\Lambda_0) = (1 : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$ como queríamos. Além disto se $\Phi(\Lambda_1) = P$,temos que Λ_1 é dado pela mesma base acima logo $\Lambda_0 = \Lambda_1$,terminando a demonstração.

2.2 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas

Vimos na seção anterior que $\mathbf{G}(2,4)$ pode ser vista como uma hipersuperfície quádrica $\mathcal{Q} = V(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}^5$ onde:

$$\mathcal{P}(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24,}, P_{34}) = P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0.$$

No restante deste capítulo e no próximo designaremos esta quádrica por $\mathcal{Q}$ e sua equação por $\mathcal{P}$. Um ponto pertencente a $\mathcal{Q}$ será denotado por uma letra maiúscula (P, Q, R,etc.) e a reta que ele representa em $\mathbb{P}^3$ pela letra minúscula correspondente: p, q, r,etc.. Como hipersuperfície de $\mathbb{P}^5$, $\mathcal{Q}$ pode conter subespaços lineares de dimensão menor, retas e planos por exemplo. É o que investigaremos nesta seção. Começaremos pelas retas contidas na grassmanniana. Temos a seguinte proposição.

Proposição 2 *Sejam $p, q \subset \mathbb{P}^3$ retas. A reta $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \subset \mathbb{P}^5$ está contida em $\mathcal{Q}$ se e somente se p e q se interceptam.*

Demonstração:Sem perda de generalidade podemos supor que o ponto de interseção das retas p e q é $(1:0:0:0)$. Sejam $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ e $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ respectivamente dois outros pontos das retas p e q. Podemos representar p e q respectivamente pelas seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

para alguma escolha p_1, p_2, q_1, q_2 ,donde,

$$\left.\begin{array}{ll} \Phi(p) & = P = (1 : p_1 : p_2 : 0 : 0 : 0) \\ \Phi(q) & = Q = (1 : q_1 : q_2 : 0 : 0 : 0) \end{array}\right\} \in \mathcal{Q}\,.$$

A reta $\lambda_1 P + \lambda_2 Q$ satisfaz a equação da quádrica para qualquer λ_1, λ_2 donde $\Phi(\lambda_1 P + \lambda_2 Q) \subset \mathcal{Q}$.

Reciprocamente suponha que a reta $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \subset \mathcal{Q}$. Temos

$$(\lambda_1 p_{12} + \lambda_2 q_{12} : \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 q_{13} : \lambda_1 p_{14} + \lambda_2 q_{14} : \lambda_1 p_{23} + \lambda_2 q_{23} :$$
$$\lambda_1 p_{24} + \lambda_2 q_{24} : \lambda_1 p_{34} + \lambda_2 q_{34}) \in \mathcal{Q}$$

para qualquer valor dos parâmetros λ_1, λ_2,onde $P = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}), Q = (q_{12} : q_{13} : q_{14} : q_{23} : q_{24} : q_{34})$. Substituindo na equação da quádrica temos:

$$\lambda_1{}^2\mathcal{P}(P) + \lambda_2{}^2\mathcal{P}(Q) + 2\lambda_1\lambda_2(p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} - p_{24}q_{13} + p_{23}q_{14}) = 0.$$

Como $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(Q) = 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ temos

$$p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} - p_{24}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0 \tag{2.1}$$

Sejam

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14})\ ,\ a_2 = (a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{24}) &\in p \\ b_1 &= (b_{11} : b_{12} : b_{13} : b_{14})\ ,\ b_2 = (b_{21} : b_{22} : b_{23} : b_{24}) &\in q \end{aligned}$$

Então fazendo $p_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}, q_{ij} = b_{1i}b_{2j} - b_{2i}b_{1j}$ a relação (2.1) significa que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = 0$$

ou seja os quatro pontos $a_1, a_2 \in p$ e $b_1, b_2 \in q$ são linearmente dependentes e portanto as retas p e q se interceptam.

O determinante que aparece na demonstração acima desempenhará um papel fundamental no que se segue. Seu anulamento pode ser visto como uma função das retas p e q acima.Para isto considere seu desenvolvimento em relação às duas primeiras linhas:

$$\Omega_{pq} = p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} - p_{24}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0 \tag{2.2}$$

É claro que as retas p e q se interceptam se e somente se $\Omega_{pq} = 0$. Ω_{pq} é classicamente conhecida como a derivada de $\mathcal{P}$ pelo proceso de polarização ou como a forma polarizada da relação quadrática $\mathcal{P} = 0$. Esta denominação vem da teoria clássica dos invariantes.Voltaremos a tratar do assunto no capítulo 3.Recomendamos ao leitor interessado ([16]).

Observe que de (2.2) vem que se o ponto $(q_ij) \in \mathcal{Q}, \Omega_{pq}$ é a equação do do hiperplano tangente à quádrica $\mathcal{Q}$ no ponto (q_{ij}).

Já sabemos que se duas retas $p, q \in \mathbb{P}^3$ se interceptam então a reta $\lambda_1\phi(p) + \lambda_2\phi(q) \subset \mathcal{Q}$.Será que esta reta parametriza alguma configuração de $\mathbb{P}^3$? A resposta é dada pelo seguinte corolário:

Corolário 1 *Dada uma reta $L \subset \mathcal{Q}, L$ parametriza o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ contidas em um plano e passando por um ponto.Esta configuração é conhecida como feixe (plano) de retas de $\mathbb{P}^3$.*

Demonstração:Seja $\lambda_1 P + \lambda_2 Q$ a reta de $\mathcal{Q}$ com $P = \Phi(p), Q = \Phi(q)$.Da proposição sabemos que p e q se interceptam em um ponto $p_0 \in \mathbb{P}^3$. Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^3$ tais que $p =< p_0, p_1 >$ e $q =< p_0, p_2 >$.Temos então que as retas determinadas por $< p_0, p_1 + \lambda p_2 >$ são todas as retas contidas no plano gerado por $< p_0, p_1, p_2 >$ que passam por p_0.Por outro lado tomando $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0), p_1 = (p_{11} : p_{12} : p_{13} : p_{14})$ e $p_2 = (p_{21} : p_{22} : p_{23} : p_{24})$, vemos facilmente qua as retas $< p_0, p_1 + \lambda p_2 >$ correspondem aos pontos $P + \lambda Q \subset \mathcal{Q}$.

Passaremos agora a considerar sub-espaços lineares de $\mathcal{Q}$ de dimensão dois. Em primeiro lugar faremos duas definições:

Definição 8 *O conjunto de todas as retas contidas em um plano de $\mathbb{P}^3$ é chamado de plano regrado.*

Definição 9 *O conjunto de todas as retas de $\mathbb{P}^3$ que passam por um mesmo ponto é chamado de estrela.*

Diremos que um subconjunto $S \subset \mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4})$ é um espaço linear de retas se $\Phi(S)$ for um sub-espaço linear de $\mathbb{P}^5$.Já vimos que os únicos sub-espaços lineares de $\mathbb{P}^3$ de dimensão 1 são os feixes planos .Em dimensão dois temos:

Proposição 3 *Os únicos sub-espaços lineares de $\mathbb{P}^3$ de dimensão dois são os planos regrados e as estrelas.Não existem sub-espaços lineares de $\mathbb{P}^3$ de dimensão maior que dois.*

Demonstração:Sejam $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{Q}$pontos linearmente independentes de $\mathbb{P}^5$ tais que qualquer combinação linear $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ também representa uma reta de $\mathbb{P}^3$ ou seja tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \in \mathcal{Q}$.Isto significa que qualquer par de retas p_i, p_j do conjunto $p_1, p_2, ..., p_n$ se interceptam.Então p_1, p_2 se interceptam em um ponto $P \in \mathbb{P}^3$ e estão contidas em um plano comum α.Temos duas possibilidades para p_3:

- p_3 intercepta p_1, p_2 em pontos $Q, R \in \mathbb{P}^3$ distintos de P,donde p_3 está contida em α.
- p_3 não está contida em α mas então intercepta p_1, p_2 no ponto P.

No primeiro caso temos que :

$$\Phi^{-1}(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i)$$

é o plano regrado,no segundo a estrela.Em qualquer caso não pode existir uma reta p_4 linearmente independente com p_1, p_2, p_3 e interceptando p_1, p_2, p_3.Segue que n=3 e a proposição está demonstrada.

Já estamos em condições de resolver o problema enumerativo que enunciamos no início do capítulo.Seja $A \in \mathcal{Q}, A = \Phi(a) = (a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34})$ e $\mathbb{P}_(A)$ o hiperplano tangente a $\mathcal{Q} em A$.A equação de $\mathbb{P}_(A)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \Omega_a(X_{12} : \ & X_{13} : X_{14} : X_{23} : X_{24} : X_{34}) = \\ & a_{12}X_{34} - a_{13}X_{24} + a_{14}X_{23} + a_{34}X_{12} - a_{24}X_{13} + a_{23}X_{14}. \end{aligned}$$

Vemos que $\Omega_a(X_{12} : X_{13} : X_{14} : X_{23} : X_{24} : X_{34}) = 0$ para $x_{ij} \in \mathcal{Q}$ se e somente se a reta correspondente intercepta a.Concluimos que

$$\mathbb{P}_(A) \cap \mathcal{Q} \longleftrightarrow \{\text{retas de } \mathbb{P}^3 \text{ que interceptam a tal que } a = \Phi(A)\}.$$

Portanto dadas quatro retas a,b,c,d de $\mathbb{P}^3$ o problema enumerativo que queremos resolver corresponde a encontrar o número de pontos do conjunto:

$$\mathcal{Q} \cap \mathbb{P}_(A) \cap \mathbb{P}_(B) \cap \mathbb{P}_(C) \cap \mathbb{P}_(D),$$

onde $B = \Phi(b), C = \Phi(c), D = \Phi(d)$.Seja $M = \mathbb{P}_(A) \cap \mathbb{P}_(B) \cap \mathbb{P}_(C) \cap \mathbb{P}_(D)$.Temos duas possibilidades:Se os planos $\mathbb{P}_(A), \mathbb{P}_(B), \mathbb{P}_(C), \mathbb{P}_(D)$ são linearmente dependentes então $dimM \geq 2$.Como $dim(\mathcal{Q}) = 4$,segue-se dos comentários que fizemos no capítulo 1(antes do Teorema de Bézout) que $M \cap \mathcal{Q}$ é um conjunto infinito.Se por outro lado os hiperplanos são linearmente independentes então $dim.M = 1$ e temos duas outras possibilidades:

1. M não está contido em $\mathcal{Q}$ e $M \cap \mathcal{Q}$ é constituido por dois pontos coincidentes ou não.

2. $M \subset \mathcal{Q}$ e temos uma infinidade de soluçẽs para o problema.

Nos exercícios você fará a análise das várias possibilidades para este caso.

Temos assim a solução final para o problema proposto:O número de retas de $\mathbb{P}^3$ que interceptam 4 retas dadas pode ser uma reta,duas retas ou infinitas retas.

CAPÍTULO 3

Cônicas da Grassmanniana de Retas

3.1 Quádricas em $\mathbb{P}^3$

Antes de abordarmos o estudo das cônicas da Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}^3$,vamos estudar as superfícies quadricas de $\mathbb{P}^3$ que serão úteis no estudo que faremos das cônicas da Grassmanniana de retas.

No capítulo 1,seção 3,definimos uma Superfície Quadrica de $\mathbb{P}^3(C)$,como sendo o conjunto dos zeros de um polinômio irredutível,não constante
$f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$,de grau dois.Assim uma quádrica de $\mathbb{P}^3$ é dada por $F = V(f)$,onde f pode ser escrita:

$$f(X_0, X_1, X_2, X_3) = a_{00}X_0^2 + a_{01}X_0X_1 + a_{02}X_0X_2 + a_{03}X_0X_3 + \\ a_{11}X_1^2 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 + a_{22}X_2^2 + a_{23}X_2X_3 + a_{33}X_3^2,$$

ou então:

$$f(X) = X^T AX \text{ onde } A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}/2 & a_{02}/2 & a_{03}/2 \\ a_{01}/2 & a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 \\ a_{02}/2 & a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{03}/2 & a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$X = (X_0, X_1, X_2, X_3).$$

Assim como uma cônica pode ser representada por um ponto de $\mathbb{P}^5$ vemos que, como a equação acima possui dez coeficientes , as quádricas de $\mathbb{P}^3$ podem ser parametrizadas por $\mathbb{P}^9(V)$,onde V denota o espaço vetorial das das formas de grau 2 em 4 variáveis.Raciocinando de maneira semelhante ao que fizemos no capítulo 1 vemos então que uma quádrica de $\mathbb{P}^3$ fica determinada pela escolha de 9 pontos de $\mathbb{P}^3$,em posição geral.

Considerando a forma quadrática $f(X) = X^T AX$ temos o seguinte resultado:

Teorema 3 *Se $f(X) = X^T AX$ é uma forma quadrática em X_0, X_1, X_2, X_3 e A é de posto r podemos encontrar uma transformação linear não singular P e constamtes não nulas $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$ tais que :*

$$F(P^{-1}(X)) = a_0Y_0^2 + a_1Y_1^2 + ... + a_{r-1}Y^2,$$

onde $(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) = P(X_0, X_1, X_2, X_3)$.

Demonstração:(ver [14],pg. 274.) Como estamos trabalhando sobre **C** podemos supor que $a_i = 1, i = 0, 1.., r-1$. Vejamos quais são as possibilidades possíveis para $F = V(f)$:

1. $f = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

   Neste caso, a superfície quádrica $F = V(f)$ é conhecida como quádrica não singular.(Veja exemplo 1.13 e figura 1.5)

2. $f = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$

   Neste caso, o ponto $P = (0 : 0 : 0 : 1) \in F = V(f)$,possui a seguinte propriedade:Dado $P_1 \in F$,qualquer ponto da reta PP_1 pertence a F.Uma superfície com esta propriedade é chamada um cone de vértice P.

3. $f = X_0^2 + X_1^2$

   Neste caso ,f pode se fatorar como produto de duas formas lineares e $F = V(f)$ é união de dois planos distintos.

4. $f = X_0^2$ e

   Neste caso,$F = V(f)$ pode ser pensada como um plano duplo.

Nos casos 3 e 4, $F = V(f)$ não constituem uma superfície conforme nossa definição.

3.2 Produto de Espaços Projetivos

Se $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^m$ são espaços projetivos o produto cartesiano $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ não é um espaço projetivo como seria desejável pois dados $x = (x_0 : x_1 : ... : x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $y = (y_0 : y_1 : ... : y_m) \in \mathbb{P}^m$ temos $(kx, y) \neq k(x, y), k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.Para contornar este problema definimos o produto de espaços projetivos via a imersão de Segre, Ψ, da seguinte maneira: Seja

$$\Psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N,$$

dada por

$$\begin{aligned} ((x_0 : x_1 : ... : x_n) \quad , \quad & (y_0 : y_1 : ... : y_m)) \longmapsto \\ & (x_0y_0 : x_0y_1 : ... : x_0y_m : x_1y_0 : ... : x_ny_m) \end{aligned}$$

onde N=(n+1)(m+1)-1. Ψ aplica o produto $\mathbb{P}^n$x$\mathbb{P}^m$,biunivocamente,sobre a superfície de $\mathbb{P}^N$ dada pelos zeros comuns dos seguintes polinômios:

$$V_{ij}V_{kl} - V_{kj}V_{il}, i, k = 0, 1, ..., n; j, l = 0, 1, ..., m$$

onde $V_{ij}, i = 0, 1, ..., n; j = 0, 1, ..., m$ são as coordenadas de $\mathbb{P}^n$.Verificaremos as afirmações acima no caso particular que vai nos interessar na sequência que é quando m=n=1.A demonstração dos demais casos é semelhante.

Seja então:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbf{P}^1 x \mathbf{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1),(y_0 : y_1)) &\longmapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1) \end{aligned}$$

Em primeiro lugar observe que Ψ está bem definida pois dado $(kx_0 : kx_1) \in \mathbf{P}^1, k \neq 0$,temos:

$$\begin{aligned} \Psi((kx_0 : kx_1),(y_0 : y_1)) = \ & (kx_0y_0 : kx_0y_1 : kx_1y_0 : kx_1y_1) \\ & = k(x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1). \end{aligned}$$

A verificação é análoga para $(ky_0 : ky_1) \in \mathbf{P}^1, k \neq 0$.

Ψ aplica $\mathbf{P}^1 x \mathbf{P}^1$ biunivocamente sobre a superfície de $\mathbb{P}^3$(cujas coordenadas estamos denotando por $(V_{00} : V_{01} : V_{10} : V_{11})$) dada por:

$$\mathcal{V} = V(V_{00}V_{11} - V_{01}V_{10})$$

Com efeito,$\Psi(\mathbf{P}^1 x \mathbf{P}^1) \subset \mathcal{V}$.Reciprocamnte dado $v \in \mathcal{V}, v = (v_{00} : v_{01} : v_{10} : v_{11})$ e suponha $v_{00} \neq 0$,por exemplo. Então se $x = (v_{00} : v_{01})$ e $y = (v_{00} : v_{10})$,temos:

$$\Psi(x,y) = (v_{00}v_{00} : v_{01}v_{00} : v_{00}v_{10} : v_{11}v_{00}) = v_{00}v,$$

onde usamos o fato que $v_{11} = v_{10}v_{01}$.Por outro lado vemos que $v \in \mathcal{V}$ determina $x \in \mathbf{P}^1$ e $y \in \mathbf{P}^1$ tais que $\Psi(x,y) = v$ de maneira única ou seja Ψ é injetiva e a demonstração está concluida.

Geometricamente $\mathcal{V} \subset \mathbb{P}^3$ é a quádrica não singular. Fixado $x \in \mathbf{P}^1, x = (a_0 : a_1)$,o conjunto

$$\Psi(x x \mathbf{P}^1) = (a_0y_0 : a_0y_1 : a_1y_0 : a_1y_1).$$

Este conjunto é dado em $\mathbb{P}^3$ pelas equações:

$$a_0V_{00} = a_1V_{10} \text{ e } a_1V_{01} = a_0V_{11}$$

que é a equação de uma reta.

Por outro lado dadas duas retas retas $\Psi(x x \mathbf{P}^1), x = (a_0 : a_1)$ e $\Psi(x' x \mathbf{P}^1), x' = (a'_0 : a'_1)$,suponha que elas tenham um ponto em comum:

$$(a_0y_0 : a_0y_1 : a_1y_0 : a_1y_1) = (a'_0y_0 : a'_0y_1 : a'_1y_0 : a'_1y_1)$$

.Temos então que (se $a'_0, a'_1 \neq 0$) :

$$a_0/a'_1 = a_1/a'_1 \text{ ou seja } (a_0 : a_1) = (a'_0 : a'_1).$$

Se $a'_0 = 0, a'_1 \neq 0$ temos $a'_1 = ca_1, c \neq 0$,o caso $a'_1 = 0$ sendo semelhante. Em qualquer caso vemos que duas retas $\Psi(x x \mathbf{P}^1)$ e $\Psi(x' x \mathbf{P}^1)$ distintas não possuem interseção em $\mathbb{P}^3$. Analogamente,podemos considerar as retas $\Psi(\mathbf{P}^1 x y), y \in \mathbf{P}^1$,obtendo uma segunda família de retas com propriedades anaálogas às da primeira.

São de fácil verificação os seguintes fatos a cerca destas duas famílias:

1. dadas duas retas uma de cada família elas possuem um único ponto de interseção.
2. Dado um ponto v da quádrica existem duas retas contidas na quadrica uma em cada família tais que elas se interceptam em v.

Temos a seguinte caracterização da quádrica não singular:

Proposição 4 *Sejam p_0, p_1, p_2,três retas de $\mathbb{P}^3$ tais que quaisquer duas não se interceptam. Então o lugar das retas que interceptam p_0, p_1, p_2,simultaneamente é uma quádrica não singular.*

Demonstração:Usaremos aqui,bem como no resto deste capítulo a notação do capítulo 2. Seja $P_0 = \Phi(p_0), P_1 = \Phi(p_1), P_2 = \Phi(p_2)$,os pontos correspondentes em $\mathcal{Q} = \Phi(G(2,4))$ e considere $M = \mathcal{Q} \cap \mathbb{P}_(P_0) \cap \mathbb{P}_(P_1) \cap \mathbb{P}_(P_2)$.O conjunto S procurado é o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{P}^3$ tal que $P \in \Phi^{-1}(M)$.Sabemos que S é infinito.Sejam $l_0, l_1 \in S$ e $A_{ij} = p_i \cap l_j$.Sem perda de generalidade podemos supor:

$$A_{00} = (1:0:0:0), A_{01} = (0:1:0:0), A_{10} = (0:0:1:0), A_{11} = (0:0:0:1),$$

escolhendo coordenadas convenientemente.(Veja exercício 11,Cap.1.) Com esta escolha de coordenadas temos:

$$p_0 =< A_{00}, A_{01} >= (x:y:0:0) = \Psi((1:0)\text{x}\mathbf{P}^1)$$
$$p_1 =< A_{10}, A_{11} >= (0:0:x:y) = \Psi((0:1)\text{x}\mathbf{P}^1)$$

Ainda sem perda de generalidade podemos supor que p_2 passa pelo ponto $(1:1:1:1)$. Além disto a interseção de p_2 com l_0, l_1 é da forma $(a_0 : 0 : a_1 : 0)$ e $(0 : a'_0 : 0 : a'_1)$ respectivamente.Segue que p_2 pode ser tomada como a reta $(x : y : x : y)$.

Seja l uma reta qualquer interceptando p_0, p_1, p_2 simultaneamente.Sejam $L_i = l \cap p_i$.Então $L_0 = (\lambda_0 : \mu_0 : 0 : 0), L_1 = (0 : 0 : \lambda_1 : \mu_1)$.A condição para que a reta l determinada por L_0, L_1 intercepte a reta p_2 corresponde ao anulamento do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_0\lambda_2\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_2\lambda_1\lambda_2.$$

Concluimos que $\lambda_0/\mu_0 = \lambda_1/\mu_1$. (se $\mu_0, \mu_1 \neq 0$.)Assim ,se $l \neq l_i$, temos que $L = xL_0 + yL_1 = (x\lambda_0 : x\mu_0 : y\lambda_1 : y\mu_1)$ é dada por

$$\Psi(\mathbf{P}^1 \times (\lambda_0 : \mu_0)) = (x\lambda_0 : x\mu_0 : y\lambda_0 : y\mu_0).$$

Isto mostra que $l \subset \Psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$.

Reciprocamente,dado $x \in \Psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ temos que ele é imagem por Ψ de $((x_0 : y_), (x_1 : y_1))$.Portanto ele pertence a imagem de $(\mathbf{P}^1 \times (x_1 : y_1))$ por Ψ que sabemos ser uma reta que intercepta p_0, p_1, p_2,(pelo que foi demonstrado antes da proposição),concluindo assim a demonstração.

3.3 O Régulo de $\mathbb{P}^3$

Vimos no capítulo II,seção 2,que os únicos sub-espaços lineares de $\mathcal{Q}$ são o feixe em dimensão 1 e o plano regrado e a estrela em dimensão dois.Dadas retas $p_1, p_2, ..., p_m \subset \mathbb{P}^3$ e $P_1 = \Phi(p_1), P_2 = \Phi(p_2), ..., P_m = \Phi(p_m) \in \mathcal{Q}$,vimos que as configurações acima correspondem a pontos $P \in \mathcal{Q}$ tais que $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$, onde quaisquer pares de retas p_i, p_j se intercepta.Se considerarmos retas $p_1, p_2, ..., p_m \subset \mathbb{P}^3$ que não se interceptam sabemos que o sub-espaço linear de $\mathbb{P}^5$ gerado por :

$$P = \sum \lambda_i P_i, \text{não está contido em} \mathcal{Q}.$$

Vamos no entanto considerá-los agora e nos fazer a seguinte pergunta:Para quais valores dos parâmetros λ_i, $P \in \mathcal{Q}$?

Se $m = 2$ e considerarmos $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$,com p_1, p_2,retas reversas contidas em $\mathbb{P}^3$ temos:

$$\Omega_{pp} = \lambda_1^2 \Omega_{p_1 p_1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{p_1 p_2} + \lambda_2^2 \Omega_{p_2 p_2} = 0$$

Como $P_1, P_2 \in \mathcal{Q}$,temos que $\Omega_{p_1 p_1} = 0, \Omega_{p_2 p_2} = 0$,donde $\lambda_1 \lambda_2 = 0$,pois estamos supondo $\Omega_{p_1 p_2} \neq 0$.Segue que $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$.

Consideremos o caso $m = 3$,que é mais interessante.Seja

$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3, \tag{3.1}$$

onde vamos supor que qualquer par de retas p_i, p_j possui interseção vazia.Temos então:

$$\Omega_{pp} = \lambda_1^2 \Omega_{p_1 p_1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{p_1 p_2} + \lambda_2^2 \Omega_{p_2 p_2} + 2\lambda_1 \lambda_3 \Omega_{p_1 p_3} + 2\lambda_2 \lambda_3 \Omega_{p_2 p_3} \lambda_3^2 \Omega_{p_3 p_3} =$$

$$= 2(\lambda_1 \lambda_2 \Omega_{p_1 p_2} + \lambda_1 \lambda_3 \Omega_{p_1 p_3} + \lambda_2 \lambda_3 \Omega_{p_2 p_3}) = 0.$$

Como $\Omega_{p_i p_j} \neq 0$,temos que o lugar dos pontos $P \in \mathcal{Q}$ tais que $\Omega_{pp} = 0$ é a cônica contida na interseção do plano de $\mathbb{P}^5$ dado por $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ com $\mathcal{Q}$ e cuja equação é :

$$= \lambda_1 \lambda_2 \Omega_{p_1 p_2} + \lambda_1 \lambda_3 \Omega_{p_1 p_3} + \lambda_2 \lambda_3 \Omega_{p_2 p_3} = 0.$$

Em geral,sejam $p_1, p_2, ..., p_m \subset \mathbb{P}^3$ retas distintas tais que pelo menos duas não se interceptam.Sejam $P_i = \Phi(p_i)$ e considere $P = \sum \lambda_i P_i$.

Definição 10 *Nas condições acima o conjunto $\Phi^{-1}(P) \subset \mathbb{P}^3$ dos pontos $P \in \mathcal{Q}$ é denominado o régulo associado às retas $p_1, p_2, ..., p_m$*

O régulo é dado pela imagem inversa dos pontos pontos p que satisfazem a equação (3.1) tais que $\Omega_{pp} = 0$.No caso m=3 vimos que o régulo corresponde a pontos $p \in \mathcal{Q}$ que estão sobre uma cônica contida em $\mathcal{Q}$. Ainda neste caso podemos nos fazer a seguinte pergunta:O régulo é alguma superfície conhecida de $\mathbb{P}^3$? A resposta é afirmativa e é dada pela seguinte proposição:

Proposição 5 *Sejam $p_1, p_2, p_3 \subset \mathbb{P}^3$ retas duas a duas reversas e $P = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i$ tal que $R = \Phi^{-1}(P)$ é o regulo determinado por p_1, p_2, p_3.Seja C a quádrica não singular lugar das retas l que se apoiam em p_1, p_2, p_3 simultâneamente.Então $r \in R$ e somente se $r \cap l \neq \emptyset$ para toda l que intercepta p_1, p_2, p_3 simultâneamente.*

Demonstração: Seja $l \subset \mathbb{P}^3$ uma reta que intercepta p_1, p_2, p_3 simultâneamente. Sejam $L = \Phi(l)$ e $r \in \Phi^{-1}(P)$,ou seja tal que $R = \Phi(r) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i$.Temos que:

$$\Omega_{lr} = \Omega(L, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \Omega(L, P_i) = 0,$$

pois l intercepta p_i para todo i.Segue que $r \cap l \neq \emptyset$,para toda reta l nestas condições.

Reciprocamente,seja $r \subset \mathbb{P}^3$,reta tal que $r \cap l \neq \emptyset$para toda l que intercepta p_1, p_2, p_3 simultâneamente.Vamos mostrar que existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que $\Phi(r) = R = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i$.Como na proposição 4 da seção 2 ,podemos supor sem perda de generalidade que que:

$$P_1 = \Psi((1:0) \times \mathbf{P}^1) = (x:y:0:0),$$
$$P_2 = \Psi((0:1) \times \mathbf{P}^1) = (0:0:x:y),$$
$$P_3 = \Psi((1:1) \times \mathbf{P}^1) = (x:y:x:y).$$

Calculando $P_i = \Phi(p_i)$ obtemos:

$$P_1 = (1:0:0:0:0:0), P_2 = (0:0:0:0:0:1), P_3 = (1:0:1:-1:0:1).$$

Foi demonstrado na Proposição 4,seção 2,que as retas l que interceptam p_1, p_2, p_3 simultâneamente são da forma $\Psi(\mathbf{P}^1 \times (\lambda_0 : \mu_0))$ para alguma escolha de $(\lambda_0 : \mu_0) \in \mathbf{P}^1$.Portanto uma reta que intercepta todas as retas l é da forma $\Psi((a:b) \times \mathbf{P}^1)$.Seja $r = \Psi((a:b) \times \mathbf{P}^1) = (ax : ay : bx : by)$ e $R = \Phi(r) = (a^2 : 0 : ab : -ab : 0 : b^2)$.Para encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i = (a^2 : 0 : ab : -ab : 0 : b^2)$.,temos que resolver as equações:

$$\lambda_3 = ab, \lambda_1 + \lambda_3 = a^2, \lambda_2 + \lambda_3 = b^2.$$

Concluimos que :

$$\lambda_1 = a(a-b), \lambda_2 = b(a-b), \lambda_3 = a.b,$$

encontrando portanto um elemento bem definido sempre que $ab \neq 0$,concluindo a demonstração.

Corolário 2 *A quádrica não singular possui dois sistemas de retas que podem ser caracterizados da seguinte maneira: Fixadas três retas p_1, p_2, p_3,duas a duas reversas contidas na quádrica,um sistema de retas é formado pelas retas que interceptam p_1, p_2, p_3 simultâneamente e o outro pelo régulo associado a p_1, p_2, p_3.*

CAPÍTULO 4

Métodos degenerativos em geometria enumerativa

4.1 A evolução da geometria enumerativa na década dos anos 90 do século XX

Uma verdadeira revolução tomou conta da geometria enumerativa a partir do trabalho [13] do matemático russo Kontsevich de 1994. Talvez a maior contribuição deste trabalho seja o uso sistemático dos espaços moduli de mapas estáveis na geometria enumerativa. A partir daí Harris e Caporaso em 3 trabalhos seminais [4], [5], [6] introduziram algumas idéias novas e poderosas. Eles trabalharam com a geometria enumerativa de curvas em superfícies e não utilizaram os mapas estáveis como Kontsevich e sim o esquema de Hilbert, mas tiraram lições importantes do seu trabalho. Talvez a mais importante técnica introduzida por eles e largamente utilizada foi a idéia de que famílias a 1-parâmetro podem ser utilizadas para entender geometria enumerativa de tal forma que apenas degenerações em "codimensão 1" precisam ser estudadas. No final da década de 90 do século XX o matemático Vakil, aluno de Harris, utiliza estas técnicas para estudar a geometria enumerativa de curvas no espaço([19],[18]). A sofisticação destes métodos é grande e os pré-requisitos necessários para entendê-los em profundidade é considerável. Mas, na verdade, as idéias geométricas são surpreendentemente simples e podem ser entendidas por alunos que estão apenas se iniciando no assunto. É este o objetivo deste capítulo. Introduzir o aluno à esta bela e interessante geometria a partir de exemplos simples mas que já dão uma boa idéia da força do método.

Considere inicialmente, o problema, que consideramos no início do capítulo II, de encontrar o número retas que interceptam 4 retas em posição geral, um problema muito simples. Vamos resolvê-lo agora segundo a técnica da teoria de deformação. Para isto fixe um plano $H \subset \mathbb{P}_3$ e considere as 4 retas L_1, L_2, L_3, L_4. Especialize cada uma das retas ao plano H. Ao especializar L_1, nada acontece. Ao especializar L_2, vemos uma solução do problema: As retas L_3 e L_4 que não especializamos encontram o plano H em dois pontos P_1 e P_2, que determinam uma reta ℓ_1 interceptando as 4 retas dadas. Há ainda as soluções passando pelo ponto P de interseção das retas dadas. Especializando a reta L_3

ao plano H, vemos a solução ℓ_2. É a reta determinada por P e por P_2.

Esta maneira de resolver o problema deve ser pensada dinamicamente. Imagine as 4 retas dadas no espaço e o número finito de soluções no caso ℓ_1, ℓ_2. Ao especializarmos as retas ao plano H, as soluções se movem, muitas vezes para o plano H e aí é mais fácil contá-las. Em problemas mais complicados em que estamos considerando curvas de grau maior que 1, ao especializarmos os dados ao plano as soluções se degeneram o que pode parecer uma desvantagem, mas é uma vantagem, pois é precisamente este fato que nos permite contar as soluções. É o que veremos na próxima seção.

4.2 Cônicas interceptando 8 retas no espaço

Considere a família de cônicas no espaço. Queremos calcular o número de cônicas que interceptam 8 retas $L_1, L_2, \ldots, L_8$ em posição geral. Observe que é fácil ver que o número é finito. Toda cônica está em um plano e os planos de $\mathbb{P}_3$ são parametrizados pelo espaço $\check{\mathbb{P}}_3$. Além disto, já vimos no Capítulo I que as cônicas do plano são parametrizadas pelo $\mathbb{P}_5$ das cônicas. Portanto as cônicas no espaço são parametrizadas pelo produto $\mathbb{P}_5 \times \check{\mathbb{P}}_3$. A condição de interceptar uma reta impõe uma condição e portanto se exigirmos que as cônicas interceptem 8 retas, a dimensão do espaço de parâmetros, temos um número finito de soluções.

Passemos ao cálculo deste número finito. Fixamos primeiramente um plano $H \subset \mathbb{P}_3$, como anteriormente e especializamos as 8 retas L_i uma a uma ao plano H. Quando especializamos a reta L_1 nada acontece, ao especializarmos L_2 temos dois tipos possíveis de solução:

1. as soluções que passam pelo ponto $P = L_1 \cap L_2$.

2. as soluções que interceptam L_1 e L_2 em pontos distintos.

Vamos contar os dois tipos de solução. Em ambos os casos especializamos a reta L_3 ao plano H e observamos o que acontece.

1)Queremos contar as cônicas no espaço que passam por P e por L_3. Para isto, especializamos L_4 ao plano H e temos 3 possibilidades.

1a) Cônicas que se quebram na união de duas retas. Ao especializarmos 4 das 8 retas ao plano, 4 permanecem em posição geral no espaço. Sabemos que existem 2 retas ℓ_1, ℓ_2 interceptando as retas L_5, L_6, L_7, L_8. Sejam $P_1 = \ell_1 \cap H$ e $P_2 = \ell_2 \cap H$. Temos 2 soluções a cônica $C_1 = \ell_1 \cup \overline{PP_1}$ e a cônica $C_2 = \ell_2 \cup \overline{PP_2}$.

Além disto, considere uma das retas L_5, por exemplo, que intercepta H no ponto P_5. Considere a reta $L_5' = \overline{PP_5}$. Temos aí mais 2 soluções: as cônicas formadas pela união da reta L_5' com uma das duas retas que interceptam L_5', L_6, L_7, L_8. Mas como escolhemos a reta L_5 poderíamos ter escolhido qualquer uma das retas L_5, L_6, L_7, L_8 totalizando 8 soluções. Adicionadas as duas iniciais temos um total de 10 soluções para o caso 1a).

1b) Cônicas irredutíveis no plano. As 4 retas ainda não especializadas interceptam o plano H em 4 pontos P_5, P_6, P_7, P_8. Temos, como única solução neste caso, a cônica determinada por P, P_5, P_6, P_7, P_8.

1c) Cônicas irredutíveis no espaço passando por 2 dos pontos de interseção das 4 retas tomadas aos pares, $P_1 = L_i \cap L_j, i, j =, 1, \ldots, 4$ e $P_2 = L_k \cap L_l, k, l = 1, \ldots, 4, \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Para contar as soluções especializamos a reta L_5 ao plano. Novamente temos as soluções irredutíveis e as soluções que são união de duas retas. Claramente a solução irredutível é a única cônica determinda pelos pontos P_1, P_2 e $P_6 = L_6 \cap H, P_7 = L_7 \cap H, P_8 = L_8 \cap H$. No caso redutível temos 2 soluções dadas pelas cônicas formadas pela união da reta $\overline{P_1P_2}$ com uma das duas retas que intercepta $L_6, L_7, L_8, \overline{P_1P_2}$.

2)Para contar as cônicas que interceptam L_1, L_2 em pontos distintos especialize L_3 ao plano e conte como no caso 1) as soluções redutíveis e irredutíveis.

2a) cônicas irredutíveis. Claramente existe uma única solução determinada pelos cinco pontos $P_i = L_i \cap H, i = 4, \ldots, 8$.

2b) Cônicas que se cindem na união de duas retas. Tome 4 das retas genéricas por exemplo L_5, L_6, L_7, L_8. Existem duas retas ℓ_1, ℓ_2 que interceptam as 4 retas. Seja $P = L_4 \cap H$ e $P_i = \ell_i \cap H, i = 1, 2$. Temos as soluções $C_1 = \ell_1 \cup \overline{PP_1}$ e $C_2 = \ell_2 \cup \overline{PP_2}$ Considerando todas as escolhas possíveis neste tipo de solução temos $\binom{5}{4} \times 2 = 10$ soluções.

Poderemos também considerar os pontos $P_1 = L_4 \cap H$ e $P_2 = L_5 \cap H$ e as retas ℓ_1, ℓ_2 que interceptam $\overline{P_1P_2}, L_6, L_7, L_8$ simultâneamente. As soluções serão $C_1 = \ell_1 \cup \overline{P_1P_2}$ e $C_2 = \ell_2 \cup \overline{P_1P_2}$. Considerando todas as escolhas possíveis temos $\binom{5}{3} \times 2 = 20$ Total para o caso 2b): 10+20=30.

4.3 Multiplicidade das soluções

Na seção anterior, onde fomos capazes de calcular todos os casos que apareceram, pode ficar parecendo que resolvemos o problema de encontrar o número de cônicas no espaço que interceptam 8 retas dadas. Mas falta considerar uma questão importante, a questão das multiplicidades das soluções. Para entender do que se trata consideremos novamente o problema de calcular o número de retas que interceptam 4 retas no espaço. No início do capítulo resolvemos o problema especializando as quatro retas paulatinamente a um plano fixo H. Como dissemos naquela oportunidade devemos pensar dinamicamente: as soluções que contamos provêm de soluções do problema original e o seu número portanto é o mesmo. Para que isto seja válido no entanto é preciso que saibamos que não há colapsamento de soluções. Com efeito, podemos imaginar, que duas das soluções originais colapsaram a uma das soluções que contamos no plano H, ou seja, esta solução seria múltipla. Neste caso o número que contamos não seria o número desejado.É isto que se entende como problema da multiplicidade das soluções.

Considere, por exemplo, o caso 2a) da seção anterior. Temos inicialmente cônicas passando pelas retas L_1, L_2 do plano. Baixamos a reta L_3 ao plano e vimos que há uma única cônica $C \subset H$ interceptando as retas restantes. Vejamos que esta cônica deve ser contada com multipliciade 8. Consideremos a interseção de C com as retas L_1, L_2, L_3 : $C \cap L_i = P_i, P_i', i = 1, 2, 3$. Se considerarmos apenas os pontos P_1, P_1' vemos que há duas configurações no espaço com este limite. Para ver isto considere a cônica no espaço com os dois pontos P_1, P_1' marcados e a reta L_1 interceptando a cônica em P_1. Imagine agora a configuração baixando ao plano, de tal forma que quando a reta e cônica estiverem no plano a outra interseção da reta com a cônica seja P_1'. Claramente, se L_1 interceptasse a cônica no espaço em P_1' o limite seria o mesmo daí a multiplicidade de 2. Como são 3 retas temos uma multiplicidade total de oito para este caso.

Da mesmo forma, no caso 1b) temos uma multiplicidade de 4, pois ao baixar a reta L_4 ao plano H as interseções com as retas L_3, L_4 em número de 4 determinam esta multiplicidade. Finalmente no caso 1c) ao especializarmos a reta L_5, a solução irredutível aparece com multiplicidade 2.

Assim, começando na linha inferior da figura abaixo podemos contar todas as soluções e obtemos o total 92.

4.4 Cúbicas racionais de $\mathbb{P}_3$ interceptando 12 retas

Considere a família de cúbicas no espaço. Queremos calcular o número de elementos da família que intercepta 12 retas $L_1, L_2, \ldots, L_{12}$ em posição geral. Vejamos inicialmente que este número é finito. Para isto observe que uma cúbica racional de $\mathbb{P}_3$ é um mapa da forma $\Phi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_3$, onde $\Phi(u, v) = (f_0(u, v) : f_1(u, v) : f_2(u, v) : f_3(u, v))$, onde cada $f_i(u, v)$ é um polinômio homogêneo de grau 3, que depende portanto de 4 parâmetros. O mapa depende portanto de $4 \times 4 = 16$ parâmetros. Mas se aplicarmos um automorfismo de $\mathbb{P}_1$ temos a mesma curva. Daí a dimensão projetiva do espaço de parâmetros das cúbicas reversas 16-3-1=12.

Passemos ao cálculo deste número finito. Como anteriormente, fixamos um plano $H \subset \mathbb{P}_3$ e especializamos, uma a uma, as 12 retas L_i ao plano H. Os primeiros passos são idênticos ao caso das cônicas. Ao especializarmos a reta L_1 nada acontece. Quando especializamos a reta L_2 temos as cúbicas passando pelo ponto P de interseção das duas retas e as cúbicas que interceptam as duas retas em dois pontos distintos.Vamos tratar estes dois casos separadamente.

1. Cúbicas que interceptam as retas L_1, L_2 em dois pontos distintos. Para contá-las baixamos a reta L_3 ao plano H e temos duas possibilidades:1a) as cúbicas que se quebram na união de uma cônica e uma reta e 1b) as cúbicas irredutíveis que interceptam L_1, L_2, L_3 em 3 pontos distintos.

   caso 1a): Temos 9 retas arbitrárias $L_4, \ldots, L_{12}$. Duas delas L_4, L_5, por exemplo, interceptam o plano H em 2 pontos e determinam uma reta ℓ. Temos portanto 8 retas $\ell, L_6, L_7, \ldots, L_{12}$ e, pelas seções anteriores, sabemos que existem 92 cônicas por elas. Temos portanto $\binom{9}{2} \times 92$ soluções redutíveis. Além disto, temos também as soluções determinadas pelas cônicas passando por 8 retas, por exemplo, $L_5, \ldots, L_{12}$, em número de 92. Fixe uma destas cônicas e suponha que ela corte o plano H em dois pontos P_1, P_2. Seja P_4 o ponto determinado pela reta L_4 no plano H. Temos assim uma outra configuração redutível determinada pela cônica fixada e a reta $\overline{P_4P_1}$ ou $\overline{P_4P_2}$. O número destas possibiliades é: $9 \times 92 \times 2 = 1656$. Total para o caso 1a): 1656+3312=4968.

caso 1b):Para contar as cúbicas irredutíveis que interceptam as retas L_1, L_2, L_3 em 3 pontos distintos baixamos a reta L_4 ao plano H e examinamos as possibilidades. São elas:

i)a cúbica se quebra em uma cônica irredutível no plano e uma reta. Temos 8 retas arbitrárias. Por quatro delas passam 2 retas.Uma delas mais as outras 4 retas determinam 5 pontos no plano e portanto uma cônica. Número de tais possibilidades:$\binom{8}{4} \times 2 = 140$. Por outro lado, temos também a possibilidade que cinco retas das oito, por exemplo $L_5, \ldots, L_9$ determinam 5 pontos em H e portanto uma cônica C_1. O lugar das retas que se apoiam nas outras 3 retas é uma quádrica Q de $\mathbb{P}_3$ conforme vimos na Proposição [**?**] do capítulo III. Seja $C_2 = Q \cap H$ a cônica de interseção que intercepta C_1 em 4 pontos e temos portanto 4 retas por L_{10}, L_{11}, L_{12} e cada um dos 4 pontos. Temos um total de soluções $\binom{8}{3} \times 4 = 224$. Total para o caso 1bi)140+224=364. Observe que estas soluções aparecem com uma multiplicidade de $16 = 2^4$.

ii)a cúbica se quebra como união de 3 retas. As oito retas arbitrárias se dividem em dois grupos de 4. Cada um dos dois grupos de retas possui 2 retas que os intercepta. Estas retas, por sua vez, interceptam o plano em pares de pontos que determinam uma reta no plano H, determinando configurações de 3 retas:duas se apoiando nos 2 grupos de 4 retas e uma contida no plano H. Temos $\binom{8}{4} \times 4 = 280/2 = 140$. Temos também a possibilidade de duas das retas interceptando o plano determinarem uma reta t em H. As outras 6 se dividem em dois grupos de 3 retas que juntamente com a reta t fornecem uma solução para o problema. Número de soluções: $(8 \times 7 \times \binom{6}{3} \times 4)/2 = 2240$. Total:2240+140=2380. A divisão por dois é devida a simetria da configuração.

iii)a cúbica se quebra na união de uma reta no plano H e uma cônica fora do plano. Deixamos como exercício o cálculo das 2808 possibilidades para este caso.

Há ainda duas outras possibilidades que não podem ser tratadas com o método elementar que estamos utilizando.Vamos abordá-las na próxima seção.

2. cúbicas que interceptam L_1, L_2 no ponto P de interseção das 2 retas. Para contá-las baixamos as retas L_3, L_4 para o plano H e temos 3 possibilidades. As 7632 cúbicas irredutv́eis que que passam pelo ponto P e interceptam as outras duas retas em pontos distintos; as 1312 cúbicas irredutíveis que interceptam as duas primeiras retas no ponto P e as duas outras no ponto Q de interseção delas; e as 920 cúbicas

que se quebram na união de uma reta contida em H passando pelo ponto P e uma cônica fora do plano H. Deixamos a cargo do leitor a verificação dos números acima.

4.5 Algumas questões pendentes; perspectivas

No caso 1b) da seção anterior, dissemos que deixamos de tratar dois casos, que precisam ser abordados, caso desejemos completar o cálculo proposto. Estes dois casos, no entanto, não podem ser abordados com os métodos elementares que empregamos nos demais cálculos. Vamos tratar brevemente deles dando uma idéia da sua dificuldade como uma motivação para estudos posteriores mais sofisticados.

Ambos surgem quando estamos calculando o número de cúbicas que interceptam 3 retas $L_1, L_2, L_3 \subset H$ em pontos distintos. Para calcular este número baixamos a reta L_4 e estudamos as várias possibilidades. Uma delas, que não abordamos ainda, é a possibilidade de termos cúbicas planas singulares pelos 8 pontos de interseção das 8 retas arbitrárias com o plano H. Este número é conhecido classicamente e foi recalculado utilizando vários métodos mais recentes. Recomendamos ao leitor interessado o interessante artigo [3] aonde o assunto é exaustivamente discutido. Aqui diremos apenas que existem 12 tais cúbicas que aparecem com multiplicidade 81, por razões que já abordamos.

O segundo caso é a possibilidade de termos a cúbica se decompondo como uma cônica fora do plano H e uma reta em H com a reta tangente a cônica. Temos 2552 soluções neste caso que aparecem com multipliciade 2. Isto completa o nosso cálculo e temos o total de 80160 cúbicas por 12 retas no espaço em posição geral (veja a figura).

As referências para entender as afirmações feitas no último parágrafo são [19], [18], onde todas as contas feitas de maneira eurística neste capítulo recebem um tratamento formal via o chamado moduli stack de mapas estáveis para $\mathbb{P}_n$ de grau d. Embora o formalismo necessário contenha um grau de sofisticação considerável, o método passa pela geometria que desenvolvemos aqui. Um hiperplano $H \subset \mathbb{P}_n$ é fixado e subespaços lineares de $\mathbb{P}_n$ degeneram para este hiperplano H fixado e o que é feito é acompanhar a degeneração correspondente dos mapas para $\mathbb{P}_n$.

Estas 3 referências podem ser tomadas como uma introdução às técnicas da geometria enumerativa atual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Baker,H.F. : *Principles of Geometry*, Frederick Ungar publish. Co., New York, (1960).

[2] Ehresmann,C. : *Sur la Topologie de Certains espaces Homogènes*,Ann. Math..**35**,(1934).

[3] Caporaso, L.: *Counting curves on surfaces: a guide to new techniques and results* Proceedings of the second European congress of mathematicians, Budapest, 1996.

[4] Caporaso, L.; Harris, J. : *Counting Plane Curves of any genus*, Invent. Math. **131**, no. 2,(1998) 345-392.

[5] Caporaso, L.; Harris, J. : *Enumerating rational curves: the rational fibration method*, Compositio Math. **113**, no. 2,(1998) 209-236.

[6] Caporaso, L.; Harris, J. : *Parameter spaces for curves on surfaces and enumeration of rational curves*, Compositio Math. **113**, no. 2,(1998)155-208.

[7] Fulton, W.:*Algebraic Curves*, Benjamin, Reading-Mass., (1969).

[8] Griffiths, P. e Harris, J. : *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons , New York, (1978).

[9] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[10] Kleiman, S. L. :*Problem 15.Rigorous Foundation of Schubert Enumerative Calculus*, Mathematical Developments arising from Hilbert Problems, Proc. Sympos. in Pure Math. **28**, AMS, (1976), 445-482

[11] Kleiman, S. L. : *Chasles's Enumerative Theory of Conics : A Historical Introduction,* M. A. A. Studies in Mathematics **20**, 117, (1980).

[12] Kleiman , S.L. e Laksov, D.: *Schubert Calculus*, Am. Math. Monthly **79**, 1972, pg.1061-1082.

[13] Kontsevich, M. e Manin, Y. : *Gromov-Witten classes, quantum cohomolgy and enumerative geometry,* Comm. Math. Phys., **164**, 1994, pg.525-562.

[14] Lang, S. : *Linear Algebra*, Addison-Wesley, Reading-Mass.,(1971).

[15] Semple, J.G. e Roth, L. : *Algebraic Geometry*, Clarendon Press, Oxford, (1949).

[16] Semple, J.G., e Kneebone, G.T.: *Algebraic Projective Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1952.

[17] Spindola, P., Quezada R., Tapia-Recillas, H.: *Cônicas Proyectivas*, Notas para 3º Colóquio do Dep. de Matemáticas do I.P.N., México, (1983).

[18] Vakil, R. : *The enumerative geometry of curves via degeneration methods,* Tese de doutoramento, Harvard University, Cambridge, 1997.

[19] Vakil, R. : *The enumerative geometry of rational and elliptic curves in projective space* J. Reine angew. Math. **529**(2000), 101-153.

[20] Vainsencher, I. : *Cônicas Projetivas*, Notas para a 5ª Escola de Álgebra , IMPA, (1978).

[21] Vainsencher, I. : *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Notas para o 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas , (1979) .

[22] Zariski,O. e Samuel,P. : *Commutative Algebra,Vol.II*, Springer-Verlag,(1960).