II BIENAL DA SBM

25 a 29 de outubro de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Quatro Cores e Matemática

João Carlos V. Sampaio (UFSCar)
sampaio@dm.ufscar.br

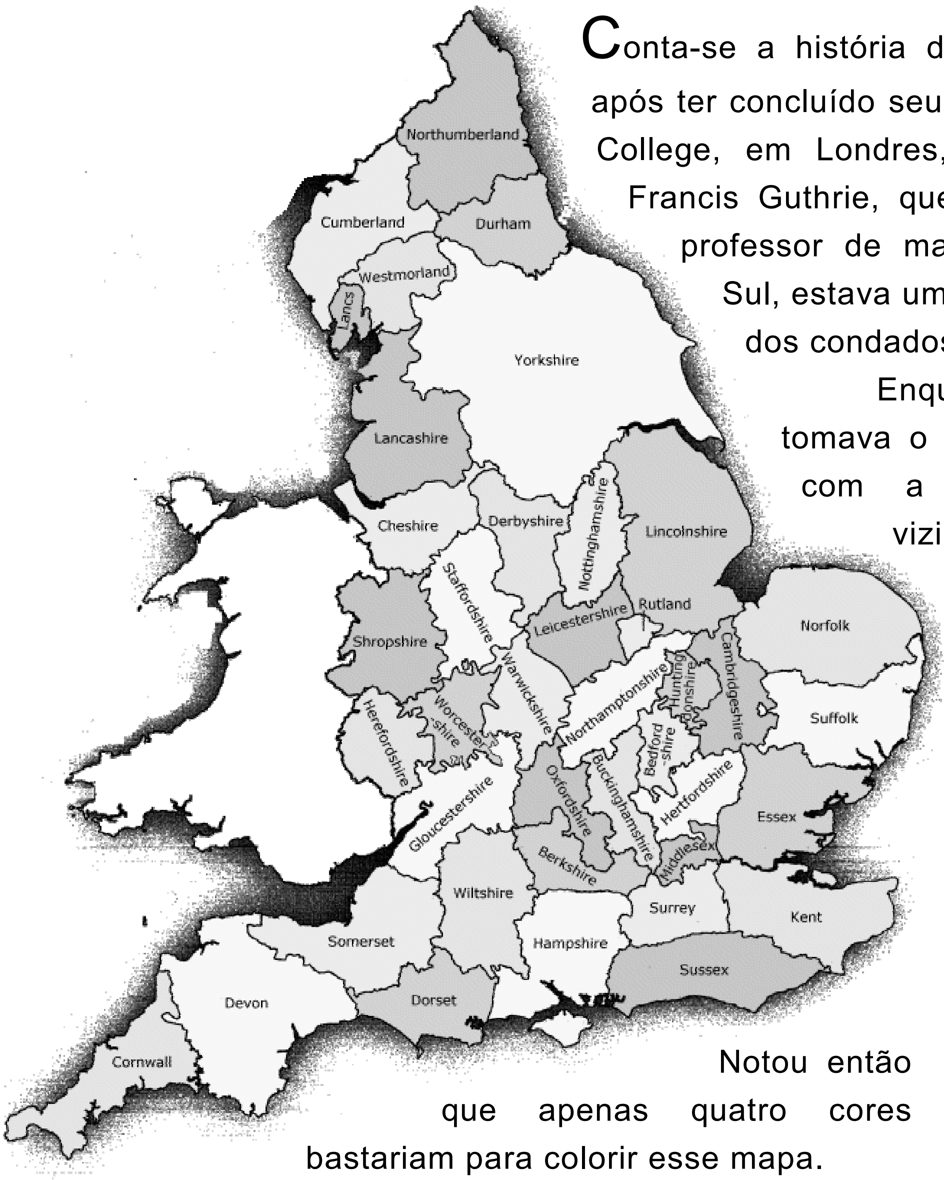
O teorema das quatro cores afirma que "todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes".

Neste minicurso, de nível elementar, são delineados o desenvolvimento da história do problema e a demonstração do teorema das cinco cores, através do teorema de Euler para grafos planos.

Quatro Cores e Matemática

João Carlos V. Sampaio
DM–UFSCar
sampaio@dm.ufscar.br

O problema de Guthrie (o estudante que entrou para a história da matemática por ter formulado uma boa questão)



Conta-se a história de que, em 1852, logo após ter concluído seus estudos no University College, em Londres, o jovem matemático Francis Guthrie, que mais tarde tornou-se professor de matemática na África do Sul, estava um dia colorindo um mapa dos condados da Inglaterra.

Enquanto coloria o mapa, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países vizinhos que tivessem alguma linha de fronteira em comum.

Notou então que apenas quatro cores bastariam para colorir esse mapa.

Experimentalmente, conseguiu colorir vários outros mapas, fazendo uso de apenas quatro cores.

Sendo matemático, tentou demonstrar que

quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa, mas uma tal demonstração mostrou-se longe de ser fácil. Repassou então o problema a seu irmão, Frederick Guthrie, então estudante de matemática da mesma faculdade. Este, por sua vez, formulou o problema a seu professor, o grande Augustus De Morgan, aquele das leis de De Morgan da teoria dos conjuntos.

O professor Augustus De Morgan encaminha o problema a seus colegas

Tal como Guthrie, De Morgan sabia que três cores são insuficientes para colorir certos mapas, ou seja, para colorir certos mapas são necessárias pelo menos quatro cores. Este é o caso do mapa (inventado) da Figura 1.

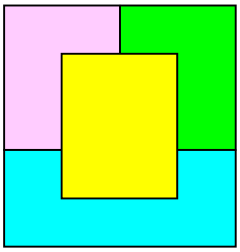
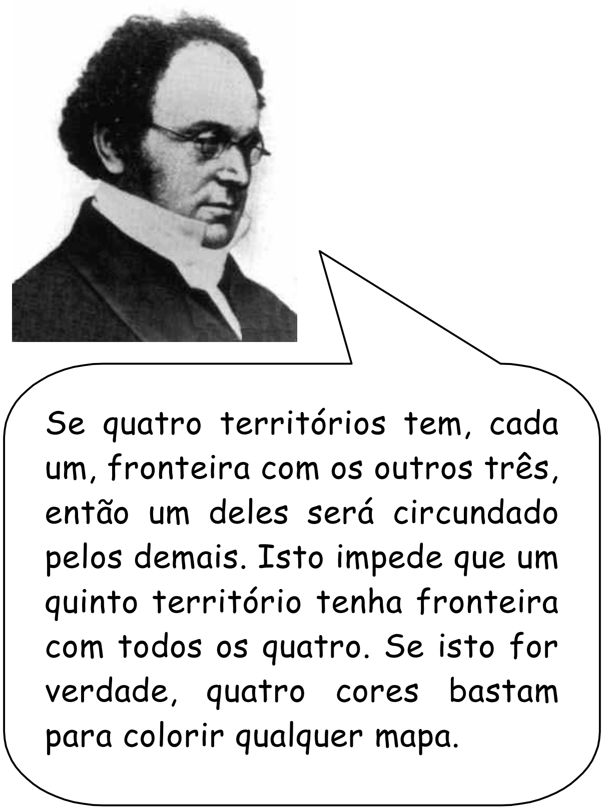


Figura 1. Não é possível colorir este mapa com menos de quatro cores.

Augustus De Morgan argumentou que, em qualquer mapa, não existem cinco países tais que cada um tem fronteira com os outros quatro, ou seja, em cada agrupamento de cinco países, ao menos dois deles não são vizinhos. Este resultado será deduzido adiante. No entanto, uma tal propriedade não é suficiente para garantir que quatro cores sejam sempre suficientes para colorir todo mapa.



No mapa da Figura 2, não existe nenhum aglomerado de quatro países tais que cada um tenha fronteira com os outros três e, no entanto, não é possível colori-lo com apenas três cores.

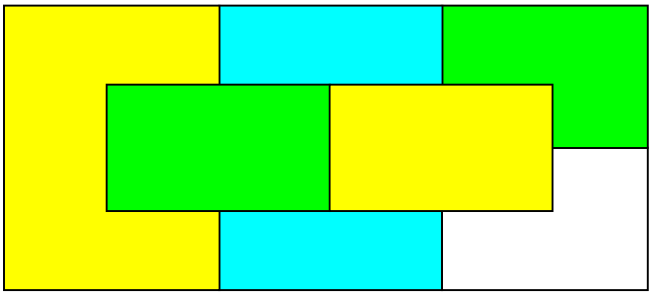


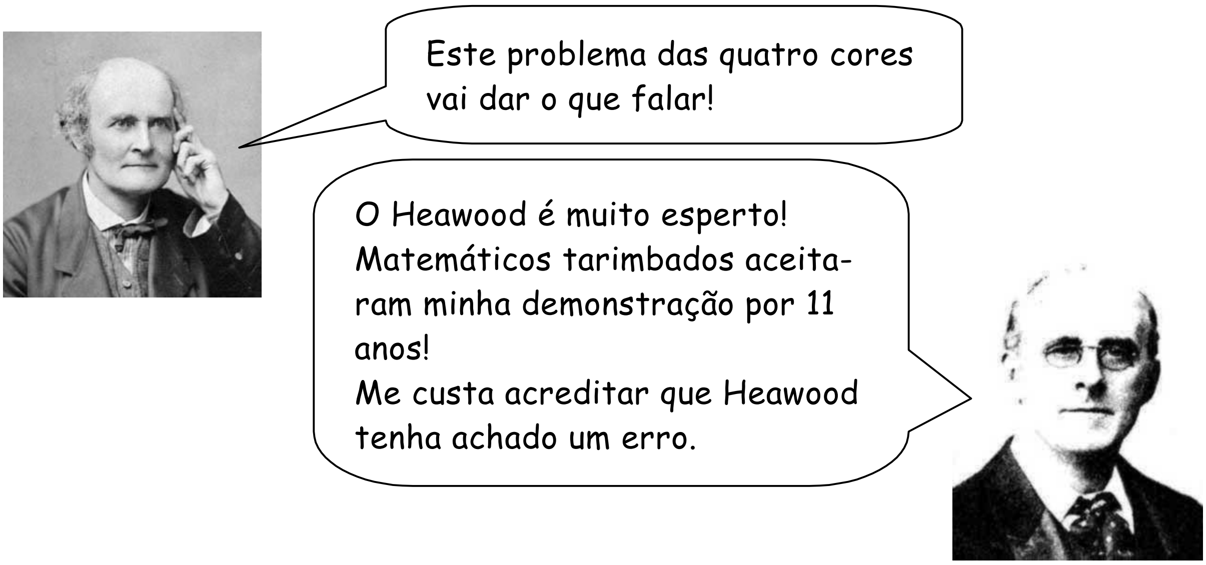
Figura 2. Neste mapa, em todo agrupamento de quatro países, dois deles não são vizinhos, e no entanto três cores não são suficientes para colori-lo.

De Morgan passou o problema a seus estudantes e a outros matemáticos. Dentre esses matemáticos, estava Sir William Hamilton, criador dos quatérnios.

Em 1878, 26 anos depois de Guthrie tê-lo formulado, o problema foi divulgado pela London Mathematical Society, através de seu presidente, Arthur Cayley. A partir daí, o problema conquistou o interesse da comunidade matemática britânica

Em 1879, um ano depois da divulgação do problema por Arthur Cayley, Alfred Bray Kempe publicou um artigo onde supostamente dava uma demonstração de que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Porém, em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood, através de um contra-exemplo, apontou um erro sutil e irreparável na demonstração de Kempe.

Heawood foi, no entanto, capaz de salvar parte da demonstração de Kempe e demonstrar que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Essa demonstração nós a veremos mais adiante.



O mapa de Martin Gardner

Em 1º de abril de 1975, Martin Gardner publicou, na revista americana Scientific American, um mapa que, segundo ele, não era possível colorir com apenas quatro cores.

Na Figura 3, reproduzimos o mapa de Gardner para que o leitor tente colori-lo com apenas quatro cores.

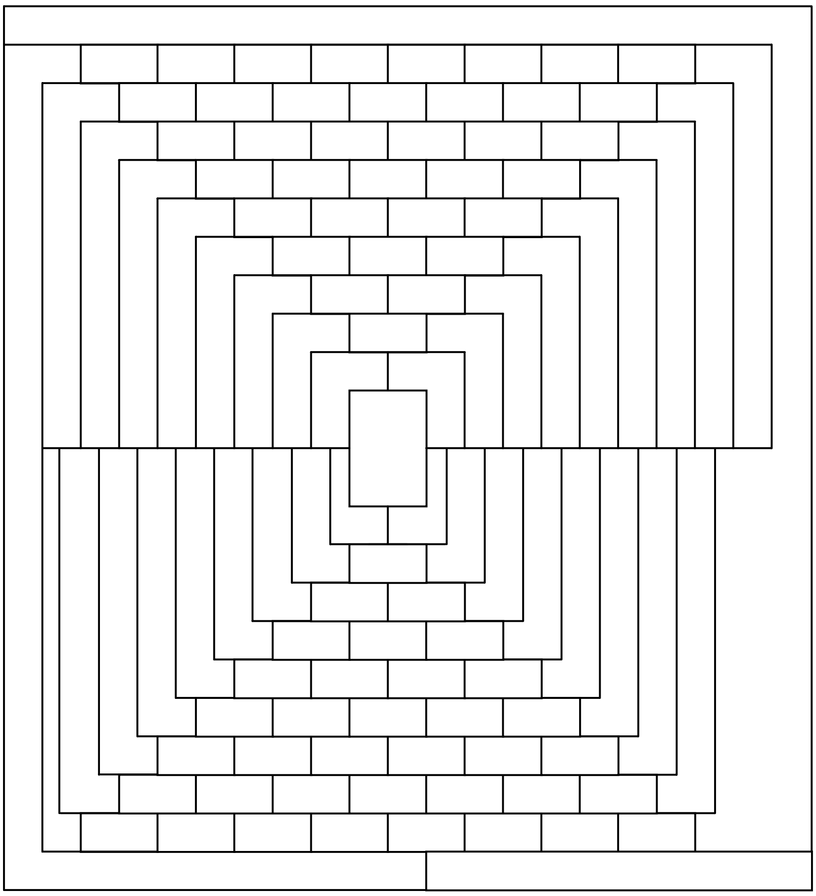
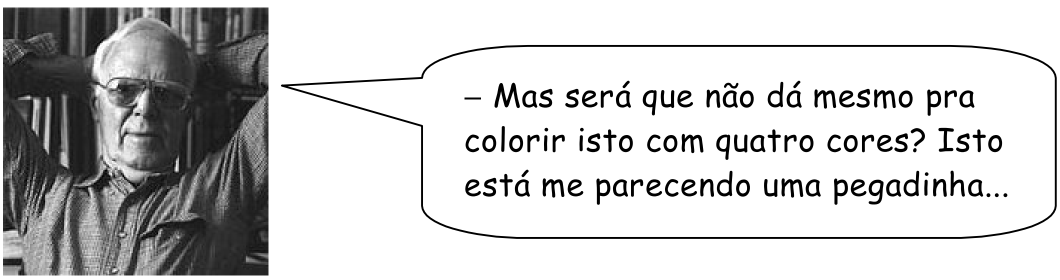


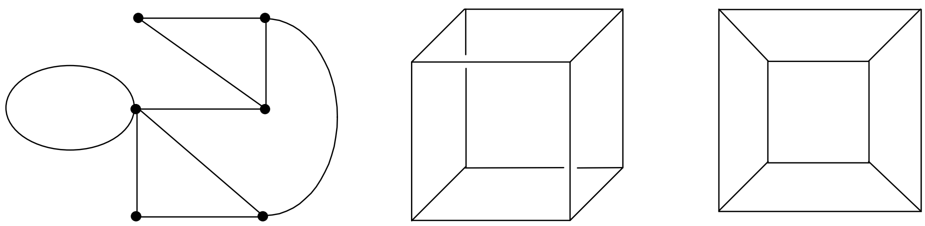
Figura 3. Segundo Gardner, não é possível colorir este mapa usando apenas quatro cores.



Grafos (um kit de ferramentas para estudo do problema)

Um grafo é uma coleção finita de pontos, chamados seus vértices, com vários pares desses pontos ligados por arcos ou segmentos, chamados arestas. Cada aresta tem dois vértices como extremidades (essas duas extremidades podem coincidir e aí temos um laço), e duas arestas só podem ter em comum pontos de suas extremidades.

O grafo é planar se podemos redesenhá-lo em um plano, mantendo a mesma estrutura combinatória (estrutura de incidência) de seus vértices e arestas. Às vezes isto é possível deformando, entortando, encolhendo ou esticando suas arestas, de modo a torná-lo subconjunto de um plano. Diremos que um grafo é plano quando seus vértices e arestas estão todos em um plano.



(a) (b) (c)

Figura 4. (a) Um grafo, no qual as duas extremidades de um arco coincidem; (b) grafo planar das arestas de um cubo; (c) realização do grafo das arestas de um cubo como um grafo plano.

Cada aresta de um grafo pode ser "orientada", escolhendo-se uma de suas extremidades como seu vértice inicial e a outra como vértice final. Um caminho, em um grafo, é uma seqüência de arcos (arestas), que podem ser orientados de tal modo sempre que a e b são dois arcos consecutivos dessa seqüência, o vértice final de a é o vértice inicial de b. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ um caminho em um grafo, o vértice inicial de a_1 é chamado vértice inicial do caminho, e o vértice final de a_n é o vértice final do caminho.

Um caminho é um caminho "simples fechado", ou um "circuito", se seus vértices inicial e final coincidem, e cada outro vértice seu é comum a exatamente duas arestas.

Um grafo é conexo quando, sendo A e B dois vértices quaisquer do grafo, existe um caminho no grafo de vértice inicial A e vértice final B.

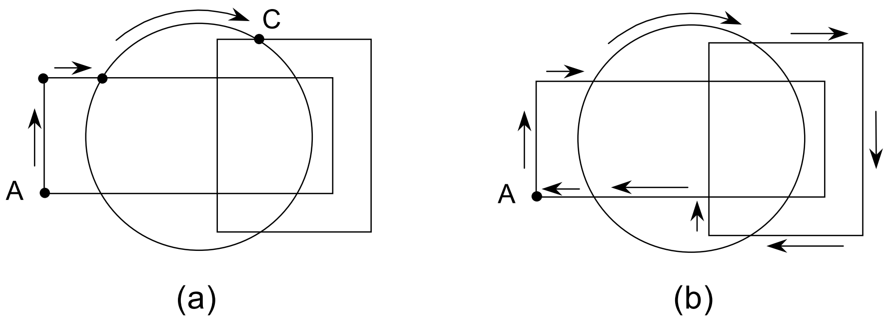


Figura 5. (a) Um caminho, em um grafo plano conexo, do vértice *A* ao vértice *C*; (b) Um circuito, em um grafo plano conexo.

Sendo dado um grafo plano, as várias regiões conexas do plano, formadas pelos pontos fora do grafo, definem as faces do grafo. Essas regiões conexas tem a propriedade de que no interior de cada uma delas é possível ir de um ponto a outro por uma curva contínua que não encontra nenhum arco do grafo. As arestas e vértices da fronteira de uma face também fazem parte da face.

A equação de Euler para grafos planos conexos

Nesta seção demonstraremos uma propriedade de grafos planos, que nos será útil na demonstração de que todo mapa pode ser colorido com cinco cores. Trata-se do teorema de Leonhard Euler, enunciado como segue.

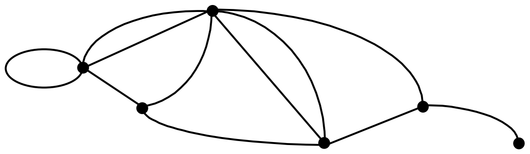
O teorema original de Euler, datado do século 18, referia-se a vértices, arestas e faces de poliedros convexos, mas aplica-se também a grafos planos conexos

Teorema. *Se um grafo plano conexo tem* v *vértices,* a *arestas e* f *faces, então*

$$v - a + f = 2$$

Demonstração (ou esboço de uma demonstração). Este é um teorema cuja demonstração requer cuidados. Faremos aqui um esboço de uma demonstração através de algumas idéias intuitivas.

Um grafo plano conexo pode ter vértices de valência 1, isto é, vértices que são extremidades de somente uma aresta, como o último vértice à direita no grafo da Figura 6a. Chamaremos tais vértices de "vértices livres".



(a) (b)

Figura 6.

Removendo-se esse vértice livre e a aresta que o contém, teremos um novo grafo, como na Figura 6b, com v' vértices, a' arestas e f' faces, sendo v' = v – 1, a' = a – 1, e f' = f. Neste caso então

$$v' - a' + f' = (v - 1) - (a - 1) + f = v - a + f$$

Se o novo grafo, assim obtido, continuar a ter vértices livres, continuamos a removê-los, como acima, mantendo constante o número de Euler
v – a + f.

Se o novo grafo for como o da Figura 6b, sem vértices livres, então existirá nele algum caminho fechado.

A demonstração deste fato é a seguinte. Partindo de um vértice qualquer, construa um caminho no grafo, escolhendo aleatoriamente uma aresta (orientada) inicial, que tenha o vértice como extremidade inicial e, para cada vértice visitado, escolha uma nova aresta (não usada anteriormente), apoiada nesse vértice, para prosseguir. Em algum momento, não haverá mais arestas disponíveis, pois o grafo é finito, e o caminho será forçosamente terminado. Como o grafo não tem vértices livres, o último vértice visitado, desse caminho, será um vértice já visitado anteriormente. Assim, o caminho terá pelo menos um de seus vértices visitado duas vezes. O primeiro vértice, do caminho, que é visitado pela segunda vez, é a extremidade final de um caminho fechado no grafo.

Inventei os grafos, não exatamente como são vistos hoje, para resolver o problema das pontes de Koenigsberg, já ouviu falar? O meu teorema sobre poliedros convexos, dizendo que v – a + f = 0, parece que já era sabido por Descartes, mas eu descobri-o sozinho.

Removendo-se uma aresta de um caminho fechado, no grafo da Figura 6b, podemos ter uma das situações da Figura 7:

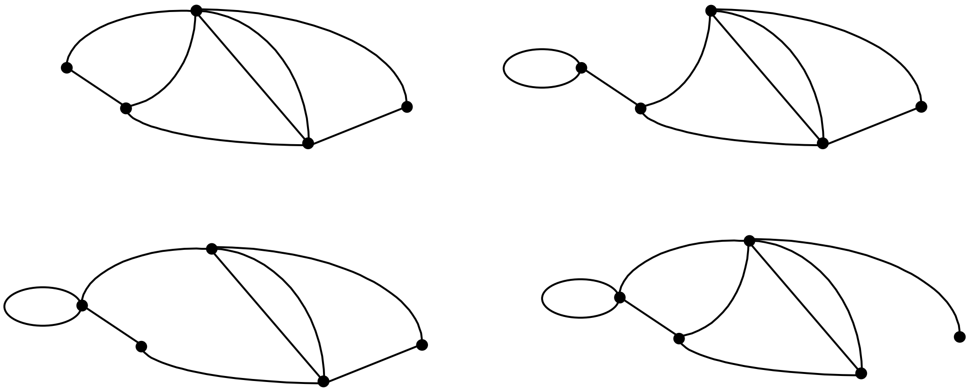


Figura 7.

Note que, então, sendo v'', a'' e f'' os números de vértices, arestas e faces do novo grafo, teremos v'' = v, a'' = a – 1, e f'' = f – 1 (não havendo vértices livres, a remoção de uma tal aresta provoca diminuição do número de faces, pela "fusão", em uma única face, das duas faces que a contém).

Aqui fizemos uso implícito do *Teorema de Jordan para curvas simples fechadas*: toda curva simples fechada divide o plano em três partes disjuntas e conexas: a curva e duas outras partes fora dela, sendo uma ilimitada (exterior à curva) e outra limitada (interior à curva). Ou seja, todo ponto do plano estará ou na curva ou em uma das duas regiões conexas separadas pela curva.

Note que removendo-se uma aresta de um caminho fechado, o grafo continua conexo.

Assim, neste caso teremos:

$$v'' - a'' + f'' = v - (a - 1) + (f - 1) = v - a + f$$

Assim procedendo, isto é, removendo arestas com vértices livres quando existirem, e arestas de caminhos fechados quando não houver vértices livres, preservamos o número de Euler v – a + f. Finalmente, neste processo de desmonte do grafo, chegaremos a um grafo com uma só aresta. Neste último grafo, temos v = 2 e a = f = 1, ou v = a = 1 e f = 2 (faça um bom desenho para verificar isto), e portanto v – a + f = 2. Assim sendo, em vista das observações acima, para o grafo original, temos também

$$v - a + f = 2. \qquad \blacksquare$$

Todo mapa tem um país com no máximo cinco vizinhos

A ordem (ou valência) de um vértice, em um grafo, é igual ao número de extremidades de arestas que nele se apoiam (um laço contribui com duas extremidades). Um mapa é um grafo plano, cujas faces tem fronteiras que são caminhos simples fechados do grafo. Em um mapa, cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces. *Adicionalmente, consideraremos que, em um mapa, todos os vértices tem ordem* ≥ 3. Esta é uma hipótese técnica imprescindível para os resultados que deduziremos a seguir.

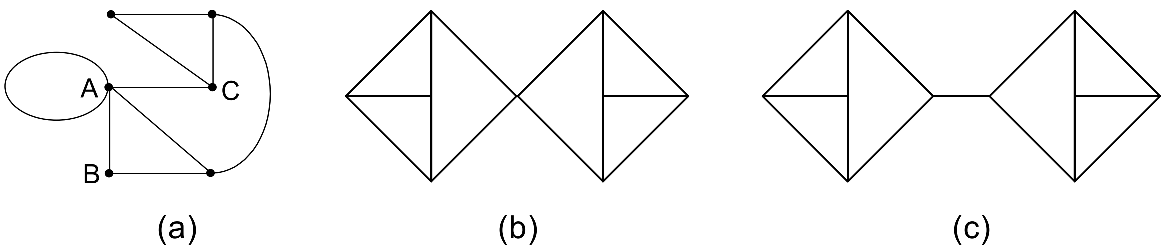


Figura 8. (a) Um mapa com 5 faces. O vértice A tem valência 5. Os vértices B e C tem valências 2 e 3 respectivamente. (b) Grafo que dá origem a um mapa de 7 faces. (c) grafo que não dá origem a um mapa (pense nisso).

Teorema. *Todo mapa tem uma face com no máximo 5 arestas, ou seja, um mapa não pode ter todas as faces com 6 ou mais arestas.*

Demonstração. Suponhamos que o mapa tem v vértices, a arestas e f faces.

Cada vértice, tendo ordem ≥ 3, é extremidade de pelo menos 3 arestas, e cada aresta tem dois vértices como extremidades.

Logo, contando-se o número total de vértices, multiplicado por 3, estaremos contando o menor número possível de extremidades de arestas do mapa. Aqui estamos considerando que cada aresta tem duas extremidades, mesmo se for um laço. Em outras palavras,

$$3v \leq 2a$$

e então $3v - 2a \leq 0$.

Pelo teorema do número de Euler, teremos $v - a + f = 2$, e então, como $3v \leq 2a$, temos $6 = 3v - 3a + 3f \leq 2a - 3a + 3f = 3f - a$, e assim

$$3f - a \geq 6$$

Seja f o número de faces do mapa.

Enumeremos essas faces como face 1, face 2, ... , face f. Consideremos que a face 1 tem a_1 arestas (lados), a face 2 tem a_2 arestas, etc., e a face f tem a_f arestas. O número

$$(a_1 + a_2 + ... + a_f) / f$$

expressa então o número médio de arestas por face.

Observe que na soma $a_1 + a_2 + ... + a_f$ cada aresta é contada duas vezes, pois em um mapa cada aresta é compartilhada por duas faces. Portanto

$$a_1 + a_2 + ... + a_f = 2a$$

sendo a o número total de arestas.

Assim, a média de arestas por face é dada por

$$2a/f$$

Como $3f - a \geq 6$, temos $a \leq 3f - 6$, e então $2a \leq 6f - 12$.

Assim sendo

$$2a/f \leq 6 - 12/f$$

e portanto

$$2a/f < 6$$

Sendo a média de aresta por face, 2a/f, menor que 6, concluímos que alguma face do mapa terá menos que 6 arestas.

Portanto, o mapa tem alguma face com 2, 3, 4 ou 5 arestas. ■

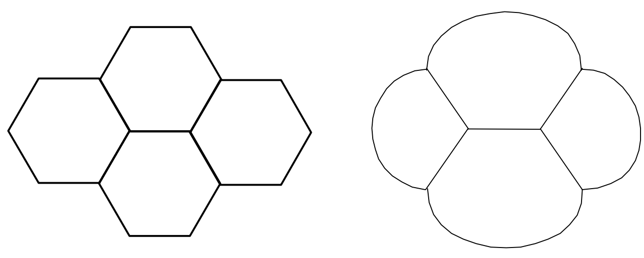


Figura 9. *O mapa à esquerda parece ter todas as faces com 6 ou mais arestas (a face ilimitada tem 14 lados), contradizendo o teorema que acabamos de demonstrar, não é verdade? No entanto, isto se dá porque aqui estamos permitindo vértices de valência 2. Se desconsiderarmos os vértices de valência 2, o mapa fica equivalente ao mapa da direita, cujas faces tem no máximo 4 lados.*

Um grafo é um grafo "completo" quando para todo par de vértices do grafo, há uma e exatamente uma aresta tendo-os como extremidades, ou seja, todo par de vértices do grafo define uma aresta e o grafo não tem arestas "múltiplas", que são duas ou mais arestas compartilhando os mesmos vértices como extremidades.

O grafo completo com n vértices é chamado de K_n.

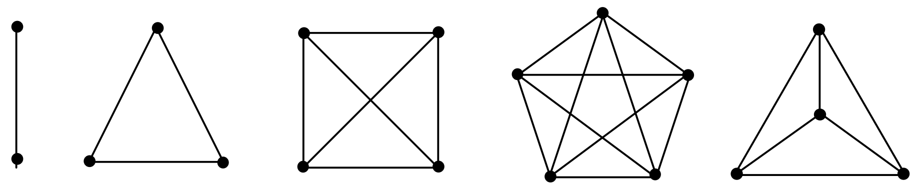


Figura 9. Da esquerda para a direita, os quatro primeiros grafos são os grafos completos K_2, K_3, K_4 e K_5. O quinto grafo é uma reconstrução de K_4, mostrando que K_4 é planar.

Teorema. *O grafo completo de* 5 *vértices,* K_5*, não é planar, ou seja, é impossível desmontá-lo e reconstruí-lo em um plano.*

Demonstração. Notemos que, no grafo completo de 5 vértices, temos v = 5, e a = 10. Suponhamos que K_5 é um grafo planar. Sua representação em um plano define um mapa cujo número f de faces é dado pelo número de Euler, ou seja,

$$f = 2 - v + a = 2 - 5 + 10 = 7.$$

As arestas que definem a fronteira de cada país constituem um circuito. Em K_5, toda aresta é parte de um circuito e cada circuito tem no mínimo 3 arestas (confira isto examinando o diagrama de K_5 na figura acima), portanto, cada país desse mapa tem um mínimo de 3 arestas em sua fronteira.

No entanto, considerando o número médio de arestas por face, 2a/f, temos

$$2a/f = 20/7 < 3,$$

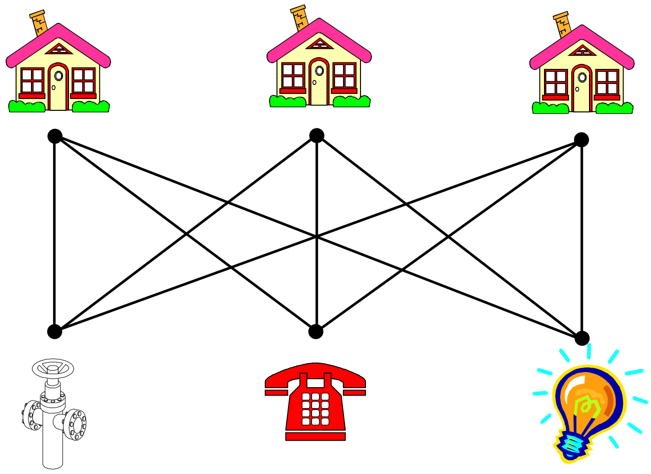
de onde somos forçados a deduzir que alguma face tem menos que três arestas.

Portanto, K_5 não é planar. ■

Utilizando o número médio de aresta por face de um mapa plano, 2a/f, podemos responder à seguinte questão, um quebra-cabeça clássico.

O problema das três fontes de suprimento

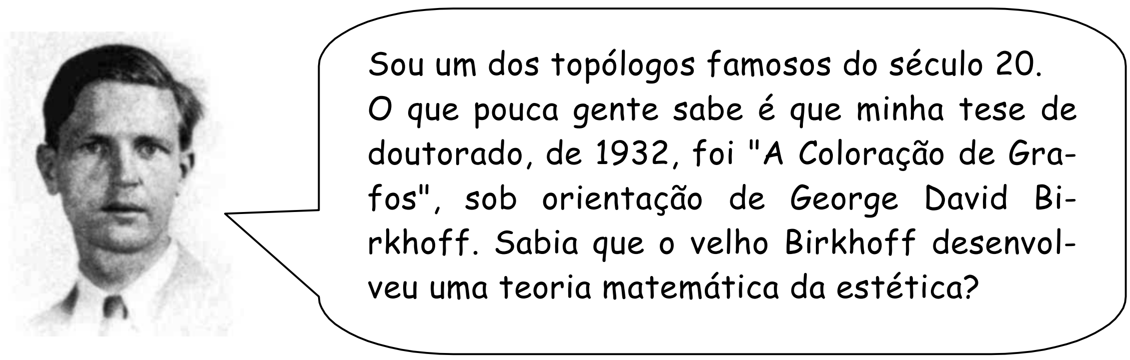
Três fontes de suprimento provêem água, telefone e eletricidade a três casas.



O mapa das linhas de suprimento dá origem a um grafo de 6 vértices e 9 arestas, como na figura. É possível descruzar as linhas dos diagrama? Ou seja, é possível redesenhar esse grafo em um plano? Para responder a esta questão, suponha que o grafo possa ser reconstruído em um plano e observe o número médio de arestas por face desse grafo.

O grafo dual de um mapa

Nos anos 1930, Hassler Whitney introduziu a idéia de grafo dual de um mapa. Geometricamente, a construção do grafo dual de um mapa é feita da seguinte maneira. Dado um mapa planar, demarcamos um novo vértice no interior de cada uma de suas faces (a "capital" do país). Em seguida, para cada dois países vizinhos, com alguma linha de fronteira (aresta) em comum, desenhamos uma aresta ligando as duas capitais, cortando a fronteira comum de ambos. Consideremos por exemplo, o mapa (topológico) da América do Sul da Figura 10.



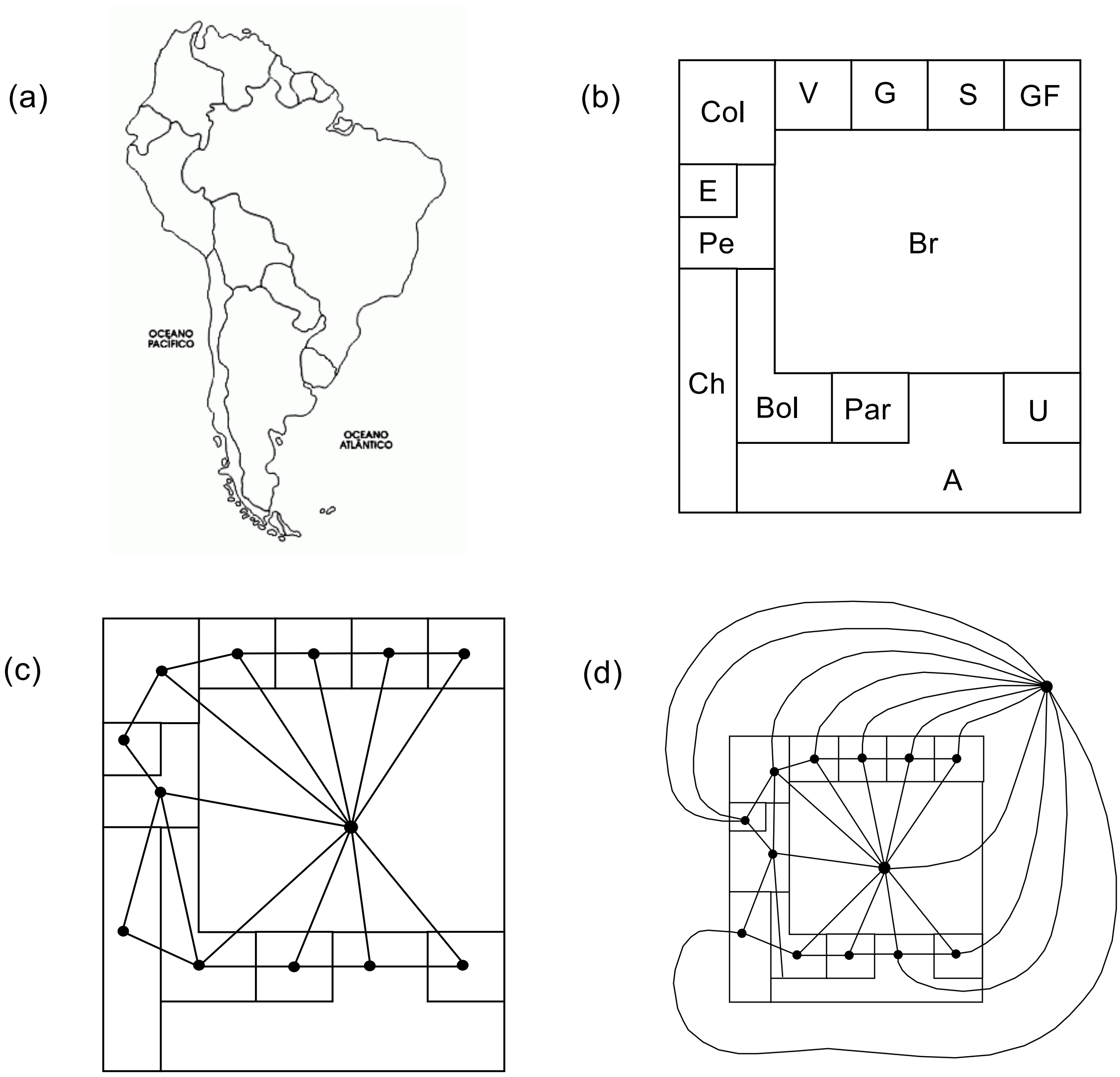


Figura 10. (a) O mapa dos países da América do Sul; (b) uma versão topológica do mapa da América do Sul; (c) início da construção do mapa dual; (d) o mapa dual, considerando-se a região dos oceanos como uma face.

Nos nossos mapas planos, a parte ilimitada ("fora" do mapa) também é considerada uma face (o "oceano") do mapa. Assim, no grafo dual do mapa da América do Sul, ainda temos que incluir um vértice externo ao "continente", representando o "oceano", ligado a todos os vértices das capitais, exceto aos vértices representantes de Bolívia e Paraguai. O grafo dual de um mapa só deixa de ser um mapa quando tem vértices de ordem 2.

Em todo agrupamento de cinco países, dois deles não são vizinhos

Veremos agora que o professor De Morgan estava certo, ou seja

Teorema. *Tomando-se cinco países quaisquer em um mapa, ao menos dois deles não serão vizinhos.*

Demonstração. Consideremos cinco países quaisquer de um mapa. Considere o grafo dual do mapa.

Os cinco países considerados correspondem a cinco vértices do grafo dual (as capitais desses países). Cada dois países vizinhos darão origem a uma aresta no grafo dual, ligando as capitais e cruzando a fronteira entre esses dois países.

Se esses cinco países forem todos vizinhos uns dos outros, os cinco vértices no grafo dual estarão, dois a dois, ligados por arestas, todas em um plano. Esses cinco vértices e suas arestas formarão então o grafo completo de cinco vértices, K_5.

Como o gráfico completo de 5 vértices, K_5, não é planar, dentre esses cinco vértices há pelo menos dois não interligados por uma aresta. Portanto, dois dos cinco países não são vizinhos. ■

O teorema das cinco cores

Faremos agora uma demonstração do teorema de Heawood, de que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano. A demonstração que faremos não é a de Heawood, que utilizava técnicas desenvolvidas por Kempe.

Como poderá ser visto, faremos uso de dois fatos estabelecidos nas seções anteriores que são: (a) todo mapa tem um país com no máximo cinco vizinhos; (b) para cada cinco países de um mapa, ao menos dois deles não se tocam. Não nos esqueçamos que para chegarmos até aqui fizemos uso do teorema de Euler para grafos planos conexos ($v - a + f = 0$).

Teorema. *Todo mapa no plano pode ser colorido com cinco ou menos cores.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre o número de faces (países) do mapa. Evidentemente, se o mapa tem até 5 países, ele pode ser colorido com cinco cores.

Seja n ≥ 5, e suponhamos que todo mapa com até n países pode ser colorido com 5 cores. Demonstraremos que então todo mapa com n + 1 países também pode ser colorido com 5 cores.

Consideremos então um mapa com n + 1 países. Como vimos, ele tem uma face (país) F com no máximo 5 lados. Considere tal face. Aplicamos a essa face um processo de *encolhimento*, conforme ilustrado pelas figuras abaixo.

No encolhimento de um país, ele é retraído até tornar-se um vértice A, e seus vizinhos mantém a mesma configuração anterior no que diz respeito a vizinhanças. Assim, o país de 2, 3, 4 ou 5 lados desaparece, dando origem a um mapa "reduzido" com n países.

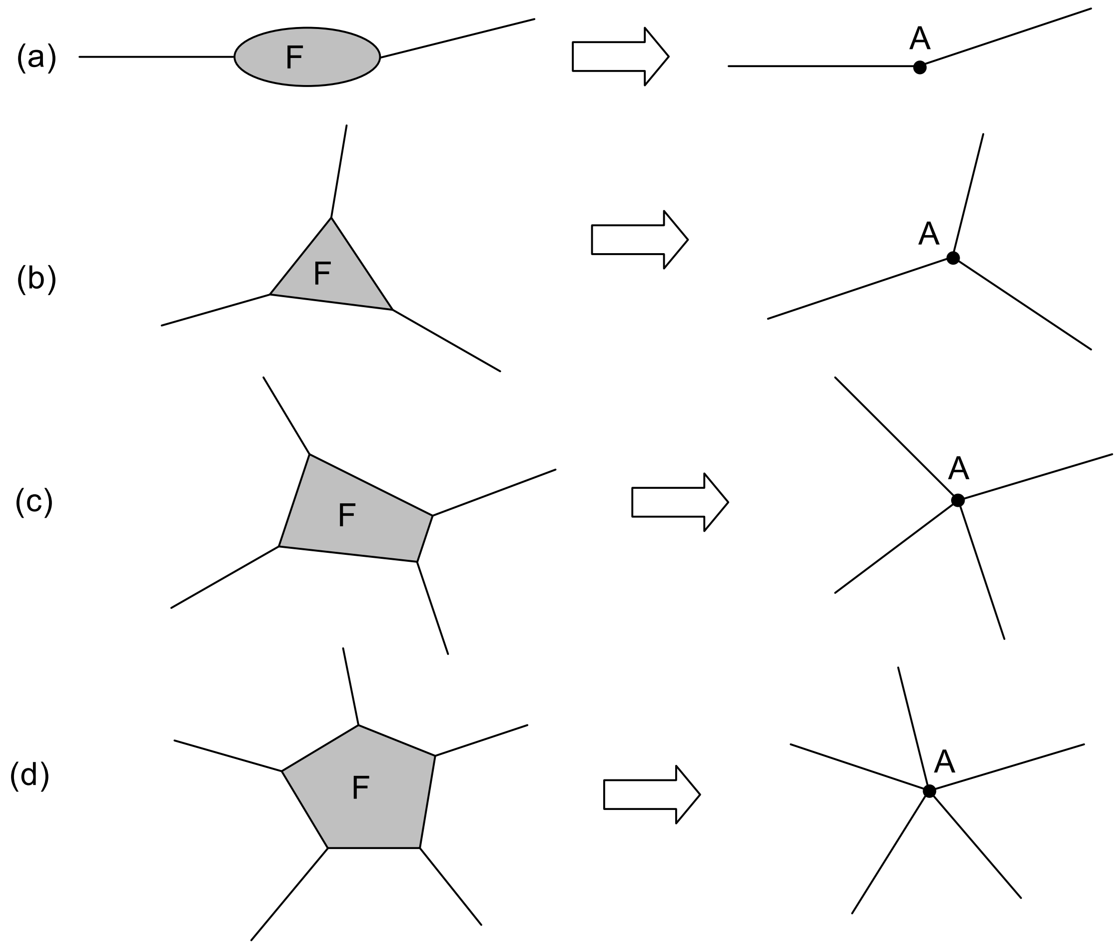


Figura 11.

Nos casos (a), (b), (c) e (d), ilustrados acima na Figura 11, o mapa reduzido resultante, tendo agora n países, pode ser colorido com 5 cores, pela hipótese de indução. Aplicamos então uma coloração, em 5 cores, ao novo mapa.

Em (a), (b) e (c), o vértice A, resultante do encolhimento do país F, é circundado por 2, 3 ou 4 países. Nesses países foram usadas até quatro cores distintas. Devolvemos o país F excluído ao mapa, "expandindo" o vértice A, e F pode ser colorido com uma quinta cor, ainda não aplicada a seus vizinhos.

No caso (d), consideramos o grafo dual do mapa reduzido. Consideramos então os cinco territórios que circundam o vértice A. Pode ocorrer que dois deles sejam parte de uma mesma face, como na ilustrado na Figura 12 abaixo. Nesse caso, o mapa reduzido a n países pode ser colorido com 5 cores. Nos países que circundam o vértice A foram usadas apenas quatro. Como no caso (c), o país F, devolvido ao mapa após expansão do vértice A, pode ser colorido com a quinta cor disponível.

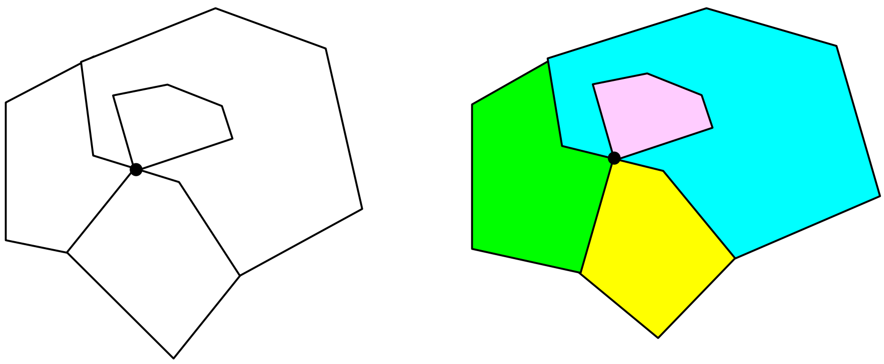
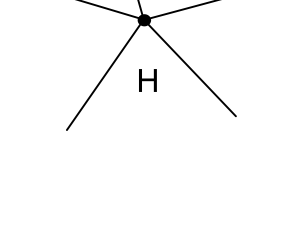


Figura 12.

Pode ocorrer porém que os cinco territórios que circundam o vértice A sejam cinco países diferentes. Neste caso, como acabamos de ver, dois desses países não são vizinhos. Suponhamos que esses dois países são aqueles designados pelas letras G e H na figura abaixo.



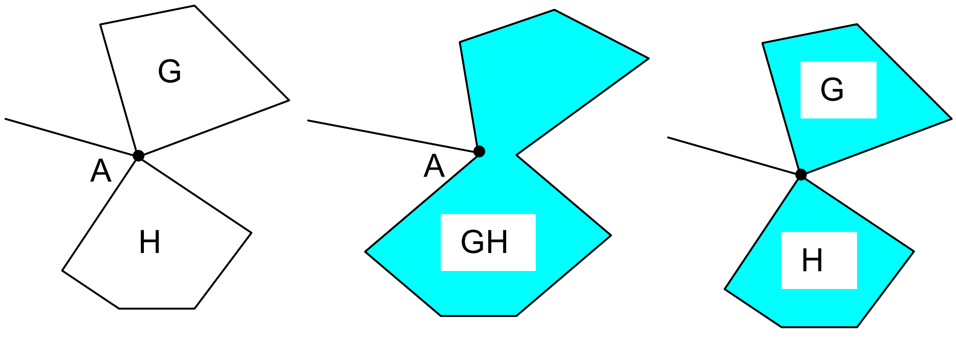


Figura 13.

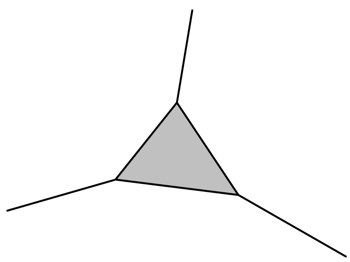
Podemos então alterar ligeiramente o mapa, tal como na Figura 13 acima, unindo G a H através de uma passagem próxima ao vértice A, como na Figura 13b. O novo mapa, agora com n – 1 países, é colorido com 5 cores. Desfazemos o "pacto" de união entre G e H, retornando-os à forma original, como em (c).

O vértice A porém está agora rodeado por cinco países, dois deles com uma mesma cor. Portanto, 4 cores foram gastas ao redor do vértice A. Devolvendo o país F ao mapa, após expansão do vértice A, podemos colori-lo com uma quinta cor disponível.

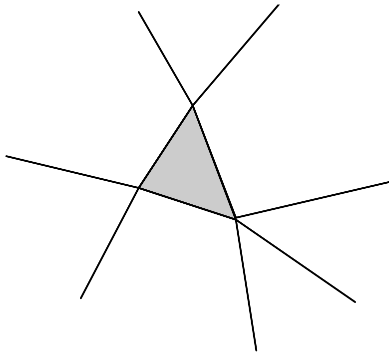
Sumarizando, temos dois fatos: (a) todo mapa de até cinco faces pode ser colorido com cinco cores, e (b) se todo mapa de até n faces pode ser colorido com 5 cores, então todo mapa de n + 1 faces também pode. Portanto, podemos colorir com 5 cores mapas com qualquer número de faces. ■

Êpa, os desenhos da demonstração acima não são simplórios demais?

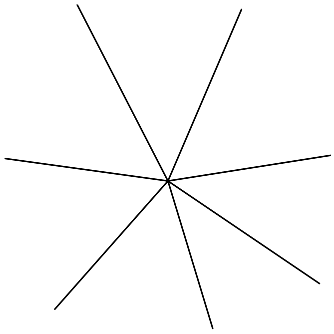
Pelo bem da clareza e da simplicidade, alguns pecados foram cometidos nas figuras da demonstração acima do teorema das cinco cores. Considere por exemplo o caso (b) em que o mapa tem um país com três vizinhos. O diagrama de uma tal situação foi pensado assim:



Simples, não? Mas um país com três vizinhos pode estar em uma configuração um pouco mais rica, como esta por exemplo:

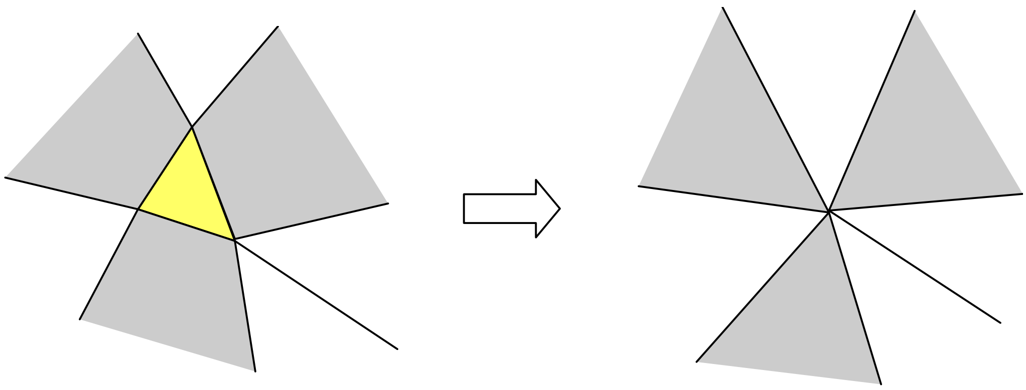


Neste caso, encolhendo-se o país triangular, conforme fizemos, obtemos uma configuração da forma abaixo, um vértice rodeado por sete cantos de territórios!

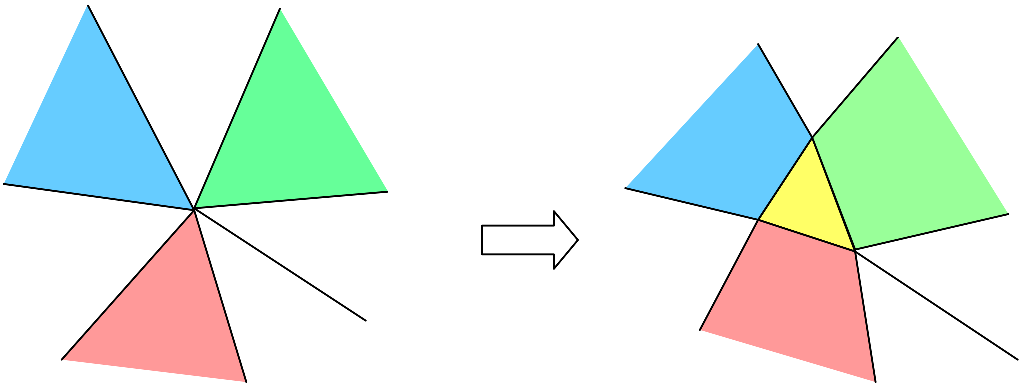


Como remediar a situação?

Na verdade, após o encolhimento do país triangular, temos que considerar, em torno do vértice que aparece, apenas aqueles que eram realmente vizinhos do país "encolhido". Assim, primeiro destacamos seus vizinhos de fato, e mantemo-los destacados após o encolhimento do país central.



A demonstração deste caso então continua assim: nos países destacados, do novo mapa, agora com n países (lembra-se?), são gastas três cores diferentes. Ao devolver o país triangular ao mapa original, ainda teremos uma cor disponível para colori-lo. Os países que compartilhavam apenas um vértice com o país triangular não interferem neste processo.



Os passeios de Hamilton e novas investidas no problema das quatro cores

Em 1856, Sir William Rowan Hamilton inventou um jogo, o "jogo icosiano", que consistia basicamente em realizar um circuito passando pelas arestas do grafo abaixo, passando uma única vez por cada vértice. Na vez de jogar, o jogador usaria duas pedras, demarcando a aresta percorrida e o vértice então atingido. O termo icosiano provem da presença de 20 vértices no grafo.

Esse grafo é uma projeção de um dodecaedro no plano. O dodecaedro é um poliedro de 12 faces pentagonais e 20 vértices. Ao projetá-lo adequadamente em plano, obtemos um mapa de 12 faces, sendo uma delas a face ilimitada do plano do grafo. Nesse mapa, todos os vértices tem valência 3.

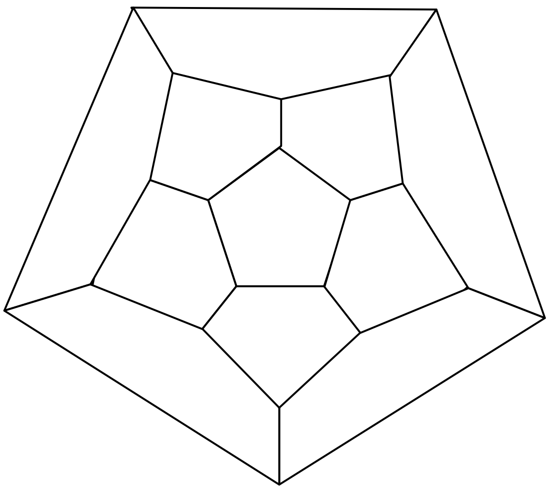


Figura 14. O mapa "icosiano", projeção das arestas de um dodecaedro em um plano.

Em uma modalidade do jogo icosiano, cada jogador poderia propor ao outro os primeiros cinco vértices do circuito. Thomas Penyngton Kirkman publicou o primeiro trabalho sobre tais circuitos em arestas de poliedros. Nos dias de hoje, esses circuitos são chamados circuitos hamiltonianos, mas poderiam chamar-se kirkmanianos, pois a única contribuição de Hamilton ao problema parece ter sido a invenção de seu jogo.

O interesse de tais circuitos ao problema das quatro cores advém do fato de que a presença de um circuito hamiltoniano, em um grafo, permite colorir suas faces com 4 cores.

Ironicamente, quando perguntado por De Morgan sobre o problema das quatro cores, Hamilton respondeu: "Não estarei pensando em seu *quatérnio* de cores tão cedo". Em 1843, nove anos antes de Francis Guthrie ter formulado o problema das quatro cores, Hamilton havia descoberto a álgebra dos quatérnios, uma generalização não comutativa da álgebra dos números complexos. Os complexos são números da forma a + bi, e na multiplicação são sujeitos à regra $i^2 = -1$. Já os quatérnios tem a forma a + bi + cj + dk e na multiplicação estão sujeitos às regras $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Estas fórmulas Hamilton as escreveu em uma pedra na ponte Brougham Bridge, em Dublin, Irlanda, em 16 de outubro de 1843.

Teorema. *Se um grafo admite um circuito hamiltoniano, então suas faces podem ser coloridas com quatro cores.*

Demonstração. Considere um circuito hamiltoniano em um grafo plano. A curva do circuito (reunião de suas arestas), divide o plano em duas regiões, uma limitada, interior à curva, e outra ilimitada, formada pelos pontos exteriores à curva. Acompanhe o argumento pelas figuras abaixo.

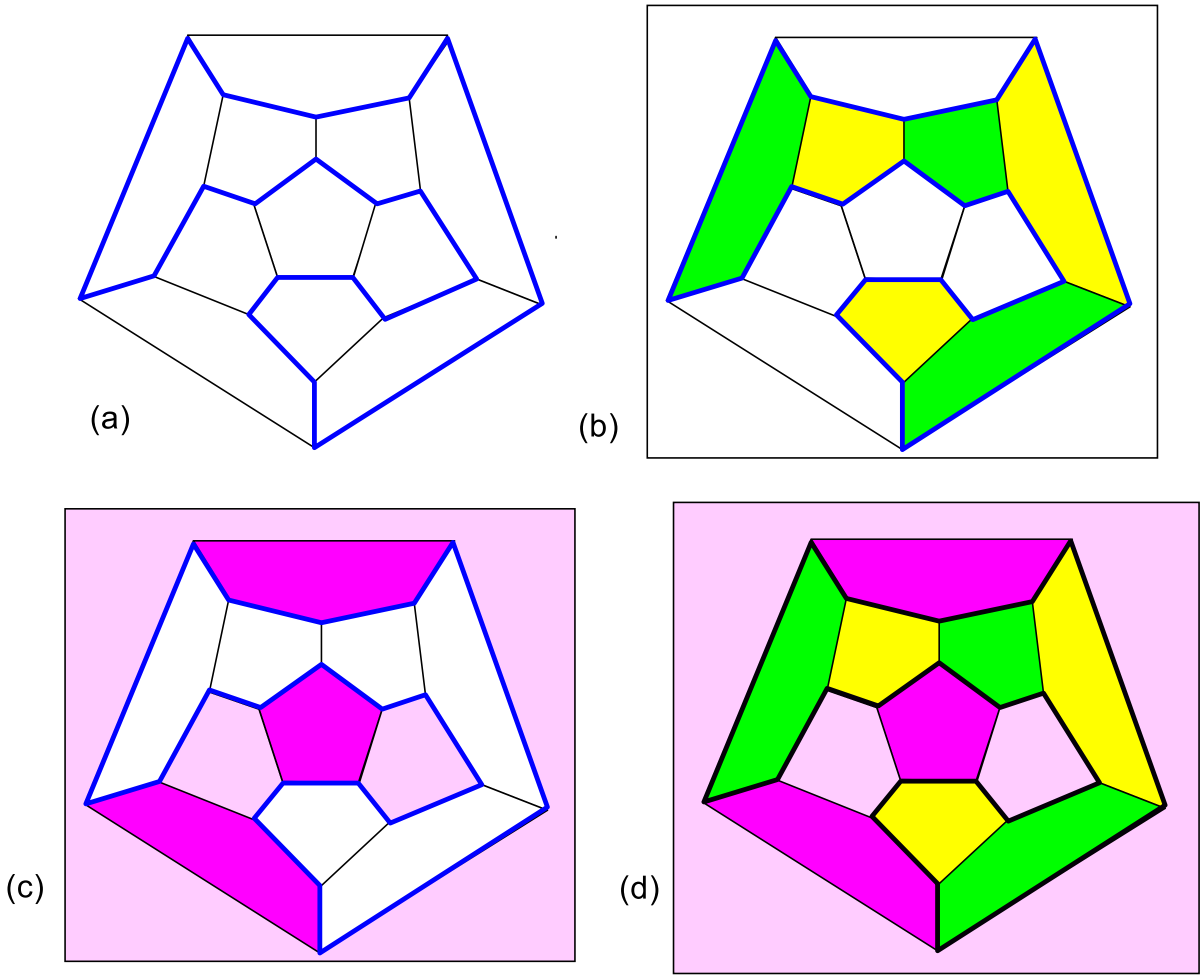


Figura 15. (a) Um circuito hamiltoniano no mapa "icosiano". (b) Colorindo alternadamente, com duas cores, as faces interiores ao circuito. (c) Colorindo agora as faces exteriores ao circuito. (d) Coloração final do mapa.

Cada aresta do grafo, fora do circuito hamiltoniano, está contida na região plana interior ou exterior à curva, e tem os dois vértices de suas extremidades no circuito. Tal aresta é comum a duas faces adjacentes do grafo (do mapa do grafo), ambas contidas na região interior ou exterior ao circuito. E tal aresta divide o interior ou exterior do circuito em duas regiões conexas. Podemos então colorir as faces no interior do circuito com duas cores, alternando-as toda vez que cruzamos uma aresta "diagonal" interior ao circuito. Fazemos o mesmo com as faces na região exterior, usando outras duas cores. Teremos então as faces do grafo coloridas com quatro cores. Na Figura 15c acima, mostramos também uma porção retangular da face ilimitada do mapa. ■

O leitor poderá agora, como um desafio, construir um circuito hamiltoniano no grafo abaixo e então colori-lo com quatro cores.

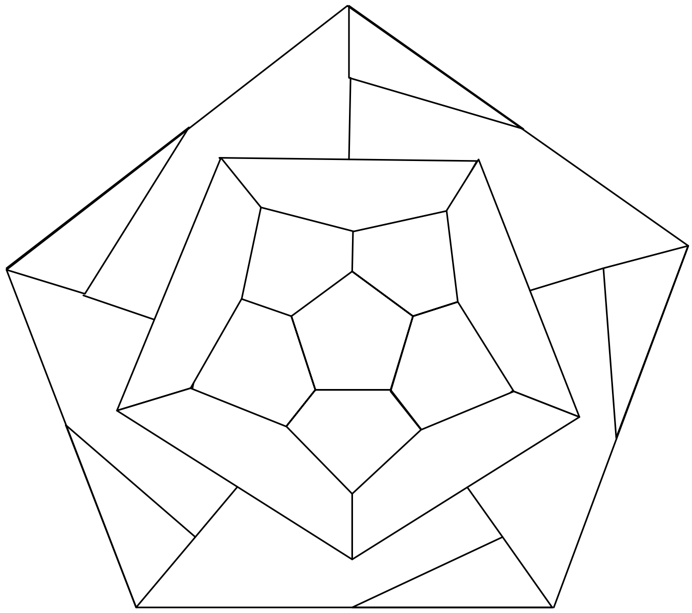


Figura 16. Construa um circuito hamiltoniano neste grafo e use-o para colorir as faces com 4 cores.

Na pesquisa da conjectura das quatro cores, foi inicialmente considerada a conjectura para mapas poliédricos, isto é, mapas tal como o do jogo icosiano, obtidos por projeções adequadas, em um plano, de arestas e vértices de poliedros convexos, cada face do poliedro correspondendo a uma face do mapa, uma das faces do poliedro correspondendo à face ilimitada do mapa. Alguns mapas poliédricos são mostrados abaixo.

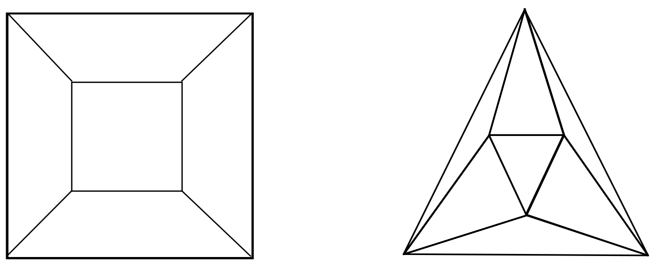


Figura 17. Mapas poliédricos, projeções de um cubo e de um octaedro.

Um teorema de Ernst Steinitz diz que um grafo plano, 3-valente e 3-conexo é um grafo poliédrico (um grafo é 3-conexo quando, para dois quaisquer de seus vértices, digamos u e v, existem pelo menos três caminhos de u a v, no grafo, tendo apenas o vértice inicial u e o vértice final v em comum).

Na pesquisa da conjectura das quatro cores, foi inicialmente demonstrado que seria suficiente demonstrar a conjectura para mapas planos, 3-valentes e 3-conexos. Tendo em vista a possibilidade de coloração em quatro cores, de mapas com circuitos hamiltonianos, tentou-se durante algum tempo demonstrar que todo mapa plano 3-valente e 3-conexo teria um circuito hamiltoniano.

Houve dois momentos, na história do problema, nos anos 1930, em que foram publicados trabalhos demonstrando isto. As demonstrações não eram muito claras, mas não se conseguia detectar erros nelas.

Em 1946 porém, William Tutte publicou um exemplo de um mapa 3-valente e 3-conexo para o qual era impossível a existência de um circuito hamiltoniano.

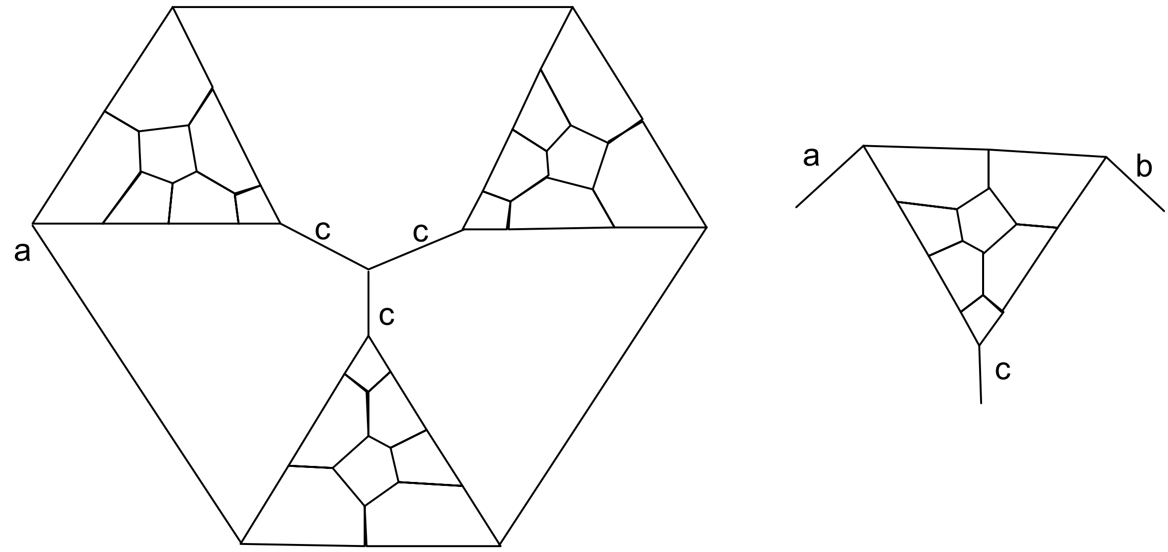
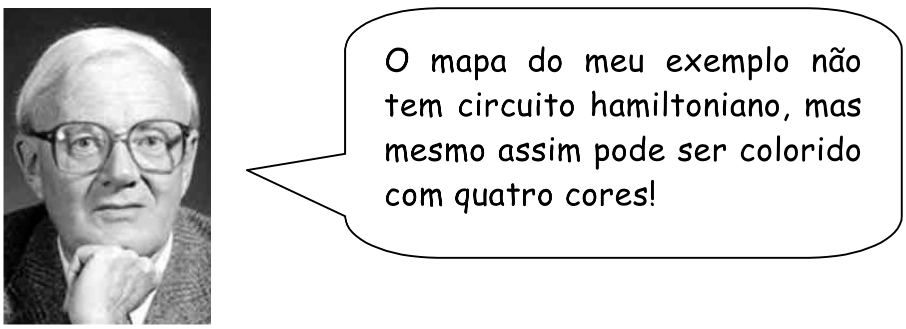


Figura 18. O grafo de Tutte e o "triângulo" de Tutte.



O argumento inteligente de Tutte, é o de que, no diagrama triangular à direita na Figura 18, parte do grafo de Tutte, um caminho simples, formado por arestas do grafo, passando uma só vez em cada vértice, iniciando-se em a, deve necessariamente terminar em c (isto Tutte demonstrou). No grafo de

Tutte, em um circuito hamiltoniano, é necessário percorrer três desses triângulos. Assim, considerando seu inicio em a, o circuito passaria pelo vértice central, e posteriormente teria que terminar nele, o que inviabiliza um circuito hamiltoniano.

Mais tarde, foi construído um contra-exemplo, também usando os triângulos de Tutte, com 38 vértices (o grafo de Tutte tem 46). Posteriormente, demonstrou-se que todo grafo plano, 3-valente e 3-conexo, com até 36 vértices, admite um circuito hamiltoniano.

Colorindo arestas com três cores

Também relacionado ao problema das quatro cores é o problema de colorir, com três cores, as arestas de um grafo, cujos vértices sejam todos de valência 3. Neste caso, a regra do jogo é: as três arestas em torno de cada vértice devem sempre receber as três cores distintas.

O matemático Peter Guthrie Tait, pensou no problema, tendo estudado inclusive o caso de grafos não planares. No inicio, verificou-se que existiam grafos 3-valentes e planos, não "3-coloráveis nas arestas", como é o caso do exemplo abaixo.

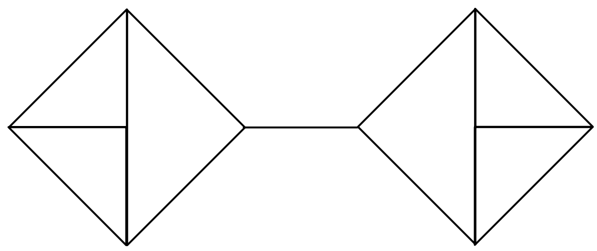


Figura 19. As arestas deste grafo 3-valente não podem ser coloridas com três cores.

Tait inicialmente pensou que um grafo 3-valente, que não pudesse ser desconectado pela remoção de uma de suas arestas (o grafo acima pode ser desconectado removendo-se a aresta central), poderia ter suas arestas coloridas com três cores. Esta conjectura foi derrubada por Julius Peter Christian Petersen, em 1891, pela apresentação do grafo da Figura 20. Somente os vértices destacados fazem parte do grafo (não planar). Esse grafo 3-valente não pode ser desconectado pela remoção de uma aresta e suas arestas não podem ser coloridas com três cores (fato que não demonstraremos aqui).

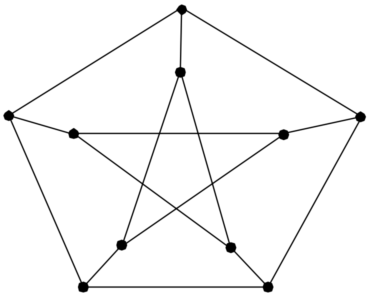
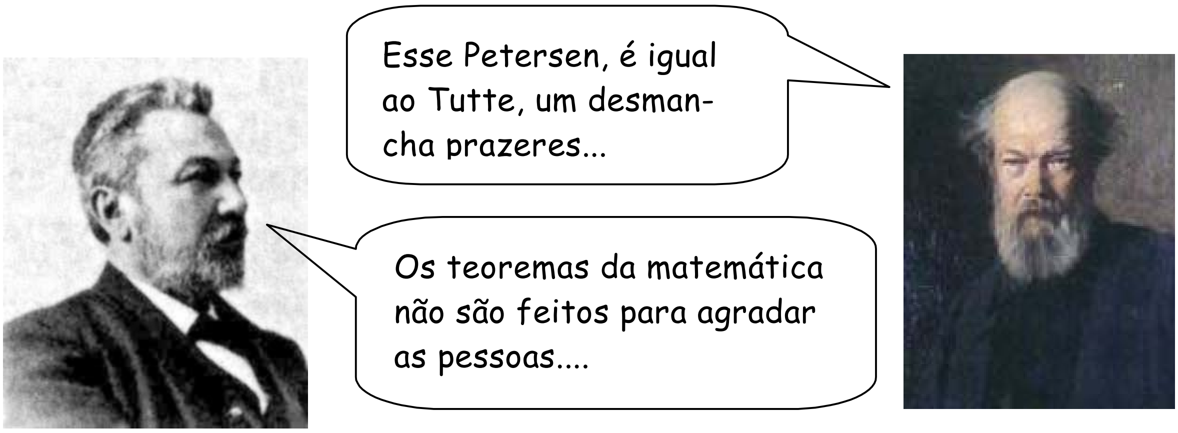


Figura 20. O contra-exemplo de Petersen.



Tait no entanto deixou-nos o seguinte interessante teorema.

Teorema. *Um mapa plano, 3-valente, pode ser colorido com quatro cores se e somente se suas arestas podem ser coloridas com três cores.*

Demonstração. Faremos uma demonstração, do teorema de Tait, creditada a Wolinskii, um jovem russo morto na 2^a guerra mundial.

Primeiramente, definiremos uma adição "módulo 2", dos números 0 e 1, da seguinte forma:

$$0 + 0 = 0,\ \ 1 + 0 = 0 + 1 = 1,\ \ e\ 1 + 1 = 0$$

(pense em um marcador de quilometragem, em que 999 + 1 = 000, e você não achará isto tão estranho – nosso marcador zera no segundo quilômetro!)

Em seguida, designaremos quatro cores pelos pares (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Podemos pensar (0,0) = verde, (0,1) = amarelo, (1,0) = azul e (1,1) = vermelho. Definiremos adição de pares, somando suas coordenadas segundo as regras de adição módulo 2, tal como no exemplo

$$(0,1) + (1,1) = (0 + 1,\ 1 + 1) = (1,0).$$

Suponhamos que um mapa plano e 3-valente tem suas faces coloridas com quatro cores, as quais denotaremos pelos pares (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Se uma aresta é comum a duas faces, definimos a "cor" da aresta através da "soma das cores" das faces. Teremos então as arestas coloridas com as cores (0,1), (1,0) e (1,1).

As arestas em torno de cada vértice serão coloridas sempre com três cores diferentes. É fácil ver porquê. As faces em torno de um vértice tem três dentre as quatro "cores" (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Suponhamos que, em torno de um certo vértice, as faces tenham as cores (0,0), (1,0) e (1,1). As cores das arestas ficarão (0,0) + (1,0) = (1,0), (0,0) + (1,1) = (1,1), e (1,0) + (1,1) = (0,1). É fácil verificar, para as demais três possibilidades de cores das faces (em torno de um vértice), as cores das três arestas serão sempre diferentes.

Suponhamos agora que as arestas de uma mapa plano, 3-valente, são coloridas com três cores distintas, as quais chamaremos de (1,0), (0,1) e (1,1). Para colorir as faces do mapa, revertemos o processo acima. Tomamos uma face "inicial" qualquer e a ela atribuímos a cor (0,0). Cada face adjacente a esta receberá a cor (0,0) + (a,b), sendo (a,b) a cor da aresta comum às duas faces. Na aritmética módulo 2, somar é o mesmo que subtrair:

$$0 - 1 = 1, \text{ pois } 1 + 1 = 0.$$

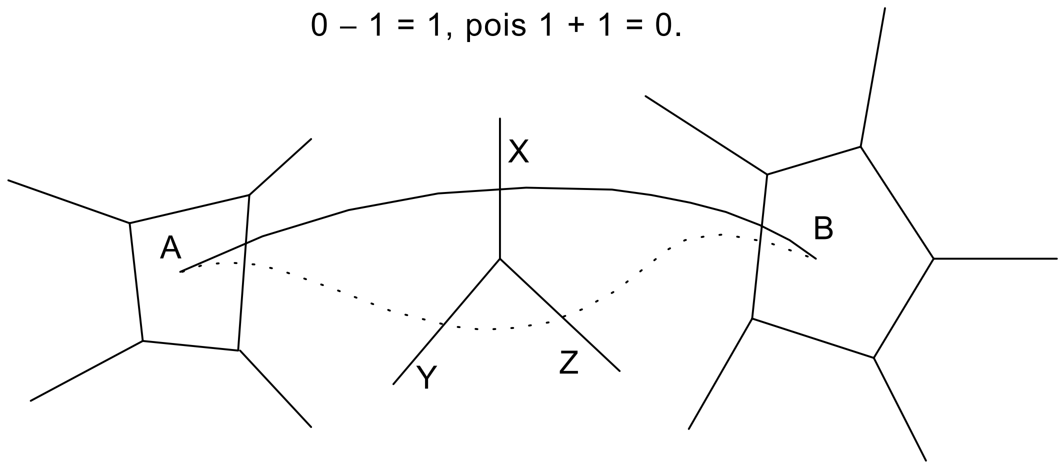
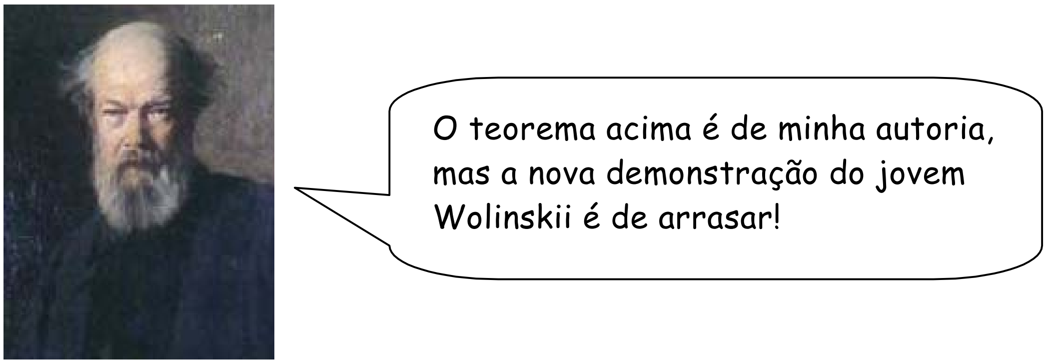


Figura 21.

Temos que garantir, no entanto, que este processo atribui cores às faces, sem incompatibilidades. A partir da face colorida (0,0), as demais cores são atribuídas atravessando-se arestas fronteiriças. Temos que garantir que, por dois caminhos diferentes, duas faces não terão suas cores trocadas. Considere a troca de caminhos, da face A à face B, ilustrada na Figura 21 acima. Em um certo ponto do percurso, trocamos a passagem pela aresta de cor X pelas arestas de cores Y e Z (X, Y e Z são três pares de números, dentre (0,1), (1,0) e (1,1)). Uma troca de caminhos é uma combinação de pequenas trocas desse tipo. Ocorre que, como X + Y + Z = (0,0), temos X = Y + Z (na aritmética módulo 2, somar é o mesmo que subtrair). Assim, as mudanças de cor, ao irmos de A a B, são as mesmas se passamos por X ou opcionalmente por Y e Z. ■



Como treinamento, estaremos colorindo as arestas do mapa abaixo, a partir de uma coloração das faces e, em seguida, colorindo as faces a partir das arestas. Usaremos como "cores" os pares (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Não nos esqueçamos que a área ilimitada, "externa", também é uma face do mapa.

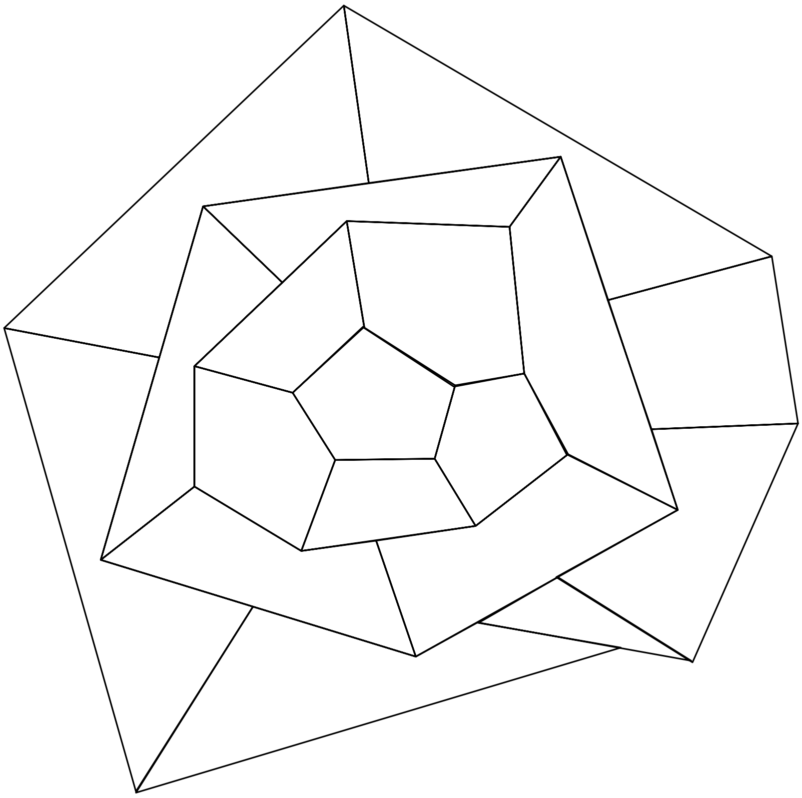


Figura 22. Atribua as "cores" (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1) às faces deste mapa. A partir disto, "pinte" as arestas com três cores.

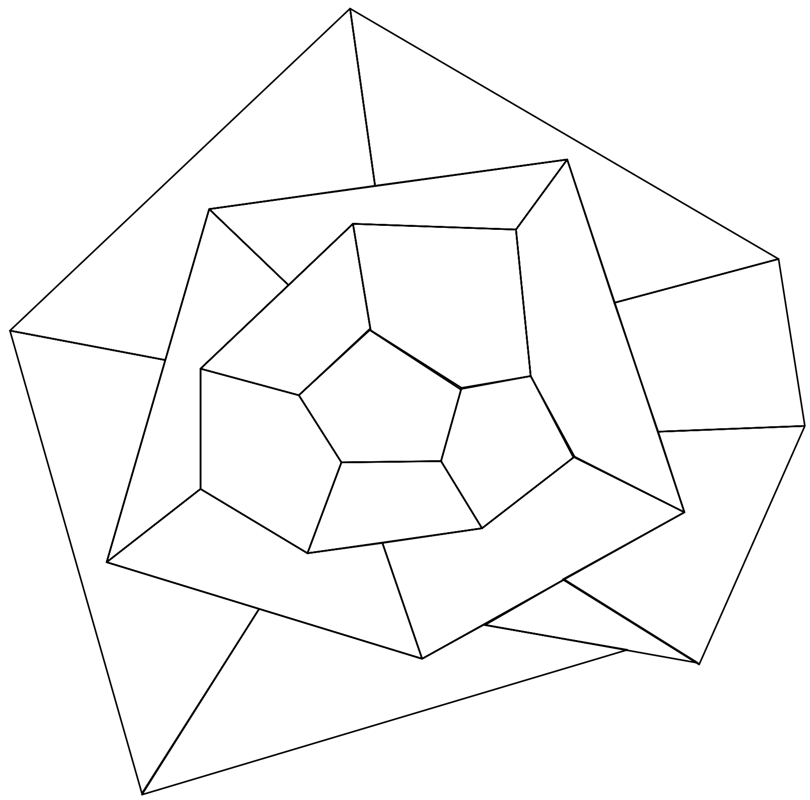


Figura 23. Atribua as "cores" (0,1), (1,0) e (1,1) às arestas deste mapa. A partir disto, "pinte" as faces do mapa com quatro cores.

Colorindo mapas com duas ou três cores

Que tipos de mapas podem ser coloridos com apenas duas cores? Que mapas podem ser coloridos com apenas três?

Para a primeira pergunta temos a seguinte resposta.

Teorema. *Um mapa pode ser colorido com duas cores se e somente se todos os seus vértices tem valência par.*

Demonstração.

Se um mapa pode ser colorido com apenas duas cores então, em torno de cada vértice, ângulos consecutivos, dos "cantos" das faces, tem cores alternadamente diferentes, como na Figura 24. Ao percorrê-los girando em torno do vértice, digamos no sentido horário, as duas cores são usadas alternadamente, o que força um número par de ângulos – e conseqüentemente um número par de arestas – em torno do vértice.

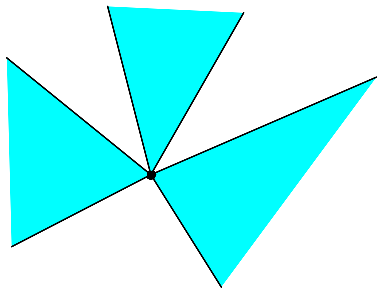


Figura 24.

Reciprocamente, suponhamos que todo vértice do mapa é par. O leitor será capaz de mostrar que havendo duas ou três faces apenas, é possível colorir o mapa com duas cores. É importante lembrar que os vértices terão sempre valência 4 ou maior, pois vértices de valência 2 não contam em um mapa.

Mostraremos então o seguinte: em se tratando de mapas de vértices de valência par, se todo mapa de n faces pode ser colorido com duas cores, então todo mapa com n + 1 faces também pode. Assim, pode ser colorido com duas cores qualquer mapa desse tipo, independentemente do número de faces.

Suponhamos portanto que já tenhamos verificado que todo mapa de n faces pode ser colorido com duas cores. Consideremos um mapa de n + 1 faces (e todos os vértice de valência par)

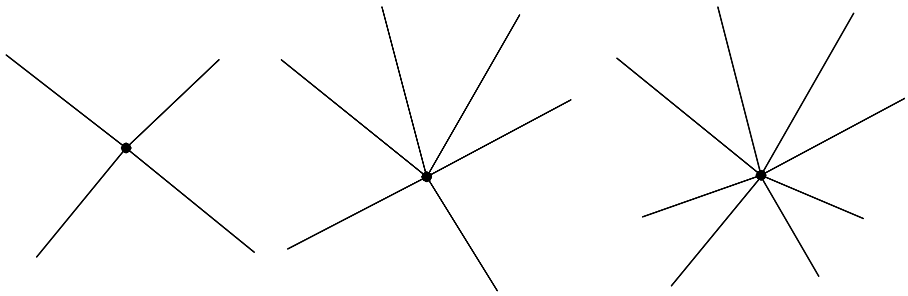


Figura 25.

Em torno de um vértice desse mapa, teremos 4, 6, 8 ou mais cantos de faces, como na Figura 25. Consideremos um de seus vértices. Enumeremos ângulos consecutivos em torno desse vértice 1, 2, 3, 4, etc. Haverá dois ângulos ímpares ou dois ângulos pares, consecutivos (por ex., 1 e 3 ou 2 e 4), provenientes de faces distintas.

Um procedimento como mostrado na Figura 26, podemos reunir os "territórios" de duas faces ímpares ou pares, consecutivas e distintas.

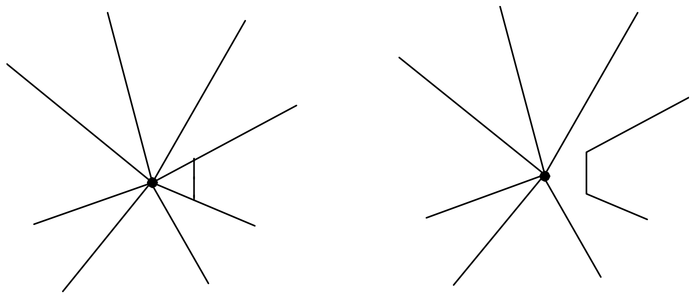


Figura 26.

O mapa resultante terá uma face a menos e todos os seus vértices ainda terão valência par. Este mapa resultante pode ser colorido com apenas duas cores. Revertendo o processo, desfazemos a "junção territorial", mantendo porém as cores que foram usadas, como na Figura 27, e teremos o mapa original, de n + 1 países, agora colorido com duas cores.

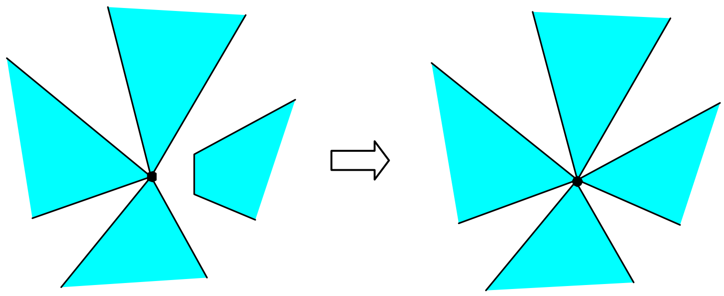


Figura 27.

Para a segunda pergunta temos a seguinte resposta, para um caso particular de mapas.

Teorema. *Um mapa 3-valente pode ser colorido com três cores se e somente se todos as faces tem um número par de lados.*

Demonstração. Faremos a demonstração deste teorema utilizando o grafo dual do mapa, o qual dará origem a um "mapa dual".

Pois bem, selecionamos um vértice no interior de cada face (a "capital" do país). Arestas do grafo dual são construídas ligando-se capitais de países vizinhos (países com ao menos uma aresta em comum).

Essas arestas duais estarão cortando transversalmente as arestas do mapa original. Como o mapa é 3-valente, o grafo dual dará origem a um mapa de faces triangulares.

Suponhamos que o mapa original é colorido com três cores. Então os vértices do mapa dual podem ser coloridos com as mesmas cores. Assim, cada vértice do mapa dual é rodeado por vértices de duas outras cores. Na figura, o vértice central C é "rodeado" pelos vértices A e B. As letras A, B e C representam três cores distintas. Vértices B serão rodeados por vértices A e C e vértices A serão rodeados por vértices B e C. Os triângulos ABC, faces do mapa dual, podem ser coloridos com duas cores: pinte de azul aqueles cujo percurso A–B–C se faz no sentido horário, e de vermelho os que tem esse percurso no sentido anti-horário.

Assim, o mapa dual pode ser colorido com apenas duas cores. Os vértices do mapa dual são portanto todos de valência par. Assim, todas as faces do mapa original tem um número par de lados.

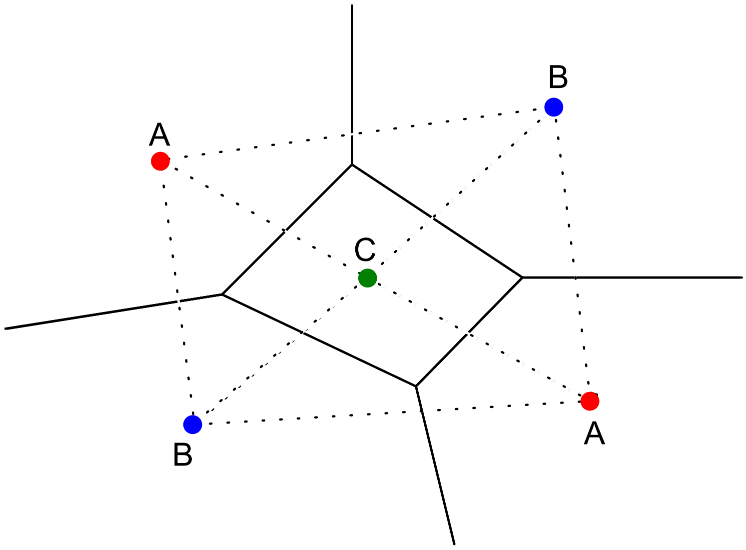


Figura 28.

Para demonstrar a propriedade recíproca, suponhamos que todas as faces do mapa tenham um número par de lados.

Então todos os vértices do mapa dual terão valência par, e portanto as faces triangulares, do mapa dual, podem ser coloridas com duas cores, digamos azul e vermelho.

Percorremos o contorno dos triângulos azuis no sentido horário e os vermelhos no sentido anti-horário. Começando com um triângulo azul, colocamos as cores A, B e C nos seus três vértices, no sentido horário.

Os três triângulos adjacentes são vermelhos, e os vértices restantes destes são coloridos produzindo coloração A–B–C no sentido anti-horário.

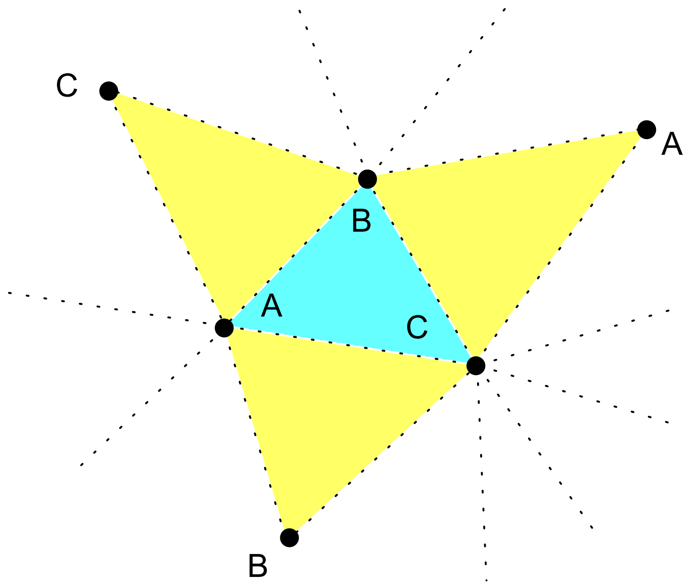


Figura 29.

Este processo continua até que todos os vértices estejam coloridos. Não há contradição na coloração porque triângulos ABC adjacentes induzem orientações contrárias no percurso das arestas. Agora, a coloração ABC dos vértices é a coloração das faces do mapa original, que pode portanto ser colorido com três cores. ■

Colorindo mapas em superfícies fechadas

Examinaremos agora alguns teoremas que se referem a colorações de mapas em superfícies fechadas.

Admitiremos conhecidas as superfícies fechadas orientáveis, sendo elas a esfera S^2, o toro bidimensional T^2, e os toros de genus 2, 3, 4, etc.

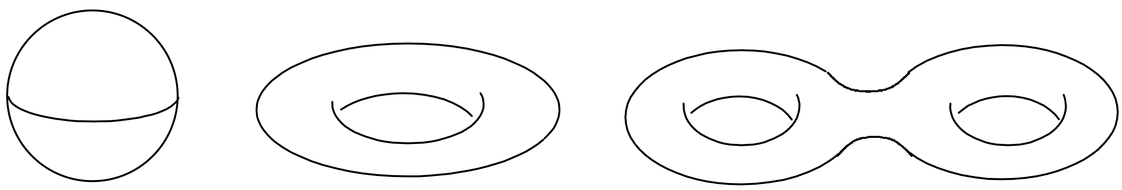


Figura 30. Superfícies da esfera, toro e toro de genus 2.

É sabido ainda que essas superfícies tem como invariante topológico a característica de Euler, ou número de Euler. O número de Euler de uma tal superfície é definido como segue. Considere uma representação poliédrica da superfície, isto é, um deformação da superfície a uma forma poliédrica, na qual a superfície é então representada como reunião de regiões poligonais convexas e planas. Na representação poliédrica da superfície, cada aresta é comum a exatamente duas faces, e cada duas faces que se tocam compartilham uma aresta ou um vértice.

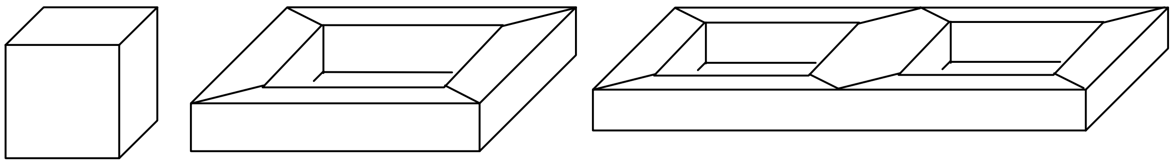


Figura 31. Superfícies da esfera, toro e toro de genus 2, representadas poliedricamente. Os sólidos poliédricos delimitados pelo toro e pelo toro de genus 2 não são convexos.

Sejam v, a e f, respectivamente, os números de vértices, arestas e faces (regiões poligonais) dessa representação poliédrica. Define-se o número de Euler ou característica de Euler, dessa superfície poliédrica, como sendo o inteiro (χ é uma letra grega, que se pronuncia "qui").

$$\chi = v - a + f$$

Pode ser demonstrado que o número de Euler é um invariante topológico da superfície, ou seja, não depende da representação poliédrica que se faça dela, mas sim da sua forma topológica "essencial". Na verdade, o número de Euler da representação poliédrica é o mesmo para qualquer mapa na superfície, desde que cada face (país) seja topologicamente equivalente (homeomorfo) a uma região poligonal plana convexa.

A esfera tem número de Euler 2, ou seja, para todo mapa na superfície da esfera, tem-se $v - a + f = 2$. Pode-se demonstrar que o toro de genus n tem número de Euler $2 - 2n$. Assim, o toro (ou toro de genus 1) tem número de Euler 0, enquanto o toro de genus 2 tem número de Euler $\chi = -2$.

Temos ainda uma lista de superfícies a considerar, as superfícies não orientáveis. A superfície não orientável mais popular é uma superfície com bordo, a faixa de Moebius.

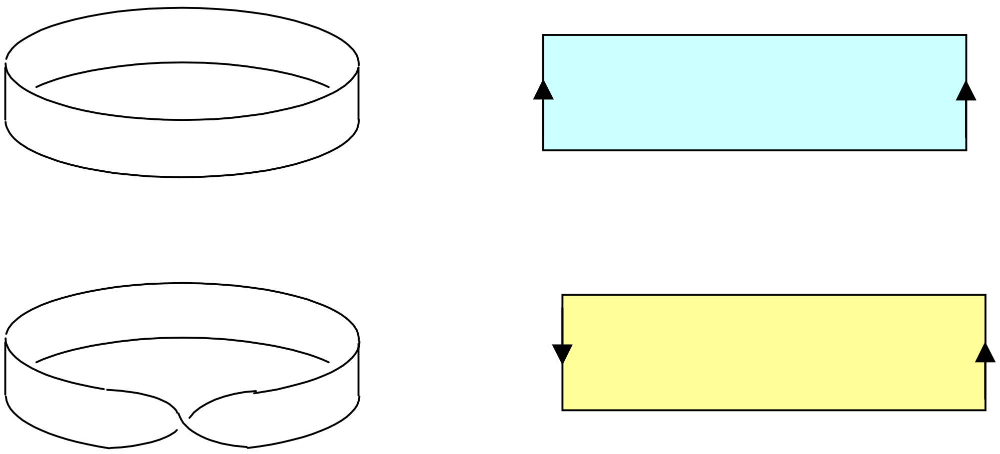


Figura 32. O cilindro e a faixa de Moebius, e seus diagramas dando instruções de colagens.

Toda superfície tem um diagrama poligonal plano que a representa, um diagrama que contém, em suas arestas, instruções de colagem para construção da superfície. Acima temos as representações poligonais do cilindro $S^1 \times [0,1]$ e da faixa de Moebius.

O toro bidimensional, a garrafa de Klein, e o plano projetivo, são superfícies que tem as representações poligonais dadas abaixo.

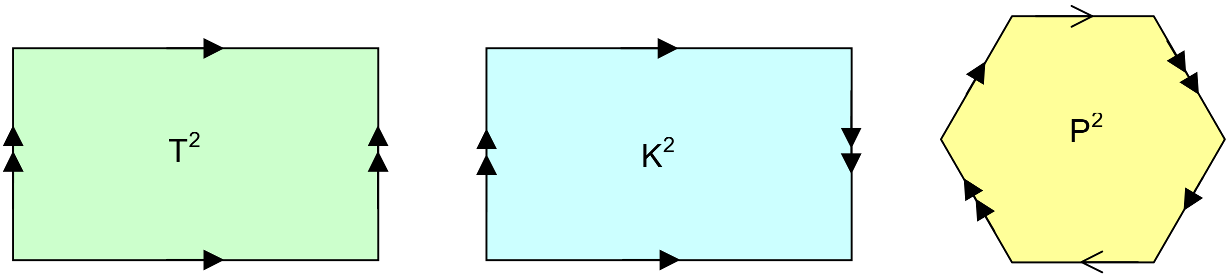


Figura 33. Representações poligonais do toro T^2, da garrafa de Klein K^2, e do plano projetivo P^2.

O mapa no plano projetivo, dado pela Figura 34, nos dá a característica de Euler de P^2 como sendo $\chi = 1$.

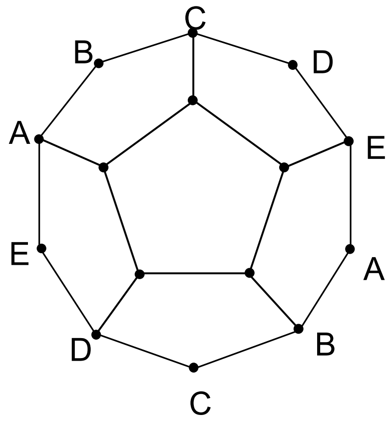


Figura 34. Um mapa no plano projetivo.

Consideremos agora um mapa, numa superfície de característica de Euler χ.

Seja f o número de faces do mapa. Enumeremos essas faces como 1, 2, ... , f. Consideremos que a face 1 tem a_1 arestas (lados), a face 2 tem a_2 arestas, etc., e a face f tem a_f arestas. O número

$$(a_1 + a_2 + ... + a_f)/f$$

expressa o número médio de arestas por face.

Ocorre que na soma $a_1 + a_2 + ... + a_f$ cada aresta é contada duas vezes, pois cada aresta é compartilhada por duas faces. Portanto

$$a_1 + a_2 + ... + a_f = 2a$$

sendo a o número total de arestas.

Assim, a média de arestas por face é dada por

$$2a/f$$

Teorema. *Seja S uma superfície fechada. Suponhamos que* $c \geq 4$ *e que, para todo mapa dessa superfície,* $2a/f < c$. *Então* c *cores são suficientes para colorir qualquer mapa dessa superfície.*

Demonstração. Faremos uma demonstração por indução sobre o número f de faces do mapa. Por hipótese, $2a/f < c$ para todo mapa na superfície S.

Sendo $c \geq 4$, claramente c cores são suficientes para colorir o mapa se $f \leq 4$.

Seja $n \geq 4$ e suponhamos que c cores sejam suficientes para colorir todo mapa, nessa superfície, de até n faces.

Consideremos um mapa de $n + 1$ faces na superfície. Por hipótese, $2a/f < c$.

Sendo $2a/f$ a média de lados por país (a média de arestas por face), existe uma face F com menos de c lados.

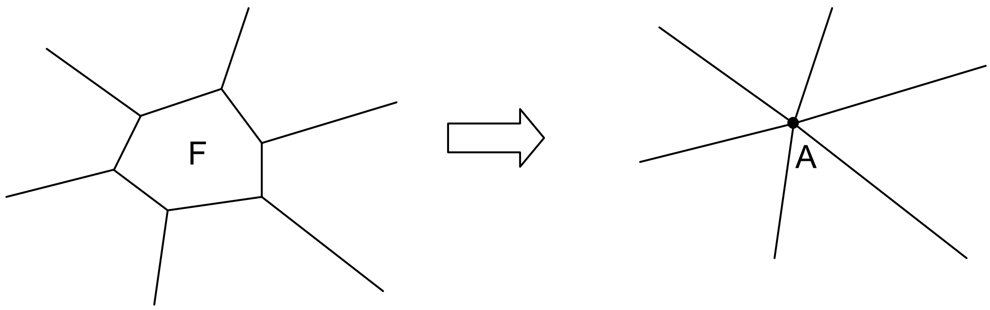


Figura 35.

A essa face aplicamos o processo de "encolhimento" a um vértice A, já usado na demonstração do teorema das cinco cores no plano. O mapa reduzido, resultante dessa transformação, terá n faces, podendo então ser colorido com c cores, pela hipótese de indução. Nessa coloração, os territórios que circundam o vértice A são coloridos com c cores. Eles são, no entanto, menos que c territórios, pois F tem menos que c lados. Portanto, não foram gastas todas as c cores nesses territórios. Podemos então devolver o país F ao mapa, colorindo-o com uma cor ainda não usada por seus vizinhos. O mapa, agora com suas $n + 1$ faces, foi também colorido com as c cores. ■

Teorema. *Seja S uma superfície fechada, de característica (número) de Euler* $v - a + f = \chi$. *Para cada mapa dessa superfície, tem-se* $2a/f \leq 6\cdot(1 - \chi/f)$.

Demonstração. Consideremos um mapa na superfície, para o qual teremos

$$v - a + f = \chi$$

Novamente teremos

$$3v \leq 2a$$

pois em cada vértice temos ao menos 3 extremidades de arestas, e o total de extremidades de arestas é 2a. Assim,

$$\begin{aligned} 6\chi &= 6v - 6a + 6f \\ &\leq 4a - 6a + 6f \\ &= -2a + 6f \end{aligned}$$

e portanto

$$2a \leq 6f - 6\chi$$

de onde deduzimos

$$2a/f \leq 6(1 - \chi/f)$$ ■

Seja S uma superfície fechada. Se $6(1 - \chi/f) < c$, então $2a/f < c$ e portanto, c cores são suficientes para colorir todo mapa em S. Deduzimos imediatamente que

1. Se $\chi > 0$, então $6(1 - \chi/f) < 6$, e portanto 6 cores são suficientes para colorir todo mapa na esfera ($\chi = 2$) ou no plano projetivo ($\chi = 1$).
2. Se $\chi = 0$, $6(1 - \chi/f) = 6 < 7$, e portanto 7 cores são suficientes para colorir qualquer mapa no toro ou na garrafa de Klein.

Teorema. 6 *é o número de cores necessárias e suficientes para colorir todos os mapas no plano projetivo.*

Demonstração. Vimos que 6 cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano projetivo. Existe porém um mapa, no plano projetivo, que requer seis cores. O mapa é mostrado na Figura 36. Temos aí uma representação poligonal do plano projetivo, através de um decágono. O mapa é constituído de 6 faces (países) pentagonais, cada uma tendo fronteira com as outras cinco. ■

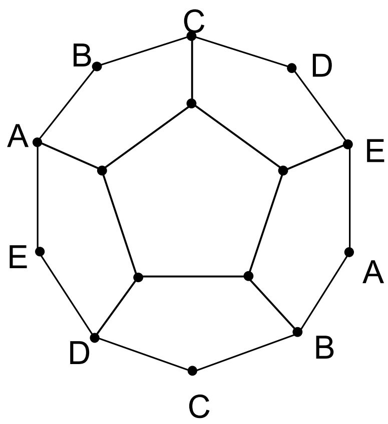


Figura 36.

Teorema. *7 é o número de cores necessárias e suficientes para colorir todos os mapas no toro.*

Demonstração. Vimos acima que 7 cores são suficientes para colorir qualquer mapa no toro. Existe porém um mapa, no toro, que requer todas as sete cores. O mapa é dado na Figura 37 abaixo. Temos aí uma representação retangular do toro. O mapa é constituído de 7 faces (países) retangulares, cada uma tendo fronteira com as outras seis. ■

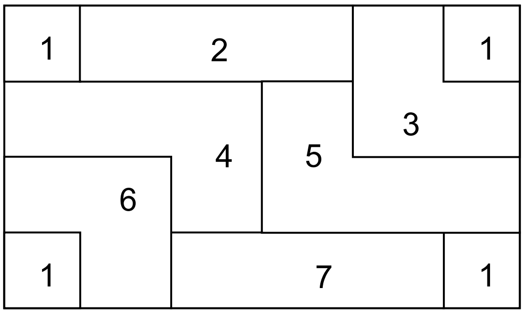


Figura 37.

O número de Heawood

Heawood, o mesmo citado no início deste texto, em 1890 conjeturou uma fórmula, o número de Heawood, para o número de cores necessárias e suficientes para colorir todos os mapas em uma superfície de característica de Euler χ, para
$\chi < 0$.

Seja S uma superfície de número de Euler χ, sendo $\chi < 0$.

Suponhamos que temos c cores à disposição e consideremos um mapa em S com ao menos c + 1 países, ou seja, com $f \geq c + 1$ (se $f \leq c$, as c cores são obviamente suficientes para colorir o mapa).

Como vimos acima, para cada mapa dessa superfície, tem-se

$$2a/f \leq 6(1 - \chi/f)$$

Sendo $\chi < 0$, temos $|\chi| = -\chi$, e então

$$2a/f \leq 6(1 + |\chi|/f)$$

Sendo $f \geq c + 1$, teremos $1/f \leq 1/(c + 1)$, e então

$$2a/f \leq 6(1 + |\chi|/f) \leq 6\cdot(1 + |\chi|/(c+1))$$

Conforme já estabelecido, se $2a/f < c$ para todo mapa em S, então c cores são suficientes para colorir todo mapa em S.

Assim sendo, c cores serão suficientes para colorir todo mapa em S caso tenhamos

$$6\cdot(1 + |\chi|/(c+1)) < c$$

Esta última desigualdade é equivalente a

$$c^2 - 5c + 6(\chi - 1) > 0$$

Resolvendo a inequação do segundo grau em c, deduzimos

$$c > \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2}$$

Seja [x] a parte inteira do número real x, ou seja, se x = n + α, com n inteiro e α real satisfazendo $0 \le \alpha < 1$, define-se [x] = n. Por exemplo, [5,2] = 5, [π] = 3, [0,13] = 0.
Então

$$c > \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2}$$

é equivalente a

$$c \ge \left[\frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} + 1\right],$$

ou seja, sendo N um inteiro,

$$c \ge \left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right]$$

Assim sendo, acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema (Heawood). *Se S é uma superfície fechada, de característica de Euler* $\chi < 0$, *então* $\left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right]$ *cores são suficientes para colorir todo mapa em S.*

O número

$$H(S) = \left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}\right]$$

é chamado número de Heawood da superfície fechada S.

Conjectura de Heawood. *Se S é uma superfície fechada, de característica de Euler* $\chi < 0$, H(S) *é o número de cores necessárias e suficientes para colorir todo mapa em S.*

Em 1968, Gerhard Ringel e Ted Youngs demonstraram que a conjectura de Heawood, é verdadeira para todas as superfícies de característica de Euler $\chi < 0$, tornando-a então um teorema.

Ted Youngs and Gerhard Ringel

Embora o número de Heawood tenha surgido a partir de considerações sobre colorações de mapas em superfícies de característica de Euler negativa, podemos testar valores não negativos de χ na fórmula de Heawood.

Temos então a seguinte tabela de números de Heawood. Nessa tabela, $2T^2$ representa o toro de genus 2, $3T^2$ o toro de genus 3, e $3P^2$ a soma conexa de 3 planos projetivos.

	S^2	P^2	T^2	K^2	$2T^2$	$3T^2$	$3P^2$
χ	2	1	0	0	–2	–4	–1
H(S)	4	6	7	7	8	9	7

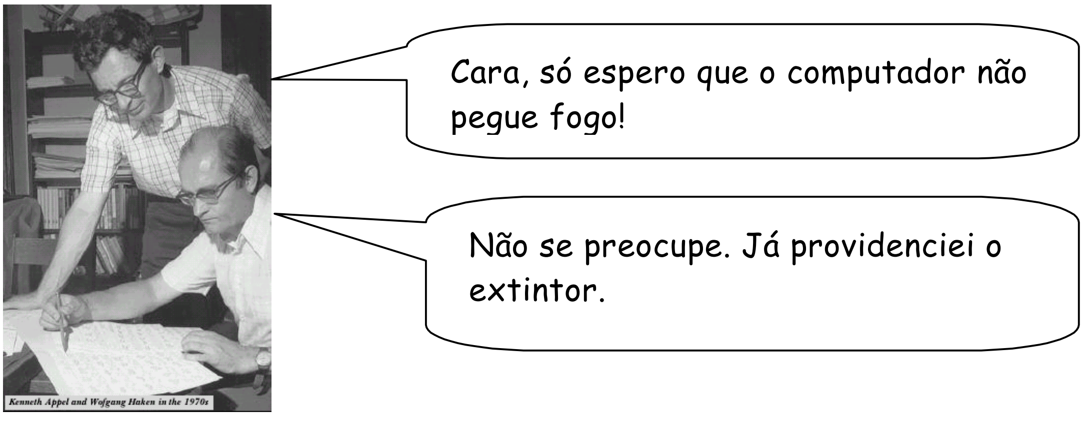
Considerações finais

Heawood demonstrou o teorema das sete cores no toro.

Em 1934, Philip Franklin demonstrou que seis cores são necessárias e suficientes para colorir todo mapa na garrafa de Klein, muito embora seu número de Heawood seja 7 (χ = 0).

A necessidade de H(S) cores para as superfícies de característica de Euler χ < 0 foi demonstrada somente em 1968, pelos parceiros Gerhard Ringel e Ted Youngs.

Em 1976, Wolfgang Haken a Kenneth Appel demonstraram que 4 cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano. A demonstração que apresentaram gerou porém alguma controvérsia, pois dependeu, de modo essencial, do uso de computadores de grande porte, rodando casos e mais casos de configurações, por um período de seis meses.



Kenneth Appel and Wofgang Haken in the 1970s

O artigo de Martin Gardner, publicado em 1975 na Scientific American, era uma brincadeira de primeiro de abril. O leitor será capaz de colori-lo com apenas quatro cores, um passatempo que achará interessante.

Em 1990, uma nova demonstração do teorema das quatro cores no plano foi desenvolvida por quatro matemáticos, Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas. A demonstração deles ainda fez uso de computadores, mas a parte computacional pode ser realizada, em um laptop, em apenas algumas horas.

Até o presente momento não há uma demonstração do teorema das quatro cores feita sem o uso de computadores, que possa ser lida e apreciada pela comunidade matemática internacional. Ou seja, não existe uma demonstração do teorema das quatro cores que possa ser completamente escrita e publicada.

E tudo o que foi dito aqui é apenas um pedaço da história desse fascinante problema.

Referências

[1] Arnold, B.E., *Intuitive Concepts in Elementary Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1963.

[2] Kinsey, L.C., *Topology of Surfaces,* Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] Firby, P.A. e Gardiner, C.F., *Surface Topology,* Ellis Horwood Ltd., New York, 1982.

[4] Barnette, D., *Map Coloring, Polyhedra, and The Four Color Problem,* MAA, 1983.

[5] Devlin, K., *Mathematics, The New Golden Age,* Columbia University Press, New York, 1999.

[6] Cadwell, J.H., *Topics in Recreational Mathematics,* Cambridge University Press, New York, 1980.

[7] Malkevitch, J., *Colorful Mathematics, I, II, III, IV.* AMS, 2003.
www.ams.org/new-in-math/cover/