a4paper,left=1.5cm,right=1.5cm,top=2.2cm,bottom=1.0cm

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Álgebra Universal Aplicada: Novas Construções em Teoria de Módulos

José Carlos Cifuentes
Heily Wagner

Curitiba
Abril de 2004

Álgebra Universal Aplicada:

Novas Construções em Teoria de Módulos

Sumário

Introdução

Este é mais um trabalho inserido dentro de um projeto maior de incentivo à pesquisa matemática pelo método de analogia, realizado com alunos de graduação no PET/Matemática da Universidade Federal do Paraná, que pretende mostrar como é possível a descoberta original nesse nível. Nele partimos da seguinte pergunta: é possível construir módulos combinando dois ou mais módulos cujos anéis de escalares sejam distintos? Sabe-se, que na teoria usual, diversas construções como as de produto cartesiano e de produto tensorial de módulos, por exemplo, só são realizadas para módulos sobre o mesmo anel.

O primeiro passo foi encontrar uma definição adequada de homomorfismo entre módulos com anéis de escalares distintos, que chamamos de *homomorfismo misto*, que é a seguinte: se M é um A-módulo, N é um B-módulo e $\sigma : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis, então, a função $f : M \longrightarrow N$ é dita σ-homomorfismo ou homomorfismo misto se $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(ax) = \sigma(a)f(x)$. Exemplos deles são as aplicacões anti-lineares entre espaços vetoriais complexos e as homotetias de um módulo com anel de escalares não comutativo.

No trabalho são construídos módulos quociente a partir de homomorfismos mistos e demonstrado uma nova versão do *primeiro teorema do isomorfismo.* São construídos também produtos cartesianos mistos de módulos sendo as projeções correspondente também homomorfismos mistos, e demonstrado a respectiva *propriedade universal*. Finalmente, são construídas versões correspondentes de produtos tensoriais mistos a partir de um estudo preliminar de aplicações bilineares mistas, e analisada a repectiva propriedade universal. Cabe ressaltar que este trabalho tem seus fundamentos na *Álgebra Universal* onde o tipo de estrutura estudado, os módulos, são vistos como estruturas algébricas de espécie dupla ou biestruturas, isto é, estruturas com dois domínios, sendo natural, nesse caso, a consideração de homomorfismos que envolvam ambos os domínios.

Para que fique mais claro o modo como esse trabalho foi desenvolvido, o dividimos em três capítulos. Apenas no terceiro desenvolvemos as novas construções, sendo os dois primeiros a base para este último, pois constituem-se num resumo do que das teorias usuais foram empregadas.

Os três capitulos são:

Álgebra Universal O primeiro capítulo traz rapidamente os conceitos da Álgebra Universal que são base para este trabalho, tais como as definições de estruturas algébricas de espécie dupla, e os chamados homomorfismos mistos entre elas.

Módulos Enumeramos os assuntos de teoria de módulos que foram escolhidos para esse estudo. Ele serve para que o leitor relembre os conceitos básicos dessa teoria, compare com os novos resultados obtidos no capítulo seguinte e observe como funcionou o método de investigação por analogia.

Novas Construções Finalmente, apoiado nos dois primeiros capítulos, o terceiro traz a sistematização da pesquisa propriamente dita, ou seja, aqui estão os novos resultados inspirados nas teorias usuais citadas.

Capítulo 1

Álgebra Universal

Neste primeiro capítulo introduzimos as estruturas álgebricas num sentido amplo e algumas relações entre elas. Os conceitos que aqui aparecem serviram para fundamentar e motivar as novas construções, tratadas no terceiro capítulo.

Para saber mais sobre o assunto ver referências bibliográficas [1] e [3].

1.1 Estruturas Algébricas

Podemos expressar alguns sistemas algébricos da seguinte forma:

- o anel dos números inteiros $\langle \mathbb{Z}, \{+, \cdot\}, \{0, 1\}\rangle$;
- o grupo de permutações de um conjunto X $\langle S(X), \{\circ\}, \{id\}\rangle$, onde $S(X) = \{f : X \longrightarrow X / f$ é bijetora$\}$;
- o corpo ordenado dos números reais $\langle \mathbb{R}, \{\leq\}, \{+, \cdot\}, \{0, 1\}\rangle$.

Em forma geral, podemos definir *estrutura algébrica* como uma quádrupla $\mathcal{A} = \langle A, \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K}\rangle$ onde $A \neq \phi$ é o domínio da estrutura $\mathcal{A}$, I, J e K são conjuntos de índices (que podem ser vazios) tais que para cada

$i \in I$ e para cada $j \in J$, R_i é uma relação de um número finito de argumentos e f_j é uma função de um número finito de variáveis, ambas definidas sobre A, e para cada $k \in K$, c_k é um elemento distinguível de A.

Todos as estruturas contém a relação binária de igualdade, por isso não a explicitamos.

1.1.1 Tipos de Estruturas Algébricas

Cada estrutura algébrica tem associada duas funções $\mu : I \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{N}$ tais que

para cada $i \in I$, R_i é uma relação $\mu(i)$ - ária, isto é $R_i \subseteq A^{\mu(i)}$;

para cada $j \in J$, f_j é uma função $\gamma(j)$ - ária, isto é $f_j : A^{\gamma(j)} \longrightarrow A$.

O tipo da estrutura $\mathcal{A}$ estará determinado pelos seguintes dados:

Quantas relações há e de que aridade, o que é determinado pela cardinalidade de I e a função μ;

Quantas funções há e de que aridade, o que é determinado pela cardinalidade de J e a função γ;

Quantas constantes há, o que é determinado pela cardinalidade de K.

Desta forma para definir o tipo de uma estrutura basta considerar a cardinalidade de cada conjunto de índices e as funções associadas.

Notação: Dada a estrutura $\mathcal{A}$, o tipo de $\mathcal{A}$ será $\tau = \langle |I|, |J|, |K|, \mu, \gamma \rangle$ onde $|X|$ denota a cardinalidade do conjunto X.

Exemplos:

1. O tipo do grupo $\langle G, \{*\}, \{e\} \rangle$ é $\tau = \langle 0, 1, 1, \mu, \gamma \rangle$, onde $\mu = \phi$ e $\gamma : J(= \{1\}) \longrightarrow \mathbb{N}$, $\gamma(1) = 2$ e $|K| = 1$.

2. O tipo do corpo ordenado $\langle \mathbb{R}, \{\leq\}, \{+, \cdot\}, \{0, 1\}\rangle$ é $\tau = \langle 1, 2, 2, \mu, \gamma\rangle$ onde $\mu : \{1\} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mu(1) = 2$, $\gamma : \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\gamma(1) = \gamma(2) = 2$ e $|K| = 2$.

Um sistema algébrico pode ser apresentado com diversos tipos, por exemplo o grupo aditivo dos inteiros pode ser apresentado como $\langle \mathbb{Z}, \{+\}\rangle$ ou como $\langle \mathbb{Z}, \{+, -\}, \{0\}\rangle$ explicitando a operação "oposto"e o elemento neutro. Da mesma forma sistemas diferentes podem ter o mesmo tipo; por exemplo o anel dos inteiros $\langle \mathbb{Z}, \{+, \cdot\}, \{0, 1\}\rangle$ é de mesmo tipo que a álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(\mathcal{X}), \{\cup, \cap\}, \{\phi, \mathcal{X}\}\rangle$.

Quando I, J e K forem finitos, evitaremos as chaves nos conjuntos de relações, funções e elementos distinguíveis.

1.1.2 Subestruturas

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de tipo $\tau = \langle a, b, c, \mu, \gamma\rangle$, isto é

$\mathcal{A} = \langle A, \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K}\rangle$ onde $|I| = a$, $|J| = b$, $|K| = c$, $\mu : I \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{N}$. Uma subestrutura de $\mathcal{A}$ é uma outra estrutura $\mathcal{B}$ $= \langle B, \{S_i\}_{i\in I}, \{g_j\}_{j\in J}, \{d_k\}_{k\in K}\rangle$ de mesmo tipo τ, a qual deve satisfazer

i $B \subseteq A$;

ii para cada $i \in I$, $S_i = R_i \cap B^{\mu(i)}$;

iii para cada $j \in J$, $g_j = f_j \mid_{B^{\gamma(j)}}$;

iv para cada $k \in K$, $d_k = c_k$.

Notação: $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$

Por exemplo, consideremos o grupo $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, podemos observar que $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ é uma subestrutura, porém vale ressaltar que não é um subgrupo.

O fato de toda subestrutura de um grupo ser um subgrupo depende da forma de apresentação do grupo. Se o grupo dos inteiros é apresentado como $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$, então, toda subestrutura dele será um subgrupo.

1.1.3 Homomorfismos

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas de mesmo tipo τ. Uma função $h : A \longrightarrow B$ é um *homomorfismo* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ se:

i para cada $i \in I$ e para quaisquer x_1,x_2,...,$x_{\mu(i)} \in A$

$$R_i(x_1, ..., x_{\mu(i)}) \Rightarrow S_i(h(x_1), ..., h(x_{\mu(i)}))$$

ii para cada $j \in J$ e para quaisquer $x_1, ..., x_{\gamma(j)} \in A$

$$h(f_j(x_1, ..., x_{\gamma(j)})) = g_j(h(x_1), ..., h(x_{\gamma(j)}))$$

iii para cada $k \in K$

$$h(c_k) = d_k.$$

1.1.4 Isomorfismos

Seja h um homomorfismo como acima. Se h for bijetiva e em (i) trocarmos $\Rightarrow$ por $\Leftrightarrow$, dizemos que h é um *isomorfismo* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Neste caso diremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfos, o que denotaremos por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

1.2 Estruturas de Espécie Dupla ou Biestruturas

Uma estutura algébrica será definida como de *espécie dupla ou biestrutura* se possuir dois domínios, neste caso consideraremos a quíntupla

$\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K}\rangle$ onde A_1 e A_2 são os domínios, I, J e K são conjuntos de índices, cada R_i é uma relação que pode ser mista, cada f_j é uma função de uma ou mais variáveis, definida em A_1 e/ou A_2, e cada c_k é um elemento distinguível de A_1 ou A_2.

Para ilustrar, consideraremos apenas estruturas de espécie dupla da forma $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, R, f, c\rangle$, isto é, com apenas uma relação, uma função e uma constante.

Neste caso, poderemos ter, por exemplo, $R \subseteq A_1^n$ ou $R \subseteq A_2^n$ ou $R \subseteq A_1^m \times A_2^n$, etc. Da mesma forma podemos ter $f : A_1^n \longrightarrow A_1$ ou $f : A_2^n \times A_1^m \longrightarrow A_2$, etc. E $c \in A_1$ ou $c \in A_2$.

O tipo de uma estrutura de espécie dupla pode ser definido convenientemente.

Ainda por simplicidade suporemos nas seções seguintes que R e f são binárias.

1.2.1 Homomorfismos Mistos

Sejam $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, R, f, c\rangle$ e $\mathcal{B} = \langle B_1, B_2, S, g, d\rangle$ estruturas de mesmo tipo.

Tomemos por exemplo $R \subseteq A_1 \times A_2$ e $S \subseteq B_1 \times B_2$, $f : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_2$ e $g : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_2$, $c \in A_1$ e $d \in B_1$

Um *homomorfismo misto* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é um par de funções (F, G) com $F : A_1 \longrightarrow B_1$ e $G : A_2 \longrightarrow B_2$ tais que

i se $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$

$$(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (F(x_1), G(x_2)) \in S$$

ii se $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$

$$G(f(x_1, x_2)) = g(F(x_1), G(x_2))$$

iii $F(c) = d$.

1.2.2 Isomomorfismos Mistos

Seja (F, G) um homomorfismo misto como acima. Se F e G são bijetivas e em (i) trocar $\Rightarrow$ por $\Leftrightarrow$ diremos que (F, G) é um *isomorfismo forte* entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, abreviadamente *s-isomorfismo*. Neste caso (F^{-1}, G^{-1}) é também um s-isomorfismo.

Às vezes se enfraquece a exigência de ambas as funções serem bijetoras quando um dos domínios é privilegiado, como é o caso que será estudado no capítulo 3. Nesse caso o isomorfismo será chamado de *isomorfismo fraco* ou *w-isomorfismo*. Mais especificamente, se nas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é privilegiado o primeiro domínio, e F for bijetiva, diremos que F é um G-isomorfismo.

Exemplos de homomorfismos mistos:

1. Homomorfismos entre espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. Sejam $\mathcal{V} = \langle V, K, +, \cdot, 0\rangle$ e $\mathcal{W} = \langle W, K, +, \cdot, 0\rangle$ espaços vetoriais. Define-se homomorfismo de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ como uma função $F : V \longrightarrow W$ satisfazendo

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \forall x, y \in V$$

$$F(\lambda x) = \lambda F(x) \ , \forall \lambda \in K \ \forall x \in V$$

   É consequência de definição que $F(0) = 0$. Esse homomorfismo, também chamado de *transformação linear*, equivale no nosso contexto ao par (F, id) onde $F : V \longrightarrow W$ é a dada e $id : K \longrightarrow K$ é a função identidade. Então, o par (F, id) é um s-isomorfismo entre os espaços $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ se F for um isomorfismo no sentido usual

2. Sejam os espaços métricos $\mathcal{M} = \langle M, \mathbb{R}, d_1\rangle$ e $\mathcal{N} = \langle N, \mathbb{R}, d_2\rangle$ onde $d_1 : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $d_2 : N \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ são as métricas correspondentes. Um

homomorfismo misto entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ é um par (F, G) com $F : M \longrightarrow N$ e $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$d_2(F(x_1), F(x_2)) = G(d_1(x_1, x_2))\ \forall x_1, x_2 \in M$

Se $G = id$, F é chamada de imersão isométrica. Nesse contexto, (F, id) é um s-isomorfismo se, e só se, F é uma isometria.

3. Seja $X \neq \phi$ um conjunto e G um subgrupo do grupo de permutações de X, $S(X)$. Definindo $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ mediante $g \cdot x = g(x)\ \forall g \in G$ e $\forall x \in X$, então, podemos definir um G-*espaço* como a terna $\langle X, G, \cdot\rangle$. (O contexto mais interessante é o topológico, onde X é um espaço topológico e G é um subgrupo do grupo de homeomorfismo de X.)

   Sejam X, Y conjuntos, $G \leq S(X)$, $H \leq S(Y)$ e $\sigma : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então, uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita σ-*equivariante* se o par (f, σ) é um homomorfismo misto de $\langle X, G, \cdot\rangle$ em $\langle Y, H, \cdot\rangle$, isto é $f(g \cdot x) = \sigma(g) \cdot f(x)\ \forall g \in G$, $\forall x \in X$.

4. Sejam os espaços topológicos $\langle X, \tau, \in\rangle$ e $\langle Y, \sigma, \in\rangle$. Aqui, $\in$ é a relação de pertinência entre elementos do conjunto dado e membros da topologia correspondente. Assim $\in\ \subseteq X \times \tau$ (e de $Y \times \sigma$ respectivamente). Neste caso, um homomorfismo misto é um par de funções (F, G) com $F : X \longrightarrow Y$ e $G : \tau \longrightarrow \sigma$ satisfazendo,

$$\forall x \in X,\ \forall A \in \tau\colon\ x \in A \Rightarrow F(x) \in G(A).$$

   O par (F, G) é um s-isomorfismo se F e G são bijetivas e

$$\forall x \in X,\ \forall A \in \tau\colon\ x \in A \Leftrightarrow F(x) \in G(A).$$

No último exemplo ainda podemos mostrar, através do seguinte teorema, que os homeomorfismos entre espaços topológicos são de caráter algébrico, pois se correspondem com os s-isomorfismos definidos acima.

Teorema 1.2.1 *Sejam os espaços topológicos* $\langle X, \tau, \in \rangle$ *e* $\langle Y, \sigma, \in \rangle$*.*

(F, G) *é um s-isomorfismo se, e somente se,*

i $\forall A \in \tau$*:* $G(A) = F[A]$

ii F *é um homeomorfismo (ou seja,* F *é bijetora,* F *e* F^{-1} *são contínuas).*

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que (F, G) é um s-isomorfismo entre os espaços topológicos $\langle X, \tau, \in \rangle$ e $\langle Y, \sigma, \in \rangle$, isto é, F e G são bijetoras e $\forall x \in X$, $\forall A \in \tau$: $x \in A \Leftrightarrow F(x) \in G(A)...(*)$.

Provemos (i) e (ii):

i Seja $A \in \tau$, devemos mostrar que $G(A) \subseteq F[A]$ e $G(A) \supseteq F[A]$.

$\subseteq$ Seja $y \in G(A)(\subseteq Y)$. Como F é bijetora, então, $\exists x \in X$ tal que $F(x) = y$. Como $F(x) \in G(A)$ por $(*)$ temos que $x \in A$. Daí $y \in F[A]$.

$\supseteq$ Seja $y \in F[A]$, isto é, $\exists x \in A$ tal que $y = F(x)$. Por $(*)$ $y = F(x) \in G(A)$.

Portanto, $G(A) = F[A]$

ii F já é bijetora, pois (F, G) é s-isomorfismo.

Queremos mostrar que F é contínua, isto é $\forall B \in \sigma$: $F^{-1}[B] \in \tau$. Seja $B \in \sigma$, como G é bijetora, então $\exists A \in \tau$ tal que $G(A) = B$. Pelo item (i) $F[A] = G(A)$ e, como F é bijetora, $A = F^{-1}[B]$. Portanto, $F^{-1}[B] \in \tau$.

Para F^{-1} ser contínua devemos mostrar que F é aberta, isto é, $\forall A \in \tau$: $F[A] \in \sigma$. Seja $A \in \tau$ então $F[A] = G(A) \in \sigma$.

($\Leftarrow$) Devemos mostrar que (F, G) é um s-isomorfismo, ou seja

1. $\forall x \in X\ \forall A \in \tau : x \in A \Leftrightarrow F(x) \in G(A)$;
2. F é bijetora;
3. G é bijetora.

1. ($\Rightarrow$) Seja $A \in \tau$. Por (i) $F[A] = G(A)$. Então, $\forall x \in X$ se $x \in A$, $F(x) \in F[A]$. Daí $F(x) \in G(A)$.

   ($\Leftarrow$) Seja $A \in \tau$ e $x \in X$, suponhamos $F(x) \in G(A)$. De (i) $F(x) \in G(A)$, daí $F(x) = z$ para algum z em $F[A]$, ou seja $F(x) = F(y)$ com $y \in A$. Como F é injetora temos $x = y$. Logo $x \in A$.
2. De fato F é bijetora, por F ser homeomorfismo.
3. G é injetora: sejam $A, B \in \tau$ tais que $G(A) = G(B)$. Por (i) $F[A] = G(A) = G(B) = F[B]$, isto é $F[A] = F[B]$. Como F é bijetora, $A = B$.

   G é sobrejetora: seja $B \in \sigma$, então $B \subseteq Y$. Como F é bijetora, tomando $A = F^{-1}[B]$, temos $F[A] = F[F^{-1}[B]] = B$. Como F é contínua, $A \in \tau$. De (i), $G(A) = F[A] = B$. $\heartsuit$

Capítulo 2

Módulos

Podemos entender a noção de *módulo* como uma generalização da noção de espaço vetorial, apenas trocando o corpo de escalares por um anel de escalares. Aqui trabalharemos apenas com anéis comutativos com unidade, por simplicidade. Se o anel não for comutativo, como veremos em algum exemplo, teríamos que definir módulo à direita e a esquerda. Para ver mais sobre o assunto ver referências [2] e [4].

2.1 Conceitos Básicos

Daqui para frente ao nos referirmos a um anel sem nenhum tipo de especificação, suporemos este comutativo e com unidade. Caso seja necessário tratarmos de um tipo de anel diferente, serão salientadas as suas propriedades oportunamente. De fato, há exemplos interessantes com módulos sobre anéis não comutativos.

Definição 2.1.1 *Seja R um anel. Um conjunto M não vazio será dito R-módulo ou módulo sobre R se estiver munido de duas operações, que indicaremos por $+ : M \times M \longrightarrow M$ e $\cdot : R \times M \longrightarrow M$, satisfazendo:*

(Representaremos $+(x, y)$ *por* $x + y$ *e* $\cdot(a, x)$ *por* ax*)*

i $(M, +)$ *é um grupo abeliano;*

ii $\forall a, b \in R\ \forall x \in M$*:* $a(bx) = (ab)x$

(Associatividade do produto por escalar)

iii $\forall a, b \in R\ \forall x, y \in M$ *:* $a(x + y) = ax + ay$ *e* $(a + b)x = ax + bx$

(Distributividade do produto por escalar)

iv $\forall x \in M$ *:* $1x = x$ *(*$1 \in R$ *é a unidade do anel* R*.)*

Exemplos:

1. Se R é um corpo, então um R-módulo é um espaço vetorial sobre R.

2. Todo grupo abeliano G pode ser considerado um $\mathbb{Z}$- módulo. Basta definir o produto dos elementos de G pelos inteiros da seguinte forma:

   se $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in G$ então:

   $nx = x + x + ... + x$ (n vezes), se $n > 0$

   $nx = (-x) + ... + (-x)$ ($(-n)$ vezes), se $n < 0$

   $0_{\mathbb{Z}}x = 0_G$

3. Todo anel R é um módulo sobre si.

4. Sejam G um grupo abeliano e $R = End(G)$ o conjunto de todos os endomorfismos de G. É facil verificar que R é um anel não-comutativo segundo as operações de soma de funções usual e como produto a composição usual de funções. Neste caso pode-se ver que G é um R - módulo a esquerda através das seguintes operações:

   $+ : G \times G \longrightarrow G$ a mesma de G como grupo abeliano;

$$\cdot : R \times G \longrightarrow G \text{ tal que } f \cdot x = f(x)$$

O último exemplo nos mostra que um mesmo conjunto pode ser visto como módulo a respeito de diversos anéis.

2.1.1 Submódulos

Definição 2.1.2 *Sejam M um R-módulo e N um subconjuno não vazio de M. Então, N é dito R-submódulo de M se, e somente se,*

i *N é subgrupo aditivo de M*

ii *N é fechado em relação à multiplicação por escalar, isto é*

$$\forall x \in N \ \forall a \in R\text{: } ax \in N$$

Notação: $N \leq M$

Exemplos:

1. Todo subgrupo de um grupo abeliano G é um $\mathbb{Z}$-submódulo de G.

2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Então todo subespaço vetorial de V é um K-submódulo de V.

3. Sejam M um R-módulo e P e Q R-submódulos de M. O conjunto $P + Q = \{p + q / p \in P \text{ e } q \in Q\}$ é também R-submódulo de M.

Deve ser observado que se M é um R-módulo e S é um subanel de R, então, M é um S-módulo. Em particular, se N é um R-submódulo de M, então, também é um S-submódulo.

2.1.2 O Anulador

Definição 2.1.3 *Seja M um R-módulo. Chamamos de anulador de M, ao conjunto*

$Anl(M) = \{a \in R / am = 0, \forall m \in M\}$.

Devemos observar que $Anl(M)$ é um ideal de R.

Analogamente, define-se anulador de um subconjunto de M.

Definição 2.1.4 *Se $Anl(M) = \{0\}$, dizemos que M é um R-módulo fiel.*

2.1.3 Homomorfismos

Definição 2.1.5 *Sejam M, N dois R-módulos, e $f : M \longrightarrow N$. f é um R-homomorfismo de M em N se: $\forall m_1, m_2 \in M$ $\forall a \in R$:*

i $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

ii $f(am_1) = af(m_2)$

Exemplos:

1. Sejam M um R-módulo e N um R-submódulo de M. A função inclusão $i : N \longrightarrow M$ é um R-homomorfismo de N em M. Em particular o R-homomorfismo $id : M \longrightarrow M$ é chamado *homomorfismo identidade*;

2. Se M e N são R-módulos, a função $f : M \longrightarrow N$ tal que $f(m) = 0$ $\forall m \in M$ é chamada *homomorfismo nulo*;

3. Se M é um R-módulo, para cada $a \in R$ pode-se definir a função $f_a : M \longrightarrow M$ por $f_a(m) = am$ $\forall m \in M$. f_a é um R-homomorfismo chamado *homotetia*.

   Neste exemplo, o fato de R ser comutativo é essencial.

Um R-homomorfismo se diz R-monomorfismo se for injetor e R-epimorfismo se for sobrejetor.

Isomorfismos

Definição 2.1.6 *Uma função f de um R-módulo M num R-módulo N é chamada de R-isomorfismo (ou apenas isomorfismo) de M em N se for um R-homomorfismo bijetor.*

Quando existe um isomorfismo entre os R-módulos M e N dizemos que M e N são isomorfos e denotamos por $M \cong N$.

O homomorfismo identidade do exemplo 1 acima é obviamente um isomorfismo. Se a é um elemento inversível do anel R, então, a homotetia f_a do exemplo 3 é um isomorfismo.

Núcleo e Imagem Seja $f : M \longrightarrow N$ um R-homomorfismo.

Definição 2.1.7 *O conjunto $Im(f) = \{f(m)/m \in M\}$ $(\subseteq N)$ chama-se imagem de f.*

Definição 2.1.8 *O conjunto $Ker(f) = \{m \in M/f(m) = 0\}$ $(\subseteq M)$ é chamado de núcleo de f.*

É fácil verificar que a imagem de f é um R-submódulo de N e o núcleo de f é R-submódulo de M.

2.2 Módulos de Homomorfismos

Sejam M e N R-módulos, então define-se o conjunto $Hom_R(M, N) = \{f : M \longrightarrow N/f$ é R-homomorfismo$\}$. $Hom_R(M, N)$ é um R-módulo a respeito das operações

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(af)(x) = af(x)$

Se $N = R$, então $Hom_R(M, R)$ é denotado M^* e chamado de *dual de M.*

2.3 Módulos Quociente

Sejam M um R-módulo e $N \leq M$. Definimos a seguinte relação de equivalência em M.

$x \equiv y(modN) \Leftrightarrow x - y \in N$. Seja $[x]$ a classe de equivalência do elemento x. Então, no conjunto quociente $\frac{M}{N} = \{[x]/x \in M\}$, podemos definir as operações de R-módulo:

$\forall x, y \in M \ \forall a \in R$

$[x] + [y] = [x + y]$

$a[x] = [ax]$.

Definição 2.3.1 *O R-módulo* $\frac{M}{N}$ *definido acima recebe o nome de módulo quociente de* M *pelo submódulo* N.

Observa-se que se N é um submódulo de um R-módulo M, a função $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}$ dada por $\pi(x) = [x]$ é um R-epimorfismo, cujo núcleo é N.

2.3.1 Teorema do Isomorfismo para Módulos

Teorema 2.3.1 (Isomorfismo) *Sejam* M *e* N *dois R-módulos e* $f : M \longrightarrow N$ *um R-homomorfismo, então* $\frac{M}{Ker(f)} \cong Imf$. $\heartsuit$

2.4 Produto Cartesiano de Módulos

Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos e $M = \prod_{i\in I} M_i$ o conjunto das famílias da forma $(m_i)_{i\in I}$ onde para cada $i \in I$ tem-se $m_i \in M_i$.

Esse conjunto M é um R-módulo a respeito das operações:

$$(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$$

$$\alpha(m_i)_{i\in I} = (\alpha m_i)_{i\in I}$$

onde $(m_i)_{i\in I}$, $(n_i)_{i\in I} \in M$ e $\alpha \in R$.

O R-módulo assim definido é denominado *produto cartesiano* da família $\{M_i\}_{i\in I}$.

Inclusões Seja, para cada $k \in I$, a função $i_k : M_k \longrightarrow M$ dada por: para cada m em M_k, $i_k(m) = (n_i)_{i\in I} \in M$ tal que $n_k = m$ e $n_i = 0$ para todo $i \neq k$. Essa é a chamada *inclusão*.

É facil verificar que as inclusões são R-monomorfismos.

Projeções Também podemos definir, para cada $k \in I$, a função $p_k : M \longrightarrow M_k$ de modo que para cada $(m_i)_{i\in I}$ temos $p_k((m_i)_{i\in I}) = m_k$.

As projeções são R-epimorfismos.

2.4.1 Propriedade Universal

Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos, $M = \prod_{i\in I} M_i$ e $p_k : M \longrightarrow M_k$ as projeções, então é satisfeita a seguinte propriedade, conhecida como *Propriedade Universal*:

Teorema 2.4.1 *Para qualquer R-módulo N e qualquer família de R-homomorfismos $\{q_k : N \longrightarrow M_k\}$ existe um único R-homomorfismo $f : N \longrightarrow M$ tal que $q_k = p_k \circ f$.* $\heartsuit$

2.5 Aplicações Bilineares de Módulos

Sejam M e N dois R-módulos. Uma função $f : M \times N \longrightarrow P$, onde P é também um R-módulo, é dita *aplicação R-bilinear* se, para todo $m, m_1, m_2 \in M$; $n, n_1, n_2 \in N$ e $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$:

$$f(r_1m_1 + r_2m_2, n) = r_1f(m_1, n) + r_2f(m_2, n)$$

$$f(m, s_1n_1 + s_2n_2) = s_1f(m, n_1) + s_2f(m, n_2)$$

Um exemplo clássico de aplicação R-bilinear, onde $R = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é o produto interno entre espaços vetoriais.

Algumas Propriedades das Aplicações R-Bilineares Seja $f : M \times N \longrightarrow P$ uma aplicação R-bilinear como na definição acima, então vale

1. $f(0, y) = 0 = f(x, 0)$ para todo $y \in N$ e todo $x \in M$;
2. Fixado $x \in M$ então a função $f_x : N \longrightarrow P$, definida por $f_x(y) = f(x, y)$ para todo $y \in N$, é um R-homomorfismo.
3. Analogamente se fixarmos $y \in N$, a função $f^y : M \longrightarrow P$ tal que $f^y(x) = f(x, y)$ para todo $x \in M$ também é um R-homomorfismo.

2.5.1 Módulo das Aplicações R-Bilineares

Dados os R-módulo M, N e P definimos o conjunto $\mathcal{B}_R(M \times N, P) = \{f : M \times N \longrightarrow P / f \text{ é } R\text{-bilinear}\}$. Prova-se que o conjunto assim definido é um R-módulo a respeito das seguintes operações:

$$(f + g)(m, n) = f(m, n) + g(m, n) \text{ e } (rf)(m, n) = rf(m, n).$$

Proposição 2.5.1 $\mathcal{B}_R(M \times N, P) \cong Hom_R(M, Hom_R(N, P))$. $\heartsuit$

2.6 Módulos Livres

Seja M um R-módulo e $S \subseteq M$, dizemos que M é *livre sobre* S se para qualquer R-módulo N e qualquer função $f : S \longrightarrow N$, existe um único R-homomorfismo $g : M \longrightarrow N$ tal que $g|_S = f$. O conjunto S é chamado de *base* de M.

Diremos simplesmente que o R-módulo M é *livre* se existir uma base de M, nesse caso, prova-se que um subconjunto S de M é base de M se, e somente se, é linearmente independente e gera M.

Exemplos de módulos livres são os espaços vetoriais.

2.7 Produto Tensorial de Módulos

Sejam M e N dois R-módulos. Um *R-produto tensorial* dos módulos M e N é um R-módulo T junto com uma aplicação R-bilinear $f : M \times N \longrightarrow T$ tal que, para toda aplicação R-bilinear $g : M \times N \longrightarrow X$, onde X é outro R-módulo, existe um único R-homomorfismo $h : T \longrightarrow X$ que satisfaz $h \circ f = g$.

Mostra-se que dados dois R-módulos, o produto tensorial existe. Além disso é único a menos de isomorfismo, é o que diz os seguintes teoremas:

Teorema 2.7.1 (Teorema da Existência) *Dados dois R-módulos M e N, existe um produto tensorial sobre R de M e N.* $\heartsuit$

Teorema 2.7.2 (Teorema da Unicidade) *Se (T_1, f_1) e (T_2, f_2) são R-produtos tensoriais de M e N, então existe um único R-isomorfismo $h : T_1 \longrightarrow T_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$.* $\heartsuit$

As provas destes e outros resultados sobre módulos podem ser vistas em [2].

Capítulo 3

Novas Construções

Neste capítulo continuaremos considerando apenas módulos sobre anéis comutativos com unidade, salvo consideração em contrário. Usaremos também resultados conhecidos, desde que não tenhamos modificado definições relevantes a esses resultados.

3.1 Homomorfismos Mistos de Módulos

Considerando um R-módulo M como uma estrutura de espécie dupla $\langle M, R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, podemos dar a seguinte definição.

Definição 3.1.1 *(Homomorfismo misto)Sejam M um R-módulo, N um S-módulo e $\sigma : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita homomorfismo misto a respeito de σ ou σ-homomorfismo se para todo x e y em M e para todo r em R*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = \sigma(r)f(x).$$

As propriedades de f que não dependem do produto por escalar continuam válidas, por exemplo

$(\forall x)\ f(x) = -f(x)$, pois $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Donde $f(x) = -f(x)$.

Exemplos:

1. Se tomarmos $R = S$ e σ como a identidade temos que um σ-homomorfismo é um R-homomorfismo no sentido usual como definido no capítulo 2.

2. Se $R = S$ é um anel não-comutativo, $M = N$, r um elemento inversível de R fixado e $\sigma : R \longrightarrow R$ definida por $\sigma(x) = rxr^{-1}$, então, a função $f_r : M \longrightarrow M$ dada por $f_r(m) = rm$ é um σ-homomorfismo, pois se $m, n \in M$ e $\lambda \in R$ temos

   $f_r(m + n) = r(m + n) = rm + rn = f_r(m) + f_r(n)$

   $f_r(\lambda m) = r(\lambda m) = (r\lambda)m = (r\lambda)(r^{-1}r)m = (r\lambda r^{-1})rm$ $= \sigma(\lambda) f_r(m)$.

   Observa-se que σ é um automorfismo interno de R.

3. Sejam E e F espaços vetoriais complexos e $f : E \longrightarrow F$ uma função tal que $\forall x, y \in E$ e $\forall c \in \mathbb{C}$

   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e

   $f(cx) = \bar{c} f(x)$,

   onde $\bar{c}$ é o conjugado de c. Tomando $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\sigma(c) = \bar{c}$ para todo $c \in \mathbb{C}$, temos que f é um σ-homomorfismo. Usualmente a função f é dita *antilinear*.

Com estes exemplos vemos que existem homomorfismos mistos entre módulos sobre o mesmo anel sem precisarmos considerar a função identidade. Desta forma faz sentido nos perguntarmos a respeito de outras construções.

Por exemplo, será que é necessária a hipótese de σ ser um homomorfismo? Veremos que é uma consequência da definição de homomorfismo misto σ ser homomorfismo de anéis, desde que a imagem de f seja um submódulo fiel.

Proposição 3.1.1 *Sejam M_1 um R_1-módulo, M_2 um R_2-módulo e $\sigma : R_1 \longrightarrow R_2$ uma função. Se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ $(f \neq 0)$ satisfizer para todo x e y em M e para todo r em R*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = \sigma(r)f(x)$$

$$Anl(Imf) = \{0\},$$

então, σ é um homomorfismo de anéis com $\sigma(1) = 1$.

Prova: Devemos verificar que σ preserva a soma e o produto, isto é: $\forall r, s \in R_1$

i $\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s)$

ii $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$

iii $\sigma(1) = 1$

Para verificarmos cada item sejam r e s elementos quaisquer em R_1 e fixemos $m \in M$ tal que $f(m) \neq 0$. Existe esse m pois f não é a função identicamente nula.

i Então

$\sigma(r+s)f(m) = f((r+s)m) = f(rm+sm) = f(rm)+f(sm) = \sigma(r)f(m)+\sigma(s)f(m) = (\sigma(r)+\sigma(s))f(m)$.

Logo $\sigma(r+s)f(m) = (\sigma(r)+\sigma(s))f(m)$. Daí $[\sigma(r+s)-(\sigma(r)+\sigma(s))]f(m) = 0$

Como $Anl(Imf) = \{0\}$ e $f(m) \neq 0$ temos que $\sigma(r+s)-(\sigma(r)+\sigma(s)) = 0$ ou seja $\sigma(r+s) = \sigma(r)+\sigma(s)$ como queríamos.

ii Analogamente

$\sigma(rs)f(m) = f((rs)m) = f(r(sm)) = \sigma(r)f(sm) = \sigma(r)(\sigma(s)f(m)) = (\sigma(r)\sigma(s))f(m)$.

Logo $\sigma(rs)f(m) = (\sigma(r)\sigma(s))f(m)$.

Daí $[\sigma(rs)-\sigma(r)\sigma(s)]f(m) = \sigma(rs)f(m)-(\sigma(r)\sigma(s))f(m) = 0$, portanto $\sigma(rs)-\sigma(r)\sigma(s) = 0$, isto é, $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$.

iii $1f(m) = f(m) = f(1m) = \sigma(1)f(m)$, logo, $(1-\sigma(1))f(m) = 0\ \forall m \in M$, daí $1-\sigma(1) = 0$, isto é, $\sigma(1) = 1$. ♡

3.1.1 Núcleo e Imagem

Definimos a seguir conceitos conhecidos como núcleo e imagem de homomorfismos mistos. Veremos também que ainda podemos enchergar esses conjuntos como submódulos. Mais adiante veremos uma nova definição para submódulo, os submódulos mistos.

Sejam M_1 um R_1-módulo, M_2 um R_2-módulo e $f : M_1 \longrightarrow M_2$ um σ-homomorfismo. Define-se de forma usual

- o núcleo (ou kernel) de f como sendo o seguinte conjunto $Kerf = \{m \in M/f(m) = 0\}$ e

- a imagem de f como o conjunto $Imf = \{f(m)/m \in M\}$.

Proposição 3.1.2 *Sejam M um R-módulo e N um S-módulo , se $f : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo misto a respeito de $\sigma : R \longrightarrow S$ então (1) $Kerf$ é um R-submódulo de M e (2) Imf é um $\sigma[R]$-submódulo de N.*

Prova: Em cada caso deve-se motrar que cada subconjunto é fechado para soma e para o produto por escalar.

1. Sejam $x, y \in Kerf$, isto é $f(x) = 0$ e $f(y) = 0$. Para que $x + y$ esteja em $Kerf$ devemos ter $f(x+y) = 0$. Pois bem, $f(x+y) = f(x)+f(y) = 0 + 0 = 0$.

   Seja agora também $r \in R$, daí $f(rx) = \sigma(r)f(x) = \sigma(r)0 = 0$. Logo rx também está em $Kerf$.

2. Sejam $z, w \in Imf$, isto é existem $x, y \in M$ tais que $f(x) = z$ e $f(y) = w$. Daí $z + w = f(x) + f(y) = f(x + y)$. Como M é um R-módulo então $x + y \in M$, portanto $z + w \in Imf$.

   Agora tomemos $s \in \sigma[R]$, então, existe $r \in R$ com $\sigma(r) = s$. Logo, $sz = sf(x) = \sigma(r)f(x) = f(rx)$. Como $rx \in M$ temos $sz \in Imf$. ♡

3.1.2 Módulo dos σ-Homomorfismos

Sejam M um R-módulo, N um S-módulo e $\sigma : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Analogamente ao caso usual podemos definir o conjunto de σ-homomorfismos:

$\mathcal{H}_\sigma(M, N) = \{h : M \longrightarrow N/h$ é um σ-homomorfismo$\}$

Proposição 3.1.3 *$\mathcal{H}_\sigma(M, N)$ é um S-módulo a respeito das seguintes operações:*

$+ : \mathcal{H}_\sigma(M,N) \times \mathcal{H}_\sigma(M,N) \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma(M,N)$ *é tal que se* h *e* k *são* σ*-homomorfismos então* $(h+k)(m) = h(m) + k(m)$ $\forall m \in M$.

$. : S \times \mathcal{H}_\sigma(M,N) \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma(M,N)$ *é tal que se* $s \in S$ *e* $h \in \mathcal{H}_\sigma(M,N)$ *então* $(sh)(m) = sh(m)$ $\forall m \in M$.

Prova: Primeiro verifiquemos que da forma como foram definidas as operações verifica-se que $(h+k), (sh) \in \mathcal{H}_\sigma(M,N)$, ou seja que são σ-homomorfismos: Sejam $m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$, então

- $(h+k)(rm_1+m_2) = h(rm_1+m_2) + k(rm_1+m_2) = h(rm_1) + h(m_2) + k(rm_1) + k(m_2) = \sigma(r)h(m_1) + h(m_2) + \sigma(r)k(m_1) + k(m_2) = \sigma(r)(h(m_1)+k(m_1)) + h(m_2) + k(m_2) = \sigma(r)(h+k)(m_1) + (h+k)(m_2)$;

- $(sh)(rm_1+m_2) = sh(rm_1+m_2) = s(h(rm_1)+h(m_2)) = s(h(rm_1)) + s(h(m_2)) = s(\sigma(r)h(m_1)) + (sh)(m_2) = (s\sigma(r))h(m_1) + (sh)(m_2) = \sigma(r)(sh(m_1)) + (sh)(m_2) = \sigma(r)(sh)(m_1) + (sh)(m_2)$.

Verifica-se que essas operações realmente definem uma estrutura de S-módulo em $\mathcal{H}_\sigma(M,N)$. $\heartsuit$

Na prova anterior é essencial que S seja um anel comutativo.

Proposição 3.1.4 $\mathcal{H}_\sigma(M,N)$ *é também um* R*-módulo a respeito da soma definida acima e de:*

$\forall r \in R$, $\forall f \in \mathcal{H}_\sigma(M,N)$: $(rf)(m) = \sigma(r)f(m)$.

Prova: Verifiquemos que $(rf) \in \mathcal{H}_\sigma(M,N)$, isto é, que (rf) é um σ-homomorfismo.

Seja então $s \in R$ e m_1, m_2 então $(rf)(sm_1+m_2) = \sigma(r)f(sm_1+m_2) = \sigma(r)(\sigma(s)f(m_1)+f(m_2)) = \sigma(r)(\sigma(s)f(m_1)) + \sigma(r)f(m_2) = (\sigma(r)\sigma(s))f(m_1) + \sigma(r)f(m_2) = \sigma(s)(\sigma(r)f(m_1)) + \sigma(r)f(m_2) = \sigma(s)(rf)(m_1) + (rf)(m_2)$.

As propriedades que tornam $\mathcal{H}_\sigma(M,N)$ um R-módulo são de fácil verificação, vejamos que $1f = f$:

$(1f)(m) = \sigma(1)f(m) = f(1m) = f(m)$. $\heartsuit$

Na prova anterior é essencial que R seja um anel comutativo.

3.2 Isomorfismos Mistos de Módulos

Definição 3.2.1 *Sejam M um R-módulo, N um S-módulo e $\sigma : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Chamaremos de σ-isomorfismo a função bijetora $f : M \longrightarrow N$ que seja um σ-homomorfismo.*

É importante ressaltar que nessa definição não é exigido que σ seja um isomorfismo de anéis, portanto, considerando os módulos como biestruturas, um σ-isomorfismo é um isomorfismo fraco.

3.2.1 Teorema do Isomorfismo Misto

Teorema 3.2.1 (Teorema do Isomorfismo Misto) *Sejam M um R-módulo, N um S-módulo e $f : M \longrightarrow N$ um σ-homomorfismo. Então existe um σ-isomorfismo $F : \frac{M}{Kerf} \longrightarrow Imf$, tal que $F \circ \pi = f$, sendo $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{Kerf}$ a projeção canônica.*

Prova: Aqui consideramos a definição usual de módulo quociente dada no paragrafo 2.3. Devemos encontrar um homomorfismo misto $F : \frac{M}{Kerf} \longrightarrow Imf$ que seja bijetor. Definimos então, como no caso usual, $F : \frac{M}{Kerf} \longrightarrow Imf$ tal que $F([x]) = f(x)$. De fato, pela definição temos que $F \circ \pi = f$. Provaremos que tal F é um σ-isomorfismo.

i F está bem definida:

Como F está definida em um quociente devemos garantir que tal definição não depende de representantes, para isso sejam $x, x' \in M$ tais que $[x] = [x']$, mostraremos que $f([x]) = f([x'])$.

Se $[x] = [x']$ então $x \equiv x'(mod(Kerf))$, isto é, $x - x' \in Kerf$. Logo $f(x - x') = 0$. Mas $f(x - x') = f(x) - f(x')$, daí $f(x) - f(x') = 0$. Portanto, $f(x) = f(x')$, isto é, $F([x]) = F([x'])$.

ii F é σ- homomorfismo:

Sejam $x, y \in M$ e $r \in R$, então

- $F([x] + [y]) = F([x + y])$, pela definição de soma em $\frac{M}{Kerf}$. Agora pela definição de F temos $F([x + y]) = f(x + y) = f(x) + f(y) = F([x]) + F([y])$. Portanto $F([x] + [y]) = F([x]) + F([y])$.
- Analogamente, $F(r[x]) = F([rx]) = f(rx) = \sigma(r)f(x) = \sigma(r)F([x])$.

iii F é injetora:

Sejam $x, y \in M$ tais que $F([x]) = F([y])$, devemos ter $[x] = [y]$. Se $F([x]) = F([y])$, pela definição de F, temos que $f(x) = f(y)$. Daí $f(x - y) = 0$, ou seja $x - y \in Kerf$. Logo $x \equiv y(mod(Kerf))$ e portanto $[x] = [y]$.

iv F é sobrejetora:

Basta verificar que $ImF = Imf$

- Seja $y \in ImF$, isto significa que existe um $x \in M$ tal que $F([x]) = y$. Pela definição de F, $y = f(x)$. Portanto $y \in Imf$. Com isso mostramos que $ImF \subseteq Imf$.
- Para outra inclusão, tomemos $y \in Imf$, isto é , existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Mas $F([x]) = f(x) = y$. Logo $y \in ImF$. $\heartsuit$

3.3 Produto Cartesiano Misto

Na teoria usual consideramos o produto cartesiano entre dois R-módulos como um R-módulo. O problema está em como definir um produto cartesiano entre dois módulos cujos anéis de escalares são distintos. Ora, sabemos que o produto cartesiano de anéis é um anel, com as operações usuais definidas coordenada a coordenada, veremos então que esse será um anel que faz do produto cartesiano de módulos um módulo.

Proposição 3.3.1 *Sejam M um R-módulo e N um S-módulo, então, o conjunto $M \times N = \{(m,n)/m \in M \text{ e } n \in N\}$ é um $R \times S$-módulo.*

Prova: As operações que tornam esse conjunto um módulo são, para soma a operação usual e para o produto por escalar a seguinte operação: $. : (R \times S) \times (M \times N) \longrightarrow (M \times N)$ tal que $(r,s)(m,n) = (rm, sn)$. Verifiquemos as propriedades da definição 2.1.1:

i Esse item é satisfeito, pois não mudamos a definição da soma.

ii Associatividade: Sejam $r_1, r_2 \in R$, $s_1, s_2 \in S$, $m \in M$ e $n \in N$, então

$$((r_1,s_1)(r_2,s_2))(m,n) = (r_1r_2, s_1s_2)(m,n) = ((r_1r_2)m, (s_1s_2)n)$$

$$= (r_1(r_2m), s_1(s_2n)) = (r_1,s_1)(r_2m, s_2n) = (r_1,r_2)((s_1,s_2)(m,n))$$

iii Distributividade: Sejam $(r,s),(r_1,s_1),(r_2,s_2) \in R \times S$ e $(m,n),(m_1,n_1),$ $(m_2,n_2) \in M \times N$, então

- $(r,s)((m_1,n_1)+(m_2,n_2)) = (r,s)(m_1+m_2, n_1+n_2) = (r(m_1+m_2), s(n_1+n_2)) = (rm_1+rm_2, sn_1+sn_2) = (rm_1,sn_1)+(rm_2,sn_2)$ $= (r,s)(m_1,n_1)+(r,s)(m_2,n_2)$

- $((r_1, s_1) + (r_2, s_2))(m, n) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)(m, n) = ((r_1 + r_2)m, (s_1+s_2)n) = (r_1m+r_2m, s_1n+s_2n) = (r_1m, s_1n)+(r_2m, s_2n)$
$= (r_1, s_1)(m, n) + (r_2, s_2)(m, n)$

iv $(1_R, 1_S)(m, n) = (1_Rm, 1_Sn) = (m, n)$, onde 1_R e 1_S são as unidades de R e S respectivamente. ♡

Mesmo no caso de $R = S$, isto é, se M e N são R-módulos, o produto cartesiano $M \times N$ é um $R \times R$-módulo segundo a construção anterior. Nesse caso, considerando a diagonal Δ_R como subanel de $R \times R$, temos que o Δ_R-módulo $M \times N$ é isomorfismo com o R-módulo $M \times N$ usual.

Podemos então generalizar a construção acima para uma família $\{M_i\}_{i\in I}$ de módulos, onde cada M_i é um R_i-módulo: $\prod_{i\in I} M_i$ é um $\prod_{i\in I} R_i$-módulo a respeito da operação de soma usual e do produto por escalar: $(r_i)_{i\in I}(m_i)_{i\in I} = (r_im_i)_{i\in I}$. A demonstração é análoga ao caso particular mostrado acima.

Definição 3.3.1 *O módulo assim construído é chamado Produto Cartesiano Misto da família* $\{M_i\}_{i\in I}$.

Define-se também soma direta mista $\bigoplus_{i\in I} M_i$ da família $\{M_i\}_{i\in I}$, também a respeito do anel $\prod_{i\in I} R_i$. Observa-se que também é um $\bigoplus_{i\in I} R_i$-módulo, pois $\bigoplus_{i\in I} R_i$ é subanel de $\prod_{i\in I} R_i$.

3.3.1 Projeções e Inclusões

Analisemos primeiro o caso de dois módulos, M um R-módulo e N um S-módulo. Chamaremos de primeira projeção à função $P_1 : M \times N \longrightarrow N$, tal que para todo $(m, n) \in M \times N$, $P_1(m, n) = m$. É fácil ver que a primeira projeção é um p_1- epimorfismo, onde $p_1 : R \times S \longrightarrow R$ é a primeira projeção entre esses anéis. Analogamente, define-se a segunda projeção.

Generalizando para o $\prod_{i\in I} R_i$-módulo, $\prod_{i\in I} M_i$,

Definição 3.3.2 *Chamaremos de n-ésima projeção à função* $P_n : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_n$ *tal que se* $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ *então* $P_n((m_i)_{i\in I}) = m_n$

Proposição 3.3.2 *Consideremos o seguinte homomorfismo de anéis* $p_n : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_n$ *que é a n-ésima projeção do produto cartesiano dos anéis* R_i*, isto é* $p_n((r_i)_{i\in I}) = r_n$*. Então a n-ésima projeção definida acima* P_n *é um* p_n*-epimorfismo.*

Prova: Mostremos primeiro que se trata de um p_n-homomorfismo: Sejam $(m_i)_{i\in I}, (n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ e $(r_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i$, então

- $P_n((m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I}) = P_n((m_i)_{i\in I}) + P_n((n_i)_{i\in I})$, pois já vale no caso usual.

- $P_n((r_i)_{i\in I}(m_i)_{i\in I}) = P_n((r_i m_i)_{i\in I}) = r_n m_n = p_n((r_i)_{i\in I}) P_n((m_i)_{i\in I})$

P_n é sobrejetora: Seja $k \in M_n$, basta tomar $(m_i)_{i\in I}$ tal que $m_n = k$ e $m_i = 0$, $\forall i \neq n$. Obviamente $P_n((m_i)_{i\in I}) = m_n = k$. $\heartsuit$

Novamente no caso do produto cartesiano misto entre dois módulos podemos definir a função inclusão da seguinte forma: $I_1 : M \longrightarrow M \times N$ é tal que $i_1(m) = (m, 0)$. Essa função é um i_1-monomorfismo onde i_1 é a função inclusão de R em $R \times S$. Generalizando,

Definição 3.3.3 *Chamaremos de n-ésima inclusão à função* $I_n : M_n \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ *tal que* $I_n(k) = (m_i)_{i\in I}$ *de forma que* $m_n = k$ *e* $m_i = 0$ *sempre que* $i \neq n$.

Proposição 3.3.3 *Consideremos o homomorfismo de anéis* $i_n : R_n \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ *tal que* $i_n(a) = (r_i)_{i\in I}$ *de forma que* $r_n = a$ *e* $r_i = 0$ $\forall i \neq n$. *Então,* I_n *é um* i_n*-monomorfismo.*

Prova: I_n é um i_n-homomorfismo:

Novamente preserva a soma como no caso usual, vejamos agora que $I_n(ak) = i_n(a)I_n(k)$ $\forall a \in R_n$ $\forall k \in M_n$:

$I_n(ak) = (m_i)_{i\in I}$ onde $m_n = ak$ e $m_i = 0$ se $i \neq n$ e $i_n(a)I_n(k) = (r_i)_{i\in I}(n_i)_{i\in I}$ com $r_n = a$, $n_n = k$ e $r_i = 0$ e $n_i = 0$ $\forall i \neq n$. Além disso $(r_i)_{i\in I}(n_i)_{i\in I} = (p_i)_{i\in I}$ onde $p_i = r_i n_i$ $\forall i \in I$. Logo $p_n = r_n n_n = ak$ e $p_i = r_i n_i = 0$ para $i \neq n$. Com isso, temos $(m_i)_{i\in I} = (p_i)_{i\in I}$, e portanto $I_n(ak) = i_n(a)I_n(k)$.

I_n é injetora: Sejam $k, h \in M_n$ tais que $I_n(k) = I_n(h)$. Mas $I_n(k) = (m_i)_{i\in I}$ com $m_n = k$ e $m_i = 0$ se $i \neq n$ e $I_n(h) = (p_i)_{i\in I}$ com $p_n = h$ e $p_i = 0$ se $i \neq n$. Logo $(m_i)_{i\in I} = (p_i)_{i\in I}$ e portanto para todo $i \in I$ temos $m_i = p_i$. Em particular, $m_n = p_n$, ou seja $k = h$. $\heartsuit$

3.3.2 Propriedade Universal

Vejamos inicialmente para o caso de dois módulos:

Proposição 3.3.4 *Sejam M_1 um R_1-módulo, M_2 um R_2-módulo. Consideremos o produto cartesiano misto $M = M_1 \times M_2$ e p_1 e p_2 as funções projeções. Dados N um P-módulo qualquer, $q_1 : N \longrightarrow M_1$ e $q_2 : N \longrightarrow M_2$ homomorfismos mistos (a respeito de $\sigma_1 : P \longrightarrow R_1$ e de $\sigma_2 : P \longrightarrow R_2$ respectivamente), então existe um único homomorfismo misto $f : N \longrightarrow M$ a respeito de $\mu : P \longrightarrow R_1 \times R_2$ dada por $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x))$, tal que $q_1 = p_1 \circ f$ e $q_2 = p_2 \circ f$.*

Prova: Consideremos a função $\sigma : P \longrightarrow R_1 \times R_2$ de forma que se $p \in P$ então $\sigma(p) = (\sigma_1(p), \sigma_2(p))$. Desta forma é fácil ver que σ é um homomorfismo de anéis (o qual é denotado por $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$). Definindo $f : N \longrightarrow M$ através de $f(n) = (q_1(n), q_2(n))$ para todo $n \in N$. Desta forma, $(p_1 \circ f)(n) = p_1(f(n)) = p_1(q_1(n), q_2(n)) = q_1(n)$, isto é $p_1 \circ f = q_1$.

Analogamente, $p_2 \circ f = q_2$. Mostremos agora que f é um σ-homomorfismo e que é único.

f é homomorfismo: Sejam $n, n_1, n_2 \in N$ e $p \in P$ então

$f(n_1+n_2) = (q_1(n_1+n_2), q_2(n_1+n_2)) = (q_1(n_1)+q_1(n_2), q_2(n_1)+q_2(n_2)) = (q_1(n_1), q_2(n_1)) + (q_1(n_2), q_2(n_2)) = f(n_1) + f(n_2)$;

$f(pn) = (q_1(pn), q_2(pn)) = (\sigma_1(p)q_1(n), \sigma_2(p)q_2(n)) = (\sigma_1(p), \sigma_2(p))(q_1(n), q_2(n)) = \sigma(p)f(n)$.

Unicidade: Suponhamos outra função $g : N \longrightarrow M$ $(g(x) = (h_1(x), h_2(x)))$, que satifaça $q_1 = p_1 \circ g$ e $q_2 = p_2 \circ g$. Se $f \neq g$ então existe $n \in N$ tal que $f(n) \neq g(n)$. Daí para esse n teríamos $(q_1(n), q_2(n)) \neq (h_1(n), h_2(n))$, isto é $q_1(n) \neq h_1(n)$ ou $q_2(n) \neq h_2(n)$. Logo $(p_1 \circ f)(n) \neq (p_1 \circ g)(n)$ ou $(p_2 \circ f)(n) \neq (p_2 \circ g)(n)$, o que é uma contradição pois $p_1 \circ f = q_1 = p_1 \circ g$ e $p_2 \circ f = q_2 = p_2 \circ g$. $\heartsuit$

Podemos ainda generalizar essa proposição para uma família $\{M_i\}_{i\in I}$, onde cada M_i é um R_i-módulo e $M = \prod_{i\in I} M_i$ que é um $\prod_{i\in I} R_i$-módulo. Basta tomar a família $\{p_i : M \longrightarrow M_i\}$ das projeções. Daí, para qualquer outro P-módulo N e qualquer outra família de σ_i-homomorfismos $\{q_i : N \longrightarrow M_i\}$, existe um único σ-homomorfismo onde $\sigma(p) = (\sigma_i(p))_{i\in I}$, de forma que $\forall i \in I$ $q_i = p_i \circ f$. A demonstração é completamente análoga.

3.4 Aplicações Bilineares Mistas

Definição 3.4.1 *Sejam M_1, M_2, M_3 módulos a respeito dos anéis R_1, R_2, R_3 respectivamente. Sejam também $\sigma : R_1 \longrightarrow R_3$ e $\mu : R_2 \longrightarrow R_3$ homomorfismos de anéis. Uma aplicação $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_3$ será dita bilinear mista a respeito de σ e μ ou (σ, μ)-bilinear se*

- $f(ax+by,z) = \sigma(a)f(x,z) + \sigma(b)f(y,z)$;

- $f(x,ay+bz) = \mu(a)f(x,y) + \mu(b)f(x,z)$.

Exemplos:

1. Sejam V, W e K espaços vetorias complexos e tomemos $\sigma = id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\mu = {}^{-} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $\bar{a}$ é o conjugado de a. A função $f : V \times W \longrightarrow K$, tal que

   - $f(ax+by,z) = af(x,z) + bf(y,z)$ e

   - $f(x,ay+bz) = \bar{a}f(x,y) + \bar{b}f(x,z)$,

   é uma aplicação bilinear mista usualmente chamada de *sesquilinear*. Um caso particular é o produto interno complexo.

2. Seja A um anel, consideremos A como um A-módulo e sejam $\sigma, \mu : A \longrightarrow A$ homomorfismos de anéis. A função produto $h : A \times A \longrightarrow A$ definida por $h(x,y) = xy$ será (σ,μ)-bilinear se $h(ax,y) = \sigma(a)h(x,y)$ e $h(x,by) = \mu(b)h(x,y)$ ou seja $(ax)y = \sigma(a)(xy)$ e $x(by) = \mu(b)(xy)$.

3. Podemos tentar definir outros produtos no A-módulo A , por exemplo $x \cdot y = \sigma(x)y$. Vejamos que satisfaz as propriedades de um produto

   $$(x+y)\cdot z = \sigma(x+y)z = (\sigma(x)+\sigma(y))z = \sigma(x)z+\sigma(y)z = x\cdot z+y\cdot z;$$

   $$x \cdot (y+z) = \sigma(x)(y+z) = \sigma(x)y + \sigma(x)z = x \cdot y + x \cdot z;$$

   $$x \cdot (y \cdot z) = \sigma(x)(\sigma(y)z) = (\sigma(x)\sigma(y))z = \sigma(xy)z = xy \cdot z.$$

   Consideremos agora a função $h : A \times A \longrightarrow A$ tal que $h(x,y) = x \cdot y$, então

   $$h(ax,y) = (ax) \cdot y = \sigma(ax)y = (\sigma(a)\sigma(x))y = \sigma(a)(\sigma(x)y) = \sigma(a)(x \cdot y) = \sigma(a)h(x,y);$$

$$h(x, ay) = x \cdot (ay) = \sigma(x)(ay) = a(\sigma(x)y) = a(x \cdot y) = ah(x, y).$$

Ou seja, h é uma função (σ, id)-bilinear, onde $id : A \longrightarrow A$ é a função identidade.

4. Podemos ainda generalizar a construção anterior para $x \cdot y = \sigma(x)\mu(y)$, com $\sigma, \mu : A \longrightarrow A$ homomorfismos de anéis dados. Nesse caso a função $h : A \times A \longrightarrow A$ tal que $h(x, y) = x \cdot y$ é (σ, μ)-bilinear.

Algumas propriedades das funções bilineares continuam sendo válidas, por exemplo $\forall x : f(0, x) = f(x, 0) = 0$, pois

$$f(0, x) = f(0r, x) = \sigma(0)f(r, x) = 0f(r, x) = 0 \text{ e}$$

$$f(x, 0) = f(x, 0s) = \mu(0)f(x, s) = 0f(x, s) = 0.$$

Proposição 3.4.1 *Sejam M_1, M_2 e M_3 módulos a respeito de R_1, R_2 e R_3 respectivamente. Se $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_3$ é (σ, μ)-bilinear, então fixado $y \in M_2$ e $x \in M_1$, as funções $h^y : M_1 \longrightarrow M_3$ tal que $h^y(a) = h(a, y)$ e $h_x : M_2 \longrightarrow M_3$ tal que $h_x(b) = h(x, b)$ são homomorfismos mistos a respeito de σ e μ respectivamente.*

Prova: Sejam $a, a_1, a_2 \in M_1$ e $r \in R_1$ então

$$h^y(a_1 + a_2) = h(a_1 + a_2, y) = h(a_1, y) + h(a_2, y) = h^y(a_1) + h^y(a_2);$$

$$h^y(ra) = h(ra, y) = \sigma(r)h(a, y) = \sigma(r)h^y(a).$$

E se $b, b_1, b_2 \in M_2$ e $s \in R_2$ então

$$h_x(b_1 + b_2) = h(x, b_1 + b_2) = h(x, b_1) + h(x, b_2) = h_x(b_1) + h_x(b_2);$$

$$h_x(sb) = h(x, sb) = \mu(s)h(x, b) = \mu(s)h_x(b). \ \heartsuit$$

3.4.1 Módulo das Aplicações (σ, μ)-Bilineares

Sejam M_1, M_2 e M_3 módulos a respeito de R_1, R_2 e R_3 respectivamente. Fixados os homomorfismos de anéis podemos definir o seguinte conjunto

Definição 3.4.2 $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}(M_1 \times M_2, M_3) = \{h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_3 / h$ *é* (σ, μ)-*bilinear*$\}$

Para não carregar a notação usaremos apenas $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, desde que esteja claro os módulos em questão.

Proposição 3.4.2 $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ *é um* R_3*-módulo.*

Prova: Definimos a soma da seguinte forma, se $h, k \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ temos $(h + k)(x, y) = h(x, y) + k(x, y)$ para todo par (x, y) em $M_1 \times M_2$. Vejamos que $(h + k) \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, ou seja, que é bilinear mista:

- $(h + k)(ax + by, z) = h(ax + by, z) + k(ax + by, z) = \sigma(a)h(x, z) + \sigma(b)h(y, z)+\sigma(a)k(x, z)+\sigma(b)k(y, z) = \sigma(a)(h(x, z)+k(x, z))+\sigma(b)(h(y, z)+ k(y, z)) = \sigma(a)(h + k)(x, z) + \sigma(b)(h + k)(y, z)$;

- $(h + k)(x, ay + bz) = h(x, ay + bz) + k(x, ay + bz) = \mu(a)h(x, y) + \mu(b)h(x, z)+\mu(a)k(x, y)+\mu(b)k(x, z) = \mu(a)(h(x, y)+k(x, y))+\mu(b)(h(x, z)+ k(x, z)) = \mu(a)(h + k)(x, y) + \mu(b)(h + k)(x, z)$.

Definimos também uma multiplicação por escalar $\cdot : R_3 \times \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)} \longrightarrow \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ de forma que $(rh)(x, y) = rh(x, y)$. De fato $rh \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, pois

- $(rh)(ax + by, z) = rh(ax + by, z) = r(\sigma(a)h(x, z) + \sigma(b)h(y, z)) = r\sigma(a)h(x, z) + r\sigma(b)h(y, z) = \sigma(a)rh(x, z) + \sigma(b)rh(y, z) = \sigma(a)(rh)(x, z) + \sigma(b)(rh)(y, z)$;

- $(rh)(x, ay + bz) = rh(x, ay + bz) = r(\mu(a)h(x, y) + \mu(b)h(x, z)) = r\mu(a)h(x, y) + r\mu(b)h(x, z) = \mu(a)rh(x, y) + \mu(b)rh(x, z) = \mu(a)(rh)(x, y) + \mu(b)(rh)(x, z)$.

Daí, sejam $r, s \in R_3$ e $h, k \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ logo para $(x, y) \in R_1 \times R_2$:

- $(r(sh))(x,y) = r(sh)(x,y) = r(sh(x,y)) = (rs)h(x,y) = ((rs)h)(x,y);$

- $((r+s)h)(x,y) = (r+s)h(x,y) = rh(x,y) + sh(x,y) = (rh)(x,y) + (sh)(x,y);$

- $(r(h+k))(x,y) = r(h+k)(x,y) = r(h(x,y)+k(x,y)) = rh(x,y) + rk(x,y) = (rh)(x,y) + (rk)(x,y);$

- $(1h)(x,y) = 1h(x,y) = h(x,y).$

Portanto $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ é um R_3-módulo. ♡

Na prova anterior é essencial que R_3 seja um anel comutativo.

Proposição 3.4.3 *O conjunto acima definido também possui estrutura de R_1 e R_2-módulo.*

Prova: Nos dois casos definimos a soma de forma usual como na proposição anterior.

Agora, para cada caso deve-se definir uma operação de multiplicação por escalar $(\cdot)$ e verificar as propriedades correspondentes:

i Para R_1-módulo, $\cdot : R_1 \times \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)} \longrightarrow \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ é tal que $(rh)(x,y) = \sigma(r)h(x,y)$.

Verifiquemos inicialmente que da forma como foi definido o produto temos que $rh \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$:

- $(rh)(ax+by,z) = \sigma(r)h(ax+by,z) = \sigma(r)(\sigma(a)h(x,z)+\sigma(b)h(y,z)) = \sigma(r)\sigma(a)h(x,z)+\sigma(r)\sigma(b)h(y,z) = \sigma(a)\sigma(r)h(x,z)+\sigma(b)\sigma(r)h(y,z) = \sigma(a)(rh)(x,z) + \sigma(b)(rh)(y,z)$ e

- $(rh)(x,ay+bz) = \sigma(r)h(x,ay+bz) = \sigma(r)(\mu(a)h(x,y)+\mu(b)h(x,z)) = \sigma(r)\mu(a)h(x,y)+\sigma(r)\mu(b)h(x,z) = \mu(a)\sigma(r)h(x,y)+\mu(b)\sigma(r)h(x,z) = \mu(a)(rh)(x,y) + \mu(b)(rh)(x,z).$

Agora vejamos se essa operação satisfaz as propriedades de um módulo, para isso sejam $r, s \in R_1$ e $h, k \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, então para todo (x, y) em $M_1 \times M_2$:

- $(r(sh))(x, y) = \sigma(r)(sh)(x, y) = \sigma(r)(\sigma(s)h(x, y)) = (\sigma(r)\sigma(s))$ $h(x, y) = \sigma(rs)h(x, y) = ((rs)h)(x, y)$;
- $((r + s)h)(x, y) = \sigma(r + s)h(x, y) = (\sigma(r) + \sigma(s))h(x, y) = \sigma(r)h(x, y) + \sigma(s)h(x, y) = (rh)(x, y) + (sh)(x, y)$;
- $(r(h + k))(x, y) = \sigma(r)(h + k)(x, y) = \sigma(r)(h(x, y) + k(x, y)) = \sigma(r)h(x, y) + \sigma(r)k(x, y) = (rh)(x, y) + (rk)(x, y)$;
- $(1h)(x, y) = \sigma(1)h(x, y) = h(1x, y) = h(x, y)$.

Portanto,

$r(sh) = (rs)h$, $(r + s)h = rh + sh$, $r(h + k) = rh + rk$ e $1h = h$.

ii Para R_2-módulo, $\cdot : R_2 \times \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)} \longrightarrow \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ é tal que $(rh)(x, y) = \mu(r)h(x, y)$.

A demonstração é análoga ao primeiro caso. ♡

Na prova anterior também é essencial que R_1 e R_2 sejam comutativos.

Teorema 3.4.1 *Sejam M_1, M_2 e M_3 módulos a respeito de R_1, R_2 e R_3 respectivamente. Fixemos $\sigma : R_1 \longrightarrow R_3$ e $\mu : R_2 \longrightarrow R_3$. Então existe um R_3-isomorfismo (no sentido usual) entre os R_3-módulos*

$\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}(M_1 \times M_2, M_3)$ e $\mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$.

Prova: Nesse teorema consideramos ambos os conjuntos $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ e $\mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$ como R_3-módulos. Definimos a função $F : \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)} \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$ da seguinte maneira: seja $f \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, então $F(f) : M_1 \longrightarrow \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3)$ deve ser um σ-homomorfismo. Daí para todo $x \in M_1$ a função

$F(f)(x) : M_2 \longrightarrow M_3$ deve ser um μ-homomorfismo. Finalmente, então, definimos para todo $y \in M_2$, $F(f)(x)(y) = f(x,y)$. Mostraremos que essa função é um R_3-isomorfismo usual ou seja que é um R_3-homomorfismo usual e é bijetora, mas primeiro verifiquemos que $F(f) \in \mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3)$:

De fato, para cada $x \in M_1$, $F(f)(x) \in \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3)$, pois $F(f)(x) = f_x$, que já vimos que é um μ-homomorfismo. Agora verifiquemos que $F(f) : M_1 \longrightarrow \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3)$ é um σ-homomorfismo:

Sejm $x, x_1, x_2 \in M_1$ e $r \in R_3$, então par todo $y \in M_2$

- $F(f)(x_1+x_2)(y) = f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y)+f(x_2, y) = F(f)(x_1)(y)+F(f)(x_2)(y) = (F(f)(x_1) + F(f)(x_2))(y)$ e

- $F(f)(rx)(y) = f(rx, y) = \sigma(r)f(x, y) = \sigma(r)F(f)(x)(y)$.

i F é um R_3-homomorfismo: Sejam $f, g \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ e $r \in R_3$, então para todo $x \in M_1$, $y \in M_2$:

  - $F(f+g)(x)(y) = (f+g)(x, y) = f(x, y)+g(x, y) = F(f)(x)(y)+F(g)(x)(y) = (F(f)(x) + F(g)(x))(y) = (F(f) + F(g))(x)(y)$;
  - $F(rf)(x)(y) = (rf)(x, y) = rf(x, y) = rF(f)(x)(y)$.

  Logo $F(f + g) = F(f) + F(g)$ e $F(rf) = rF(f)$.

ii F é injetora: Sejam $f, g \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ tais que $F(f) = F(g)$, isto é para todo $x \in M_1$ e todo $y \in M_2$ temos $F(f)(x)(y) = F(g)(x)(y)$, ou seja $f(x, y) = g(x, y)$, $\forall x \in M_1$ $\forall y \in M_2$. Portanto $f = g$.

iii F é sobrejetora: Seja $H \in \mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$, isto é $\forall x \in M_1$, $H(x) : M_2 \longrightarrow M_3$ é um σ-homomorfismo tal que $H(x)(y) \in M_3$ $\forall y \in M_2$. Tomemos então a função $f \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ tal que $\forall x \in M_1$ e $\forall y \in M_2$ tem-se $f(x, y) = H(x)(y)$. Daí temos que $F(f)(x)(y) = f(x, y) = H(x)(y)$. Portanto $F(f) = H$. $\heartsuit$

Podemos ainda perguntar se $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ e $\mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$ são isomorfos como R_1 ou R_2-módulos, ou se há isomorfismos mistos considerando os módulos acima em relação a anéis diferentes. Por exemplo, o que acontece se considerarmos $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ como R_1-módulo e $\mathcal{H}_\sigma(M_1, \mathcal{H}_\mu(M_2, M_3))$ como R_3-módulo? É fácil verificar que eles são isomorfos como R_1 ou R_2-módulos, e que no último caso há um σ-isomorfismo entre esses módulos.

3.5 Módulos Mistamente Livres

Definição 3.5.1 *Seja M um A-módulo e $S \subseteq M$, diremos que M é mistamente livre sobre S se para todo B-módulo N, para todo $\sigma : A \longrightarrow B$ homomorfismo de anéis e toda função $f : S \longrightarrow N$, existe um único σ-homomorfismo $g : M \longrightarrow N$ tal que $g|_S = f$.*

Proposição 3.5.1 *Todo A-módulo livre é mistamente livre.*

Prova: Seja M um A-módulo livre com base S e sejam N um B-módulo, $\sigma : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis e $f : S \longrightarrow N$ uma função. Definimos $g : M \longrightarrow N$ da seguinte maneira:

Se $m \in M$, então $m = \sum_{i \in I} r_i e_i$ com $r_i \in A$ e $e_i \in S$, $\forall i \in I$(por S ser uma base de M). Então $g(m) = \sum_{i \in I} \sigma(r_i) f(e_i)$. Provemos então que desta forma g é o único σ-homomorfismo que satisfaz $g|_S = f$:

1. g é um σ-homomorfismo : Sejam $m, n \in M$, então $m = \sum_{i \in I} a_i e_i$ e $n = \sum_{i \in I} b_i e_i$ com $a_i, b_i \in A$ e $e_i \in S$. Podemos supor que m e n estão definidos sobre o mesmo conjunto (finito) de índices I. Logo, $m + n = \sum_{i \in I} a_i e_i + \sum_{i \in I} b_i e_i = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) e_i$. Aplicando a função temos $g(m + n) = g(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) e_i) = \sum_{i \in I} \sigma(a_i + b_i) f(e_i) = \sum_{i \in I} (\sigma(a_i) + \sigma(b_i)) f(e_i) = \sum_{i \in I} \sigma(a_i) f(e_i) + \sum_{i \in I} \sigma(b_i) f(e_i) = g(m) + g(n)$.

Agora seja também $\gamma \in A$, daí $\gamma m = \sum_{i\in I}(\gamma a_i)e_i$. Logo $g(\gamma m) = g(\sum_{i\in I}(\gamma a_i)e_i) = \sum_{i\in I}\sigma(\gamma a_i)f(e_i) = \sum_{i\in I}\sigma(\gamma)\sigma(a_i)f(e_i) = \sigma(\gamma)$ $\sum_{i\in I}\sigma(a_i)f(e_i) = \sigma(\gamma)g(m)$.

2. Unicidade: Seja $h : M \longrightarrow N$ um outro σ-homomorfismo tal que $h|_S = f$. Seja também $m \in M$ qualquer, daí $m = \sum_{i\in I} a_ie_i$ com $a_i \in A$ e $e_i \in S$. Logo $h(m) = h(\sum_{i\in I} a_ie_i) = \sum_{i\in I}\sigma(a_i)h(e_i) = \sum_{i\in I}\sigma(a_i)f(e_i) = g(m)$. Portanto $h = g$. ♡

3.6 Produto Tensorial Misto

Esta é a parte final e mais importante deste trabalho. Nela conjugam-se muitas das definições e construções realizadas anteriormente.

Definição 3.6.1 *Sejam M_1 um R_1-módulo, M_2 um R_2-módulo e S um outro anel junto com os homomorfismos de anéis $\sigma : R_1 \longrightarrow S$ e $\mu : R_2 \longrightarrow S$. Então, um S-produto tensorial de M_1 e M_2 é um S-módulo T junto com uma aplicação (σ,μ)-bilinear $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow T$ tal que para todo S_2-módulo X, para todo homomorfismo de anéis $\eta : S \longrightarrow S_2$ e para toda aplicacão $(\eta\circ\sigma, \eta\circ\mu)$-bilinear $g : M_1 \times M_2 \longrightarrow X$, existe um único η-homomorfismo $h : T \longrightarrow X$ tal que $h \circ f = g$.*

Notação: $T = M_1 \otimes_S M_2$

Teorema 3.6.1 (Teorema da Existência) *Dados M_1 um R_1-módulo, M_2 um R_2-módulo e S um anel junto com os homomorfismos de anéis $\sigma : R_1 \longrightarrow S$ e $\mu : R_2 \longrightarrow S$, então existe um S-produto tensorial de M_1 e M_2.*

Prova: Consideremos o conjunto $M_1 \times M_2$ e seja F o S-módulo livre gerado por $M_1 \times M_2$. O S-módulo T será um certo quociente de F.

Seja $C = \{(ax+by,z)-\sigma(a)(x,z)-\sigma(b)(y,z),(x,cy+dz)-\mu(c)(x,y)-\mu(d)(x,z)/a,b \in R_1$ e $c,d \in R_2\} \subseteq F$ e $\langle C \rangle$ o S-submódulo de F gerado por C.

Consideremos $T = \frac{F}{\langle C \rangle}$ que é um S-módulo. Definimos a função $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow T$ da seguinte maneira: $f = \pi|_{M_1 \times M_2}$ onde $\pi : F \longrightarrow T$ é a projeção canônica.

Afirmação 1 f é (σ, μ)-bilinear:

- $f(ax+by,z)-\sigma(a)f(x,z)-\sigma(b)f(y,z) = \pi(ax+by)-\sigma(a)\pi(x,z)-\sigma(b)\pi(y,z) = \pi((ax+by,z)-\sigma(a)(x,z)-\sigma(b)(y,z)) = 0$, pois $(ax+by,z)-\sigma(a)(x,z)-\sigma(b)(y,z) \in \langle C \rangle$.

  Portanto $f(ax+by,z) = \sigma(a)f(x,z)+\sigma(b)f(y,z)$;

- $f(x,cy+dz)-\mu(c)f(x,y)-\mu(d)f(x,z) = \pi(x,cy+dz)-\mu(c)\pi(x,y)-\mu(d)\pi(x,z) = \pi((x,cy+dz)-\mu(c)(x,y)-\mu(d)(x,z)) = 0$.

  Portanto $f(x,cy+dz) = \mu(c)f(x,y)+\mu(d)f(x,z)$.

Afirmação 2 T e f satisfazem a definição dada de S-produto tensorial: Sejam X um S_2-módulo, $\eta : S \longrightarrow S_2$ um homomorfismo de anéis e $g : M_1 \times M_2 \longrightarrow X$ uma aplicação $(\eta \circ \sigma, \eta \circ \mu)$-bilinear. Como $M_1 \times M_2$ gera F e F é mistamente livre, podemos estender g ao η-homomorfismo $g' : F \longrightarrow X$, isto é $g'|_{M_1 \times M_2} = g$. Temos então $g = g' \circ i$ onde $i : M_1 \times M_2 \hookrightarrow F$ é a inclusão.

Definimos $h : T \longrightarrow X$ da seguinte forma: dado $x \in T = \frac{F}{\langle C \rangle}$, isto é $x = [z] = \pi(z)$ para algum $z \in F$, então definimos $h(x) = h(\pi(z)) = (h \circ \pi)(z) = g'(z)$.

- Vejamos se h está bem definida: Sejam $[z],[w] \in T$ tais que $[z] = [w]$, então $h([z]) = g'(z)$ e $h([w]) = g'(w)$. Devemos mostrar que $g'(z) =$

$g'(w)$, isto é, $g'(z-w) = 0$. Ora, temos que $z - w \in F$, daí como $[z] = [w]$ temos $[z - w] = [0]$, ou seja $z - w \in \langle C \rangle$, então podemos escrever $z - w = \sum_{i=1}^{n} s_i c_i$, onde para todo i, $s_i \in S$ e $c_i \in C$. Além disso para cada i, c_i é da forma $(ax + by, z) - \sigma(a)(x, z) - \sigma(b)(y, z)$ ou da forma $(x, cy + dz) - \mu(c)(x, y) - \mu(d)(x, z)$. Daí temos $g'(c_i) = g'((ax+by, z)-\sigma(a)(x, z)-\sigma(b)(y, z)) = g'(ax+by, z)-\eta(\sigma(a))g'(x, z)-\eta(\sigma(b))g'(y, z) = g(ax + by, z) - (\eta \circ \sigma)(a)g(x, z) - (\eta \circ \sigma)(b)g(y, z) = (\eta\circ\sigma)(a)g(x, z)+(\eta\circ\sigma)(b)g(y, z)-(\eta\circ\sigma)(a)g(x, z)-(\eta\circ\sigma)(b)g(y, z) = 0$ ou $g'(c_i) = g'((x, cy + dz) - \mu(c)(x, y) - \mu(d)(x, z)) = g'(x, cy + dz) - \eta(\mu(c))g'(x, y) - \eta(\mu(d))g'(x, z) = g(x, cy+dz) - (\eta \circ \mu)(c)g(x, y) - (\eta \circ \mu)(d)g(x, z) = (\eta \circ \mu)(c)g(x, y) + (\eta \circ \mu)(d)(x, z) - (\eta \circ \mu)(c)g(x, y) - (\eta \circ \mu)(d)g(x, z) = 0$.

Com isso $g'(z - w) = g'(\sum_{i=1}^{n} s_i c_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i g'(c_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$. Portanto $g'(z) = g'(w)$, o que implica que $h([z]) = h([w])$ como queríamos.

- h é um η-homomorfismo: Seja $[z], [w] \in T$ e $s \in S$, então

  - $h([z] + [w]) = h([z + w]) = h(\pi(z + w)) = g'(z + w) = g'(z) + g'(w) = h([z]) + h([w])$ e

  - $h(s[z]) = h([sz]) = g'(sz) = \eta(s)g'(z) = \eta(s)h([z])$.

- Temos também que $h \circ f = g$: Seja $(x, y) \in M_1 \times M_2$ qualquer, então

$(h \circ f)(x, y) = h(f(x, y)) = h(\pi(x, y)) = (h \circ \pi)(x, y) = g(x, y)$.

- Unicidade de h: Seja $k : T \longrightarrow X$ um η-homomorfismo tal que $k \circ f = g$. Daí se $[z] \in T$, como $z \in F$, para algum conjunto finito de índices I existem $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I} \subseteq M_1 \times M_2$ e $\{s_i\}_{i\in I} \subseteq S$ tais que $z = \sum_{i\in I} s_i(x_i, y_i)$, portanto $[z] = \sum_{i\in I} s_i[(x_i, y_i)] = \sum_{i\in I} s_i\pi(x_i, y_i) = \sum_{i\in I} s_i f(x_i, y_i)$.

Daí $\forall [z] \in T$, teremos

$k([z]) = k(\sum_{i\in I} s_i f(x_i, y_i)) = \sum_{i\in I} \eta(s_i)(k \circ f)(x_i, y_i) =$
$\sum_{i\in I} \eta(s_i) g(x_i, y_i) = \sum_{i\in I} \eta(s_i)(h \circ f)(x_i, y_i) = \sum_{i\in I} h(s_i f(x_i, y_i)) =$
$h(\sum_{i\in I} s_i f(x_i, y_i)) = h([z])$. Ou seja $k = h$. ♡

Teorema 3.6.2 (Teorema da Unicidade) *Sejam (T_1, f_1) e (T_2, f_2) S-produtos tensoriais de M_1 e M_2 (a respeito de σ e μ), então, existe um único S-isomorfismo $h : T_1 \longrightarrow T_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$.*

Prova: Consideremos (T_1, f_1) um S-produto tensorial, como T_2 é um S-módulo e $f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow T_2$ uma aplicação (σ, μ)-bilinear, então, pela definição do produto tensorial para $\eta = id : S \longrightarrow S$ temos que existe um único S-homomorfismo $h : T_1 \longrightarrow T_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$.

Por outro lado, se tomarmos (T_2, f_2) como S-produto tensorial temos pela definição que existe um único S-homomorfismo $k : T_2 \longrightarrow T_1$ tal que $k \circ f_2 = f_1$.

Veremos que h é bijetora e que $h^{-1} = k$:

Para isso, basta mostrar que $h \circ k = id$ e $k \circ h = id$. Considerando (T_2, f_2) como S-produto tensorial, então para o próprio S-módulo T_2 e a função f_2, existe um único $j : T_2 \longrightarrow T_2$ tal que $j \circ f_2 = f_2$. A identidade satisfaz a condição $id \circ f_2 = f_2$. Mas $j = h \circ k$ também satisfaz pois $(h \circ k) \circ f_2 = h \circ (k \circ f_2) = h \circ f_1 = f_2$. Portanto, pela unicidade, $h \circ k = id$.

Analogamente, chegamos a $k \circ h = id$. ♡

Proposição 3.6.1 *Tomando na definição do produto tensorial $S = S_2$ e $\eta = id$ temos para todo S-módulo X*

$$\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}(M_1 \times M_2, X) \cong \mathcal{H}om_S(M_1 \otimes_S M_2, X),$$

como S-módulos.

Prova: Consideramos nessa proposição ambos os conjuntos como S-módulos.

Vamos definir um isomorfismo $\varphi : \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)} \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_S(M_1 \otimes_S M_2, X)$. Seja $g : M_1 \times M_2 \longrightarrow X$ em $\mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, então devemos ter $\varphi(g) \in \mathcal{H}\mathrm{om}_S(M_1 \otimes_S M_2, X)$. Seja f a aplicação bilinear que acompanha o S-produto tensorial de M_1 e M_2, definiremos então $\varphi(g) = h$ onde h é o único homomorfismo dado pela definição de S-produto tensorial, isto é $h \circ f = g$.

- φ é homomorfismo: Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$, então $\varphi(g_1) = h_1$, $\varphi(g_2) = h_2$ e $\varphi(g_1 + g_2) = h$ tais que $h_1 \circ f = g_1$, $h_2 \circ f = g_2$ e $h \circ f = g_1 + g_2$. Devemos mostrar que $h_1 + h_2 = h$. Para isso veremos que $(h_1 + h_2) \circ f = g_1 + g_2$. Como pela definição h deve ser a única que satisfaz isso, teremos $h_1 + h_2 = h$. Pois bem, $((h_1 + h_2) \circ f)(x, y) = (h_1 + h_2)(f(x, y)) = h_1(f(x, y)) + h_2(f(x, y)) = (h_1 \circ f)(x, y) + (h_2 \circ f)(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y) = (g_1 + g_2)(x, y)$.

  Seja agora também $s \in S$, analogamente ao caso anterior veremos que se $\varphi(sg) = h$ e $\varphi(g) = h_1$ então $h = sh_1$. Para isso basta verificar que $sh_1 \circ f = sg$. Pois bem

  $((sh_1) \circ f)(x, y) = (sh_1)(f(x, y)) = s(h_1(f(x, y))) = s(h_1 \circ f)(x, y) = s(g(x, y)) = (sg)(x, y)$.

- φ é injetora: Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$ tais que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, isto é se $\varphi(g_1) = h_1$ e $\varphi(g_2) = h_2$ então $h_1 = h_2$, $h_1 \circ f = g_1$ e $h_2 \circ f = g_2$. Daí

  $g_2 = h_2 \circ f = h_1 \circ f = g_1$, isto é $g_1 = g_2$.

- φ é sobrejetora: Seja $h \in \mathcal{H}\mathrm{om}_S(M_1 \otimes_S M_2, X)$. Basta tomar $g = h \circ f$. É fácil verificar que $g \in \mathcal{B}_{(\sigma,\mu)}$. Daí temos $\varphi(g) = k$ tal que $k \circ f = h \circ f$. Mas pela definição, k é única, portanto $k = h$. Logo $\varphi(g) = h$. $\heartsuit$

Corolário 3.6.1 *Com as hipóteses da proposição 3.6.1, temos*

$$\mathcal{H}_\sigma\ (M_1, \mathcal{H}_\mu\ (M_2, X)) \cong \mathcal{H}om_S(M_1 \otimes_S M_2, X),$$

como S-módulos. $\heartsuit$

Referências Bibliográficas

[1] Cifuentes, J. C.,*O método dos Isomorfismos Parciais: um estudo da expressabilidade matemática*, Coleção CLE; v. 10 - Campinas: UNICAMP, 1992.

[2] Hu, Sze-Tsen., *Introducción al Álgebra Homológica*, Barcelona: Vicens-Vives, 1974.

[3] Manzano, M.,*Teoría de Modelos*, Madri: Alianza Editorial, 1989.

[4] Polcino Milies, F.C., *Anéis e Módulos*, São Paulo: USP, 1972.