Aspectos topológicos na arte concreta

Ton Marar[1]

Resumo: Este artigo contém uma brevíssima introdução aos princípios da arte concreta e uma, não menos breve, introdução à topologia geométrica, em particular a classificação topológica das superfícies fechadas é apresentada. A topologia geométrica é então usada como recurso para um outro nível de compreensão da escultura *Unidade Tripartida* de Max Bill.

The mathematician's patterns, like the painter's or poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no place in the world for ugly mathematics.

G. H. Hardy

1. Arte concreta

R. G. Collingwood [4] descreve uma interessante singularidade da história da arte. Ele afirma que para o historiador acostumado ao estudo do desenvolvimento do conhecimento científico ou filosófico, a história da arte se apresenta como um dolorido e inquietante espetáculo, pois ela parece se desenvolver não para frente, mas para trás. Em ciência ou filosofia sucessivos trabalhos no mesmo campo produzem um avanço. Mas em arte, uma vez que uma escola se estabelece e atinge perfeição, vem em seguida um melancólico declínio. Local ou globalmente o equilíbrio da vida estética é permanentemente instável.

A arte moderna aparece no final do século XIX e início do século XX como manifestação de artistas insatisfeitos com os conceitos e técnicas praticadas desde a Renascença. Quase todas as fases da arte moderna foram inicialmente ridicularizadas pelo público, mas depois do choque inicial, vários movimentos se estabeleceram e influenciaram novas gerações de artistas.

O pintor francês Paul Cézanne (1836 – 1906) que embora não tenha fundado nenhuma escola artística é tido como o pai da arte moderna. Uma certa analogia com preocupações comuns aos matemáticos pode ser notada na sua afirmação – *"Pintura não existe senão para si mesma. O artista pinta uma maçã ou um rosto, mas isso é simplesmente um pretexto para a manifestação da linha e da cor, nada mais".* Cézanne se detinha na observação de mínimas variações no tom e cor observadas em longos períodos bem como nas formas de uma geometria empírica que ele considerava mais freqüente na natureza – o cilindro, a esfera e o cone.

O espanhol Pablo Picasso (1881-1973) dizia que Cézanne era seu único mestre, o pai de todos. Picasso e o francês Georges Braque (1882–1963) expandindo idéias de Cézanne desenvolvem uma arte abstrata, isto é, uma arte não figurativa usando planos e volumes – nascia o cubismo. Braque afirmava que *"A ciência tranqüiliza, a arte perturba"*. Por sua vez, Picasso tem uma interessante descrição da arte: *"A arte sempre foi arte e nunca natureza... E do ponto de vista da arte, não existem formas concretas ou abstratas, apenas formas, que são mentiras mais ou menos convincentes. Não há dúvida que estas mentiras são necessárias ao nosso eu espiritual, pois com seu auxílio construímos uma concepção estética da vida".*

[1] Professor livre docente do departamento de matemática do ICMC-USP

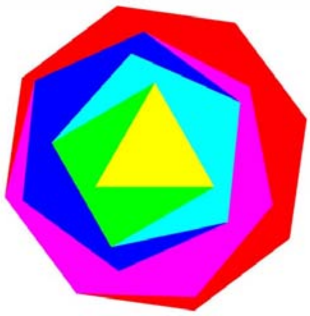
Quase simultaneamente, o russo Wassily Kandinsky (1866 - 1944) que, freqüentemente, é considerado o fundador da arte não figurativa, promove uma teoria da arte abstrata em livros e artigos [K1] [K2].

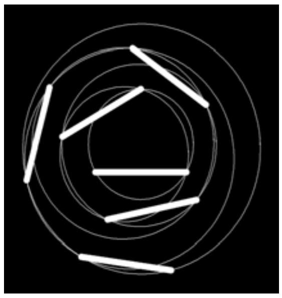
Também nessa época, um movimento - *De Stijl*, liderado pelos holandeses Theo van Doesburg (1883 - 1931) e Piet Mondrian (1872 - 1944) propõem os princípios de uma arte não figurativa, que será denominada arte concreta. Eles defendiam a pura abstração e universalidade através da redução da arte abstrata à essência da forma e da cor – reinavam as linhas verticais e horizontais e cores primárias, vermelho, azul, e amarelo, além do branco e preto.

O suíço Max Bill (1908 - 1994), aluno de Kandinsky na escola Bauhaus na Alemanha, vai além e insiste, em seus manifestos, no uso da abordagem matemática como guia final do artista concreto.

Em 1951, Max Bill recebeu o prêmio internacional da 1ª Bienal Internacional de São Paulo com a escultura *Unidade Tripartida*. Ele promoveu uma grande influência na arte moderna brasileira.

Max Bill, Unidade Tripartida - 1949





Max Bill, duas da 15 Variações sobre o mesmo tema - 1945

Depois desta bienal muitos artistas brasileiros foram estagiar na escola da cidade de Ulm, fundada e dirigida por Max Bill, depois do fechamento da Bauhaus.

Max Bill deixou uma interessante coleção de artigos. Títulos como *Forma, Função e Beleza* ou *Beleza Proveniente da Função e Beleza como Função* ou ainda *Arte como Realidade Não Variável* demonstram sua preocupação com os fundamentos da arte contemporânea.

Em seus manifestos, Max Bill rejeitava uma expressão artística através de fórmulas, mas por outro lado defendia o uso de princípios racionais na formulação de temas que poderiam concretizar abstrações e proposições artísticas.

"Estou convencido de que é possível desenvolver uma nova forma de arte na qual o trabalho do artista poderia basear seu conteúdo num grau bastante substancial na linha de abordagem matemática" ([1])

Sobre a arte concreta, Max Bill ressalta que nela idéias abstratas que inicialmente se manifestam apenas como conceitos tornam-se visíveis. Em última análise, arte concreta é a expressão pura da harmonia da medida e regra. Contudo deixa claro que não pretende criar um novo formalismo nem resumir a arte a um ramo da filosofia metafísica. Antes, ele acredita na arte como um veículo para transmissão direta de idéias, sem o perigo de o significado ser distorcido por qualquer interpretação falaciosa. Desta forma, o espaço da arte torna-se mais universal, isto é uma expressão direta e sem ambivalência.

Sob este prisma, a matemática o atrai e isso fica claro na fundamentação de sua expressão, embora, segundo ele próprio, seu conhecimento se reduzia às lições de cálculo para arquitetura, desde os tempos da Bauhaus.

De uma forma menos direta, mas não menos importante, Fernando Pessoa registra seu interesse em matemática. Por volta de 1915, no início da divulgação da teoria da relatividade de Einstein, Pessoa publicou *Idéias Estéticas*. No trecho O Poeta e a Cultura encontra-se referências a conhecimentos interdisciplinares inicialmente paradoxais, a poesia e as coordenadas de Gauss: *"Um poeta que saiba o que são as coordenadas de Gauss tem mais possibilidades de escrever um bom soneto de amor do que um poeta que não o saiba. Nem há nisto mais que um paradoxo aparente. Um poeta que se deu ao trabalho de se interessar por uma abstração matemática tem em si o instinto da curiosidade intelectual, e quem tem em si o instinto da curiosidade intelectual colheu por certo, no decurso da sua experiência da vida, pormenores do amor e do sentimento superiores aos que poderia ter colhido quem não é capaz de se interessar senão pelo curso normal da vida que o afeta - a manjedoura do ofício é a arreata da submissão. Um é mais vivo que o outro pelo menos como poeta: da aí a relação sutil entre as coordenadas de Gauss e a Amaryllis do momento. Um é um homem que é poeta, o outro um animal que faz versos."*

2. Topologia geométrica

2.1 Classificação das superfícies

Esta seção contém material básico sobre topologia geométrica; em particular serão tratados informalmente alguns aspectos da classificação topológica das superfícies. O leitor interessado poderá aprofundar-se no assunto consultando a bibliografia indicada, em particular o excelente trabalho de João Sampaio [11] (v. [2], [5]).

Iniciaremos recordando as *definições* de ponto, linha, linha reta, superfície, superfície plana, e outras do tipo, segundo Euclides (300 a.C.) ([6]), não aquelas de Kandinsky ([7]), que também devem ser úteis, mas não servem aos propósitos deste texto. Lembremos que a geometria euclidiana é um sistema dedutivo baseado em um conjunto de postulados e noções comuns. E também que diferentes conjuntos de postulados podem gerar diferentes geometrias, como por exemplo, as chamadas geometrias não-euclidianas (v.[12], [9]).

Segundo Euclides, um *ponto* é aquilo que não tem partes; *linha*, aquilo que só tem comprimento; e *superfície*, aquilo que só tem comprimento e largura. Existe aqui material suficiente para grandes discussões filosóficas, porém não nos deixaremos seduzir.

Observemos que das definições transparecem o caráter zero dimensional do ponto, unidimensional da linha e bidimensional das superfícies. Ponto, linha e superfície são conceitos e não há nenhuma chance de encontrá-los como objetos na natureza. Contudo, podemos representá-los através de certos objetos tridimensionais, como de fato todos os objetos ao nosso redor o são. Tais modelos devem ter características semelhantes àquelas descritas nos conceitos. Assim, podemos tratar esses conceitos como objetos da geometria. Por exemplo, a chapa de metal que Max Bill usou para sua *Unidade Tripartida* tem espessura tão reduzida em comparação à largura e ao comprimento que serve como uma representação de uma superfície no sentido de Euclides (v. [10]). Como diria Cézanne, é possível que a Unidade Tripartida seja apenas um pretexto para Max Bill apresentar seu plano curvado e torcido.

Existe um erro freqüente entre os não familiarizados com o texto de Euclides em pensar que superfícies e linhas torcidas e curvadas são não-euclidianas. Linhas e superfícies de todos os tipos podem ser objetos da geometria euclidiana como também da não-euclidiana. O que determinará uma coisa ou outra são certas propriedades relacionais.

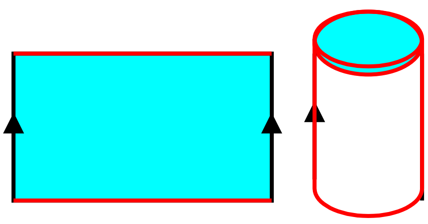
Com efeito, em linguagem moderna, particularmente depois de Felix Klein (1870), a geometria euclidiana é o estudo do espaço cujos objetos possuem propriedades que não se alteram quando a eles é aplicado um movimento rígido (e.g. translações e rotações). Em outras palavras, a geometria euclidiana é aquela na qual a relação de congruência entre os objetos mantém suas características métricas: comprimentos, áreas, ângulos, etc. Analogamente caracterizam-se as geometrias não-euclidianas por meio de outro tipo de relação de congruência. O leitor interessado encontrará na internet o excelente trabalho de Wilson Stothers' [12]

Sob este ponto de vista, a saber, da caracterização de geometrias através da relação de congruência entre os seus objetos, a topologia geométrica é a geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada pelos *homeomorfismos*, isto é, pelas transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas. Devido a isso, os objetos na topologia podem ser representados por objetos feitos de um material perfeitamente deformável. Logo, em topologia não se fala em comprimentos, áreas, ângulos etc., porém se esticarmos ou encolhermos o objeto, suas, digamos, características topológicas não se alteram. O que se mantém é a *essência* da forma, um conceito difícil de explicar, mas que deve se esclarecer abaixo.

No universo topológico, um triângulo e um círculo, por exemplo, são iguais, quer dizer, homeomorfos; de fato qualquer polígono é homeomorfo a um círculo. Portanto, na topologia só existem dois objetos unidimensionais (sem bordo), a saber, a linha fechada, que pode ser representada pelo círculo, e a linha aberta, representada, por exemplo, pela linha reta.

Os objetos bidimensionais, isto é as superfícies, são também classificados sob a óptica topológica e se dividem em duas classes, a saber, as superfícies orientáveis e as não-orientáveis. As orientáveis são aquelas que possuem dois lados (como no caso do plano euclidiano). Já as não-orientáveis possuem apenas um lado (assim, nem tudo na vida tem dois lados!).

Na construção de todas as superfícies topológicas compactas, duas superfícies são essenciais, a saber, o cilindro (Fig. 2(ii)) e a *faixa de Möbius* (Fig. 3(ii)). Ambas são topologicamente obtidas a partir de um retângulo (portanto, um pedaço de plano euclidiano, ou melhor, uma película de borracha perfeitamente deformável), identificando-se um par de arestas opostas diretamente (Fig. 2(i)) ou após um giro de 180 graus (Fig. 3(i)). Note que o cilindro tem dois círculos como bordo (ou borda) enquanto na faixa de Möbius o bordo é uma única curva fechada (e, portanto, é topologicamente um círculo).



(i) (ii)

Fig.2

(i)

Fig. 3 (ii)

Este modo de representar uma superfície na topologia, por meio de um polígono (neste caso o retângulo), identificando-se pares de arestas é denominado *modelo plano* da superfície.

A classificação das demais superfícies compactas em topologia se dá através de um processo de identificação ao longo das linhas de borda ou por meio de fusões de duas ou mais superfícies. Aquelas que contêm ao menos uma faixa de Möbius são as superfícies não-orientáveis.

Vamos nos concentrar na descrição das superfícies compactas e sem bordo, ditas *superfícies fechadas.* Bordos de superfícies compactas são círculos, aos quais podemos colar discos, um para cada círculo, e transformá-las em superfícies fechadas. A superfície representando a *Unidade Tripartida* é uma superfície compacta com apenas uma componente de bordo.

A lista de diferentes superfícies na topologia começa assim:
A esfera $\mathbf{S^2}$ (Fig. 4 (i)), que é topologicamente um cilindro com as circunferências de dois discos coladas nas duas componentes de seu bordo; o *toro* $\mathbf{T^2}$ (Fig. 4 (ii)), que é um cilindro com as duas circunferências que compõem seu bordo identificadas (mantendo a orientação de cada circunferência); o *plano projetivo* $\mathbf{P^2}$ (Fig. 4 (iii)), que é uma faixa de Möbius com um disco cuja circunferência é colada na circunferência que constitui o bordo da faixa; e a *garrafa de Klein* $\mathbf{K^2}$ (Fig. 4 (iv)), que são duas faixas de Möbius identificadas ao longo do bordo (Fig. 4(v)). Alternativamente pode-se ver a *garrafa de Klein* como um cilindro cujas circunferências do bordo, tendo orientações opostas, são identificadas (Fig. 4 (vi)).

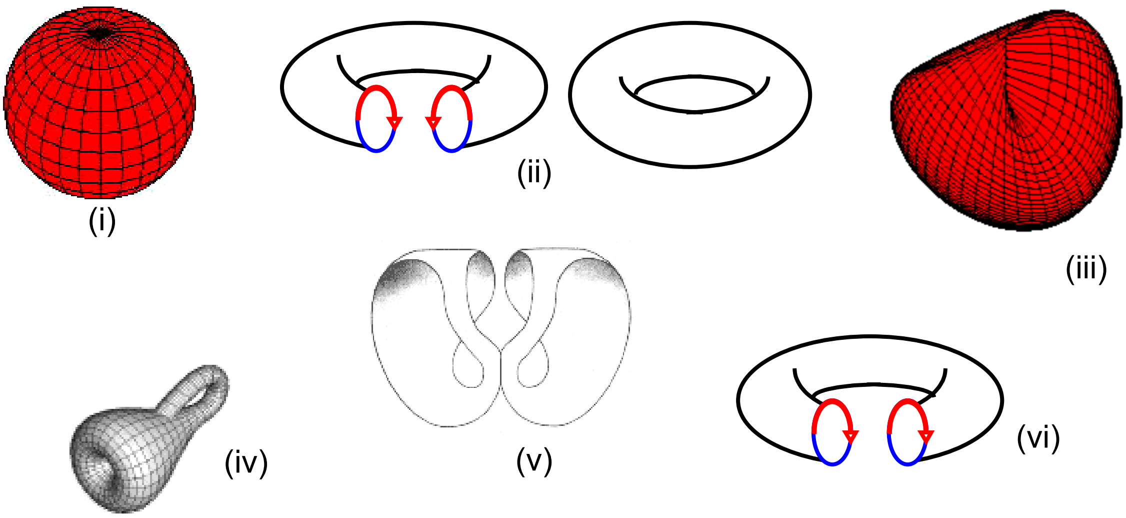
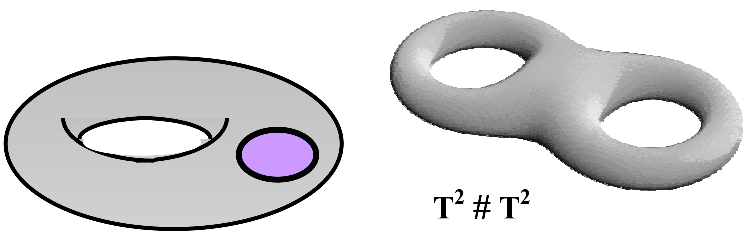


Fig. 4

A partir dessas superfícies e operações adequadas, obtêm-se todas as superfícies compactas na topologia. De fato, podemos retirar pontos (ou círculos abertos) da superfície criando assim novas componentes de bordo, ou ainda, dadas duas superfícies fechadas $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, retiramos um círculo de cada uma e identificamos as duas componentes de bordo criadas. Essa operação é denominada *soma conexa* de superfícies e denotada por $\mathbf{F}_1\#\ \mathbf{F}_2$.

Exemplo de soma conexa:
Dois toros somados criam um bi-toro.



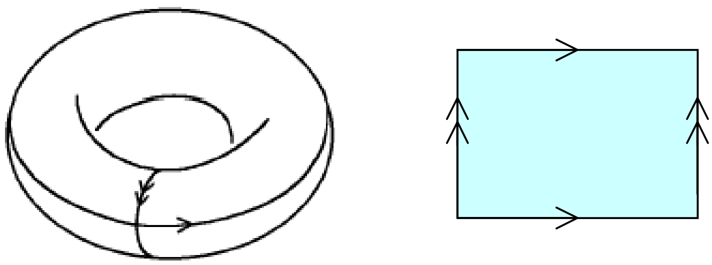
Qualquer superfície fechada **F** somada com uma esfera gera a mesma superfície **F**. De fato, a esfera com um círculo removido é um disco e identificando a circunferência deste com a componente de bordo criada em **F** no processo de soma conexa, simplesmente retorna **F** ao estado inicial. Assim, a esfera é o elemento neutro desta operação de soma, isto é, $\mathbf{F} \# \mathbf{S}^2 = \mathbf{F}$. Nesta operação de soma não vale o cancelamento. Exemplo, $\mathbf{T}^2 \# \mathbf{P}^2 = \mathbf{K}^2 \# \mathbf{P}^2$.

2. 2. Modelos planos

Na confecção das superfícies utilizamos certas regras de identificação entre superfícies mais simples, a saber, discos, cilindros e faixas de Möbius. Essas duas últimas têm modelo plano bem simples, baseado num retângulo.

Para se obter o modelo plano de qualquer superfície procedemos da maneira inversa, isto é, cortamos a superfície a ser "modelada" ao longo de curvas adequadas, até que seja possível "planificar" a superfície. Um procedimento bastante comum em culinária (concordarão os familiarizados com esta atividade).

Vejamos no caso do toro. Cortando-o ao longo das linhas indicadas (Fig.6 (i)), obtemos o seu modelo plano (Fig.6 (ii)):



(i) (ii)

Fig. 6

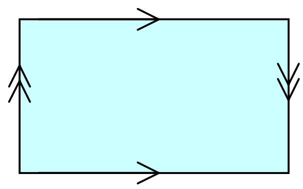
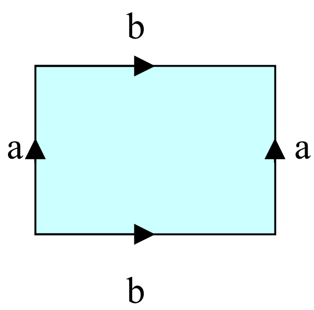


Fig. 7

No caso da *garrafa de Klein*, o modelo plano é bastante parecido ao do toro (o que era de esperar já que ambos são provenientes de um cilindro com bordas identificadas), basta inverter uma das setas (Fig. 7).



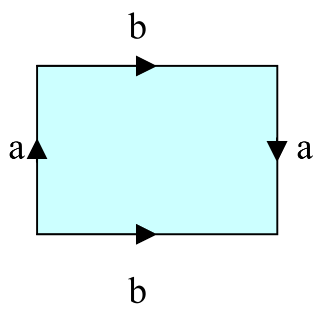


Fig. 8

Note que os modelos planos do toro e da *garrafa de Klein* são ainda retângulos, com as setas orientando as identificações dos dois pares de arestas opostas.

Podemos simplificar esses modelos planos, evitando pares de setas com duas pontas e pares de setas com uma única ponta, se usarmos letras para ressaltar os pares de setas a serem identificados (Fig. 8).

2. 3. Representação por palavras

Chegamos aqui a um ponto crucial da representação das superfícies em topologia. Criaremos uma seqüência de letras, percorrendo-se a borda do modelo plano, por exemplo, no sentido horário. Ao encontrar uma letra neste percurso ela fará parte da seqüência de letras, caso o sentido do percurso coincida com o sentido da seta à qual a letra esta associada. Se o sentido da seta for contrário ao do percurso, então a letra com um expoente –1 fará parte da seqüência de letras. Esta seqüência é denominada *palavra* associada à superfície.

Através das palavras chegamos a uma descrição altamente sintética da superfície. O mínimo, sem qualquer redundância, sem espaço para qualquer desvio de significado, enfim o máximo da beleza descritiva de uma idéia, tal qual Max Bill esperava da matemática.

Várias palavras podem representar a mesma superfície; por exemplo, basta começar a construção da palavra em diferentes vértices do modelo plano. Deste modo, $\mathbf{ba^{-1}b^{-1}a}$ é ainda um toro. Percorrendo a seqüência no sentido anti-horário obtemos outro *sinônimo* para o toro, digamos $\mathbf{ab^{-1}a^{-1}b}$. Podemos também trocar as letras por outras ainda não usadas na palavra, e.g., trocando a letra **b** pela letra **x** na palavra $\mathbf{aba^{-1}b^{-1}}$ obtemos $\mathbf{axa^{-1}x^{-1}}$**,** a qual também representa um toro.

Palavras descrevem superfícies fechadas. Para uma superfície com bordo F vamos adotar a seguinte estratégia: assumiremos como palavra da superfície F aquela correspondente à superfície fechada **F** obtida de F colando-se discos nos bordos de F. Deste modo, a faixa de Möbius e o plano projetivo terão a mesma palavra. Desta forma, se M e N são superfícies com a mesma palavra então **M** e **N** são homeomorfas.

2.4. Somas conexas e palavras

O processo de soma de duas superfícies gerando uma terceira também pode ser observado nas palavras que as representam. Com efeito, retornemos ao exemplo da faixa de Möbius e da garrafa de Klein (Fig. 8).

A palavra associada à faixa de Möbius é **aa** (ou **bb**, tanto faz) e da garrafa de Klein é $\mathbf{bab^{-1}a}$. Justificaremos abaixo que a garrafa de Klein também pode ser representada pela palavra **aabb**. Daí que a fusão das superfícies se traduz na concatenação das palavras. Neste caso, **aa** e **bb** representando as duas faixas de Möbius que compõem a garrafa de Klein. Alternativamente, a garrafa de Klein pode ser vista como a soma conexa de dois planos projetivos. De fato, retirando-se um disco de cada plano projetivo obtemos duas faixas de Möbius!

Várias são as operações possíveis de se fazer com palavras e ainda obter a mesma superfície. Para o propósito deste texto destacaremos apenas uma dessas operações da *gramática topológica*:

Operação Fundamental: se numa palavra uma letra está entre duas letras iguais então aquela que está no meio pode ser deslocada invertendo-se o sinal de seu expoente, e.g. $\mathbf{...ab^{-1}a...}$ é sinônimo de **...baa...** De fato, suponha inicialmente que seja dado o modelo plano da superfície cuja palavra contém a seqüência $\mathbf{ab^{-1}a}$ (Fig. 9(i)). Corta-se o modelo ao longo da linha pontilhada (Fig. 9(ii)). Giram-se as partes identificando-se as setas indicadas por **a** (Fig. 9(iii) e (iv)). O resultado é um modelo que agora tem a seqüência **bcc** (Fig. 9(v)) no lugar de $\mathbf{ab^{-1}a}$. Como a letra **a** não é usada na palavra resultante **...bcc...,** podemos trocar a letra **c** pela letra **a**, obtendo-se portanto a palavra **...baa...**, como havíamos afirmado.

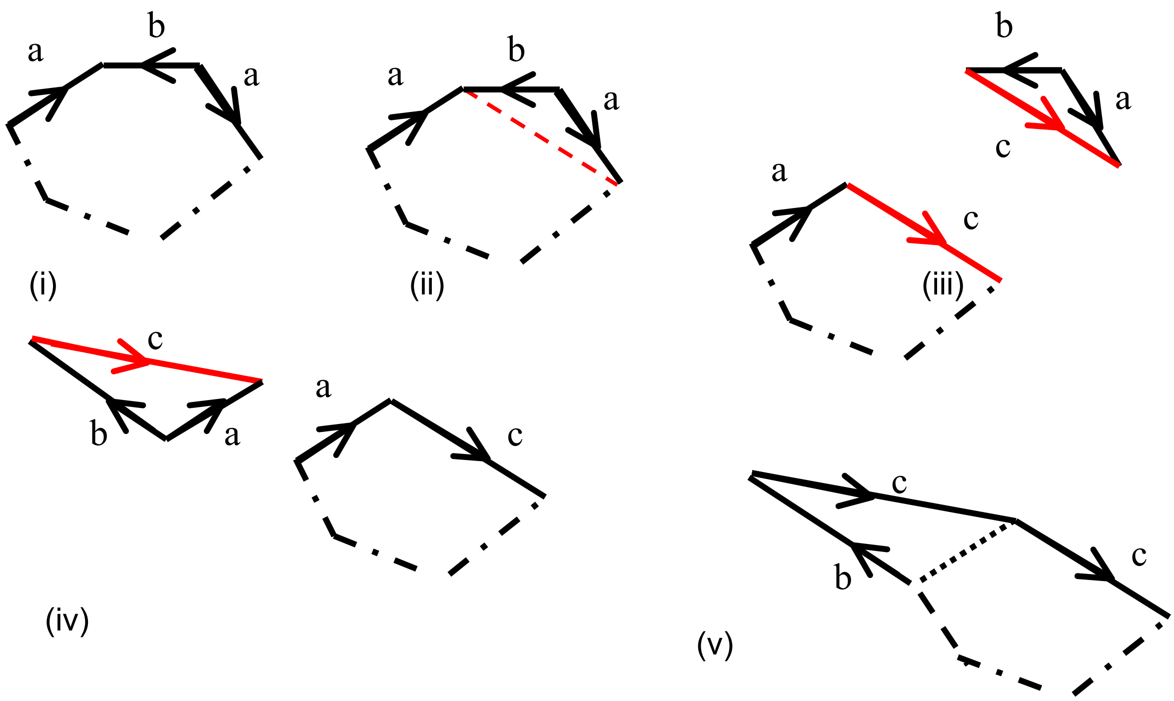


Figura 9

Aplicando-se esta operação na palavra **bab^{-1}a,** a qual representa a garrafa de Klein, obtemos **bbaa.** Isto ressalta a fusão das duas faixas de Möbius **aa** e **bb** na confecção da garrafa de Klein, ou melhor a soma conexa de dois planos projetivos $\mathbf{P^2 \# P^2 = K^2}$.

Ainda sobre o processo de corte e colagem das superfícies, podemos obter superfícies aparentemente diferentes, porém de fato topologicamente iguais. Em outras palavras, depois de cortar a superfície ao longo de uma linha, podemos deformá-la e em seguida colá-la ao longo da mesma linha, tomando-se o cuidado de manter a orientação original das linhas de corte. Veja o exemplo na figura 10.

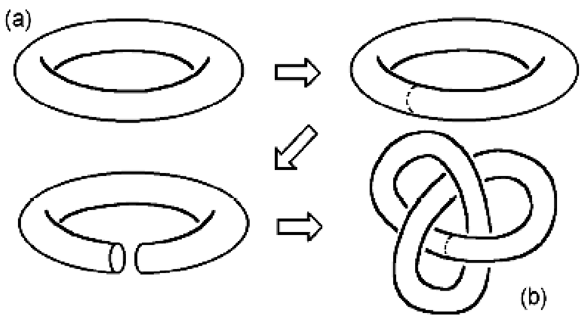


Figura 10

Iniciamos com um toro (Fig. 10(a)). Escolhemos uma curva, neste caso um anel envolvendo o toro. Cortamos a superfície ao longo desta curva. Enodamos a superfície e ao final colamos a superfície (Fig. 10(b)) identificando a linha de corte. As superfícies, inicial (toro) e final (toro enodado), são homeomorfas, isto é, topologicamente são iguais.

A faixa de Möbius foi a superfície que mais fascinou Max Bill, inclusive *redescobrindo-a* através de sua escultura *Faixa Sem Fim* (Fig. 5), em 1932. Anos mais tarde, quando soube que Möbius já havia apresentado tal superfície em um encontro de matemáticos, em 1872, Bill se desculpou pela ignorância (v. [3] p. 121).

Fig. 5

3. Análise topológica da Unidade Tripartida

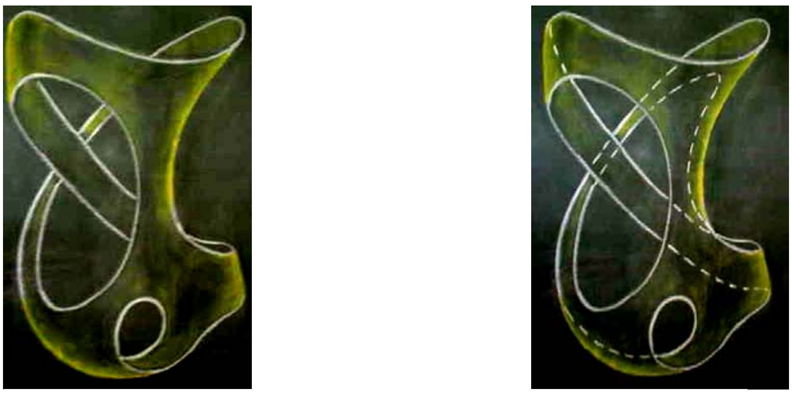
Em *Quinze variações sobre um mesmo tema* (Fig. 1(iii)), Max Bill produziu um texto bastante minucioso a respeito dos detalhes do processo de criação e confecção da obra. Ressaltou que embora as variações tenham sido feitas pelo método geométrico, a idéia controladora seguia o jogo puro da forma e da cor e cujo único objetivo era despertar um sentimento prazeroso.

Fig. 11

A rica descrição que acompanha as *Quinze variações sobre o mesmo tema* contrasta com uma única frase codificada sobre a *Unidade Tripartida* (Fig. 11). Segundo ele, sua *Unidade Tripartida* é composta de um sistema de círculos cujos centros estão nos vértices de um triângulo equilátero ([3] p. 122).
De fato, se esta opaca descrição da *Unidade Tripartida* não está errada, também não ajuda na compreensão dos princípios concretos da obra.

Os possíveis tópicos de matemática subjacentes às duas obras diferem. No caso das *Quinze Variações sobre o Mesmo Tema* o discurso se apóia na tradicional geometria euclidiana, enquanto a *Unidade Tripartida* requer alguma familiaridade com a topologia no nível apresentado na seção anterior.

Passaremos agora à análise da *Unidade Tripartida* (Fig. 12(i)). Note que ela representa uma superfície com uma componente de bordo. Vamos mostrar que esta superfície é topologicamente equivalente à superfície obtida da soma conexa de três planos projetivos com um ponto removido (seu bordo), o que é o mesmo que dizer que a palavra associada é da forma **aabbcc**.

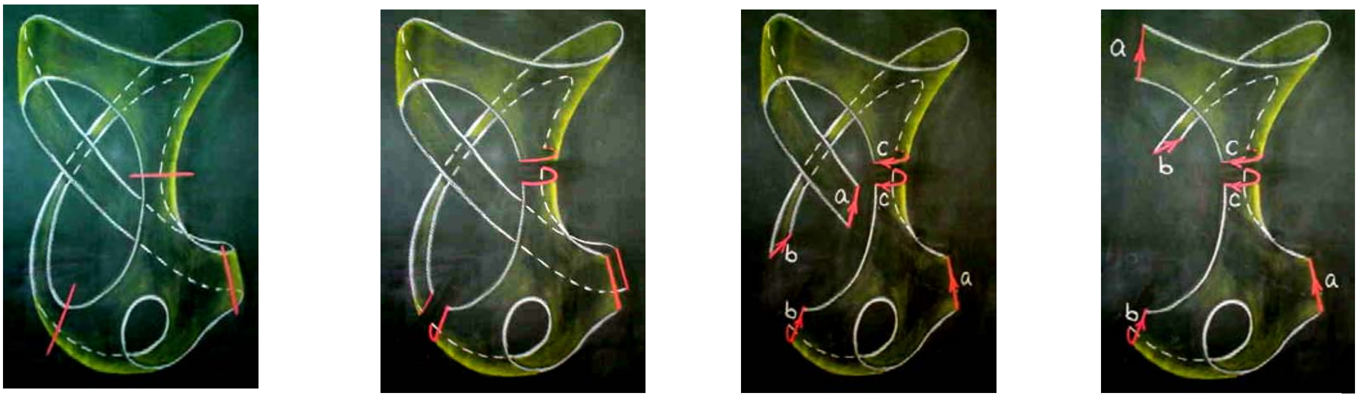


(i) (ii)

Fig. 12

Na Figura 12 (ii) indicamos o bordo da superfície para facilitar a visualização.

Com o propósito de obter o modelo plano, inicialmente cortamos a superfície ao longo de três linhas dividindo-a em duas partes (Fig. 13 (i), (ii)). Em seguida procedemos com deformações adequadas (Fig.13 (iii), (iv)), indicando os cortes com setas e letras para posterior identificação.



(i) (ii) (iii) (iv)

Fig. 13

Nota-se que a parte superior é uma superfície (com bordo) topologicamente equivalente a um triângulo com arcos (correspondentes ao bordo) em cada um dos três vértices (Fig. 14).

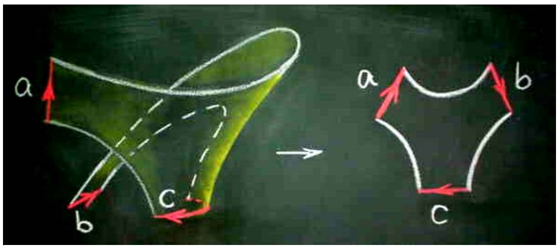
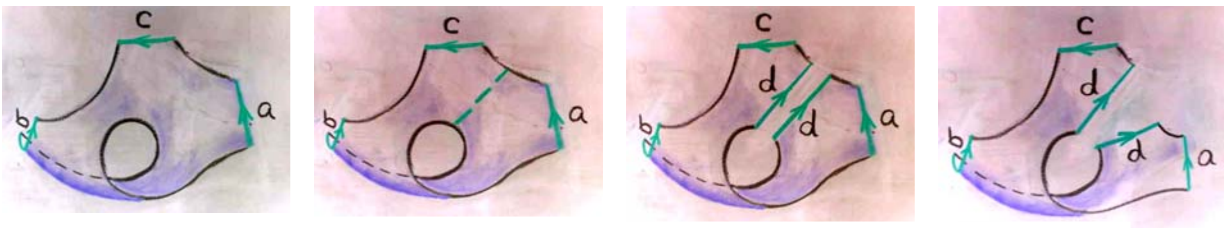


Fig. 14

Já a parte inferior (Fig. 15(i)) merece mais um corte ao longo de uma linha apropriada a fim de ser planificada (Fig. 15(ii)). Uma deformação (Fig. 15(iii) e (iv)) mostra que esta parte é topologicamente equivalente a um pentágono com arcos correspondentes ao bordo em cada um dos cinco vértices (Fig. 16).



(i) (ii) (iii) (iv)

Fig. 15

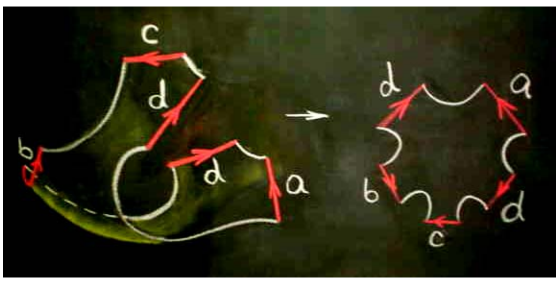
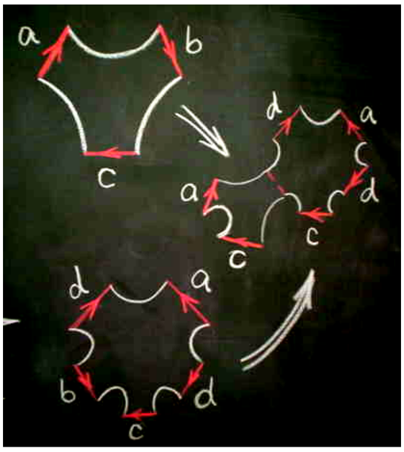


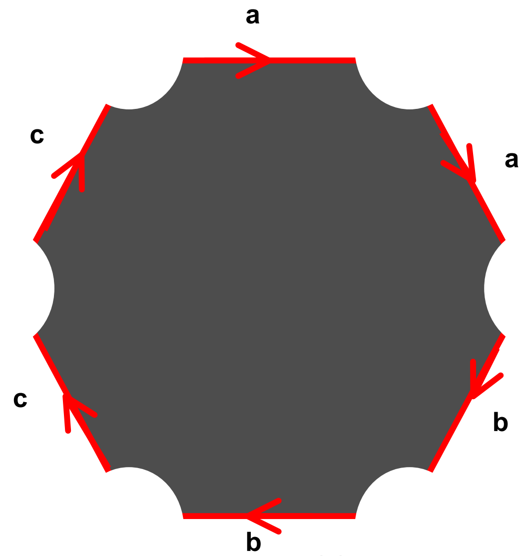
Fig. 16

Finalmente, identificando uma das arestas do triângulo, digamos **b,** com sua correspondente no pentágono obtemos um hexágono (com arcos correspondentes ao bordo em cada um dos seis vértices) como modelo plano da superfície (Fig. 17(i)).

Este é, portanto, um modelo plano da *Unidade Tripartida* com a palavra associada **ada^{-1}dcc.** Aplicando-se a esta palavra a operação fundamental descrita na seção anterior, obtemos **aaddcc** como um sinônimo topológico. O que é o mesmo que a palavra **aabbcc** (Fig. 17 (ii)).



(i)



(ii)

Fig. 17

Sendo assim, identificando-se as setas correspondentes deste modelo obtemos uma superfície homeomorfa à superfície representada pela *Unidade Tripartida*. Em outras palavras, a *Unidade Tripartida* é topologicamente equivalente à **P^2** # **P^2** # **P^2** com um ponto removido (seu bordo).

O topólogo/ilustrador George Francis apresenta no seu livro [5] outro desenho que representa um bouquet de 3 faixas de Möbius (Fig. 19). Denominaremos a seqüência abaixo (Fig. 18, 19, 20) *Três Variações sobre o Tema Unidade Tripartida*, com o perdão de Max Bill.

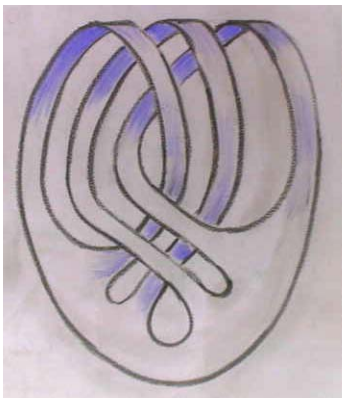


Fig. 18

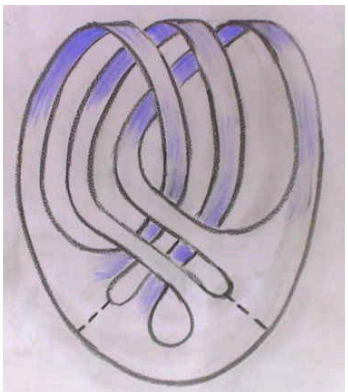


Fig. 19

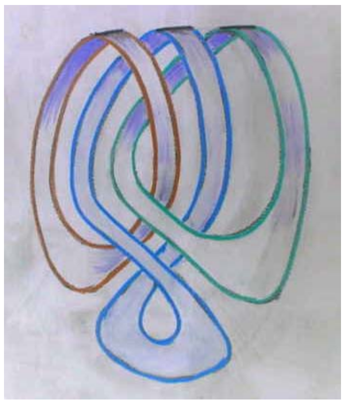
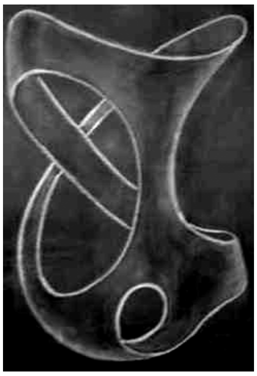
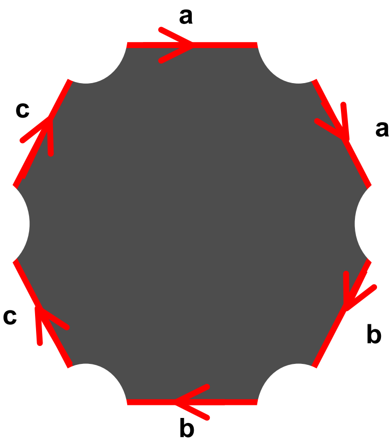


Fig. 20

Três variações sobre o tema Unidade Tripartida

Portanto, várias representações da Unidade Tripartida, ou melhor de **P^2** # **P^2** # **P^2** com um ponto removido, podem ser produzidas com diferentes apelos artísticos.





Agradecimentos:
À Alessandra Pavesi e David Sperling pelos comentários críticos e aos organizadores da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, em particular Michel Spira e Elinalva Vasconcelos pela oportunidade.

Bibliografia

[1] BILL, Max. The mathematical approach in comporary art. *Arts and Architecture*, Los Angeles, n. 8, 1954.
[2] CARTER, J. Scott. *How surfaces intersect in space.* 2nd edition. New Jersey: World Scientific, 1995. (Series on Knots and Everything, v. 2).
[3] CERRITELLI, Claudio. *Premio internazionale di pintura scultura i arte elettronica dalla Fondazione Marconi a Max Bill*. Bologna: Grafis Edizioni, 1988.
[4] COLLINGWOOD, R. G.; *Speculum Mentis: or The Map of Knowledge*, 1924
[5] FRANCIS, George. A topological picturebook. New York: Springer-Verlag, 1987.
[6] HEATH, Sir Thomas. *The thirteen books of Euclid's elements of Euclid.* New York: Dover Publications, 1906.
[7] KANDINSKY, Vassily. *Ponto e linha sobre plano.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.
[8] KANDINSKY, Vassily. Do espiritual na arte. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
[9] MARAR, Ton. To be, and not to be: that is the answer ou brevíssima introdução às geometrias não-euclidianas como recurso para um outro nível de compreensão das obras de Regina Silveira e Eduardo Coimbra. In: DO CONCEITO ao espaço. Curadoria Agnaldo Farias. São Paulo: Instituto Tomie Ohtake, 2002. p. 20-23.
[10] MARAR, Ton; SPERLING, David. *Em matemática, metadesenhos.* SAP-EESC, 2001.
[11] SAMPAIO, João. *Introdução à topologia das superfícies.* UFSCar, 2000. http://www2.dm.ufscar.br/~sampaio/xiiiebt_superficies.PDF
[12] STOTHERS, W.; The Klein view of geometry. http://www.maths.gla.ac.uk/~wws/cabripages/klein/klein0.html

Vila Pureza, setembro de 2004.

Ton Marar
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo, São Carlos
ton@icmc.usp.br