A Harmonia da Álgebra
ou a
Álgebra da Harmonia

Marcos de Pinho
CEFET-RJ
depinhogalois@aol.com

1)Introdução:

A primeira vez que comecei a estudar música, eu já estava na Universidade, ou seja , já a Matemática estava na minha alma primeiro. Ao aprender a formação de acordes, a minha mente entendeu que os acordes eram vetores. Com o tempo, quando me tornei professor, experimentei com meus alunos, durante a aula de definição de espaços vetoriais, levar o violão e tocar as "transformações lineares, mudanças de base". Com a criação do Mestrado em Educação em Matemática, resolvi realmente me aprofundar na mistura das disciplinas como minha área de pesquisa. Surpreendentemente, descobri o excelente livro do professor [Abdnour,1999] e, assim, observei que outros colegas, antes de mim, haviam visto a mágica conexão entre a Matemática e a Música.

O presente trabalho visa mostrar uma faceta da teoria musical mais moderna, a "harmonia funcional" (o nome é bem matemático), que estuda a formação dos acordes ,como se cada acorde fosse de um tom, e a sua função naquela passagem musical, bem como os seus usos na música.

Este trabalho irá seguir o caminho de ensinar música para matemáticos. O único pré-requisito que os matemáticos deverão ter para a compreensão do texto será conhecer as notas musicais ! Nesse sentido, vamos adotar a seguinte organização: na primeira parte, definem-se os acordes como vetores, uma construção muito comum, mas com um defeito básico, a soma de mesmos sons dando um som com o dobro de freqüência. Nas segunda e terceira partes apresenta-se uma construção baseada na álgebra de Boole, onde, na realidade, dois sons iguais "produzem" o mesmo som .

Finalmente, e antes de iniciar o estudo, agradeço a todos os meus colegas professores e aos meus alunos de graduação em Engenharia e do Mestrado do CEFET-Rio de Janeiro, por me possibilitarem a experimentação das idéias e pelo apoio aos devaneios . Aos meus professores de música, principalmente: Analú Paredes, Artur Nogueira e Heitor Castro pela minha formação musical e subsídios sempre úteis. Aos meus grandes amigos da TFH-Berlin: Prof. Rudolf Baierl e Prof. Kikuchi-Schimdt, pelos incentivos e trocas. Aos amigos das minhas bandas Solis e Montauk Project, pela cumplicidade, e ao meu grande amigo, orientador(para sempre) e grande músico, que me mostrou a viabilidade do caminho, Prof. Antônio Carlos Alvim.

2)Álgebra Linear e Música

Trabalha-se, neste item, o conceito de acorde como um vetor. Um acorde é um conjunto de notas tocado simultaneamente. Ex.: o acorde de Dó maior é formado pela soma das notas Dó, Mi, Sol[.

Seja M_o :={Dó, Dó$^\#$...Si}.

Um acorde é um elemento $X \in M_o^{12}$ (0 é ausência de som). Definamos:

$+: M_o^{12} \times M_o^{12} \to M_o^{12}$

$(X,Y) \mapsto X+Y$ (1.1)

$. : \mathbb{R} \times M_o^{12} \to M_o^{12}$

$(a, X) \mapsto aX$ (1.2)

A soma representa sons tocados ao mesmo tempo, e a multiplicação por escalar representa a multiplicação da freqüência do som.

As regras das operações iremos copiar do IR^{12}. Para isso, definamos:

G: $M_o^{12} \rightarrow IR^{12}$, tal que:

G(Dó)=(1,0,0...0)...G(Si)=(0,.......,1) (1.3)

G(X+Y)=G(X)+G(Y) (1.4)

G(a X)=a G(X) (1.5)

G(0)=(0,.......,0) (1.6)

Com as definições das operações do espaço vetorial do IR^{12} trazida para o M_o^{12}, temos um espaço vetorial sobre os reais.

Com o fato de trabalharmos com espaço vetorial isomorfo ao IR^{12} , do ponto de vista musical temos, por exemplo: -Dó, representa uma nota Dó tocada na direção contrária à fonte sonora, tal que cancela a nota Dó. Essa idéia é bem física, e acontece em situação de estúdios de gravação. Trata-se do popular cancelamento de fase.

Com as 12 notas musicais, geramos todos os acordes. Uma escala musical é um subconjunto formado por um número de notas. Para exemplificarmos, iremos trabalhar com a escala maior de Dó, que são as notas: Dó, Ré, Mi, Fá , Sol, Lá, Si. Os acordes da escala são gerados unicamente pelas notas da escala. Ao mudarmos de tom, por exemplo, a escala de Sol maior: Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Fá#, basta pensarmos na transformação linear T(Dó)=Sol... T(Si)= Fá#. Se tivermos uma seqüência de acordes em Dó maior: Dm(Ré menor) =(Ré+ Fá,+Lá), G(Sol maior) =(Sol + Ré + Si) e C(Dó maior)=(Dó + Mi + Sol), para passarmos para o tom de Sol é só fazermos a conta em relação às bases, isto é:

T(Dm)=T(Ré + Fá + Lá)=T(Ré)+ T(Fá) +T(Lá)= Lá+ Dó +Mi=Am(Lá menor),

T(G)= D(Ré maior) e T(C)=G(Sol maior).

Essa operação é feita pelos músicos em diversas situações, o que mostra o pensamento matemático dos músicos. Do ponto de vista de uma teoria matemática para a formação de acordes, o uso da estrutura de espaço vetorial tem algumas falhas graves:

1) Dó + Dó=2Dó, isto é, ao tocar duas notas iguais teríamos como resultado uma nota de freqüência , o que não ocorre do ponto de vista musical ;

2) A distância entre notas musicais. As normas usuais do IR^{12} não são musicais ;

3) A falta de ordenação no IR^{12} .

Iremos propor, ao longo deste estudo, uma nova proposta de teoria matemática consertando esses detalhes .

2) Harmonia em em 2 oitavas.

Definamos o conjunto de Mozart(Mo) como:

Mo={0,$Dó_1$,...Si_2,$Dó_3$}, onde X_i representa a nota X tocada na i-ésima oitava. 0 representa a ausência de som.

Em Mo, definamos uma ordem , baseada na freqüência. isto é: sejam X, Y pertencentes a Mo, X<Y se, e somente se, a freqüência de X é menor que a freqüência de Y. É fácil provar que, de fato, a relação proposta é uma relação de ordem, pois as freqüências são únicas.

Seja o seguinte subconjunto de Q, No={0;1;1,5;2;2,5...13}

Definamos a bijeção(Yes), :

Yes:Mo $\rightarrow$ No

Yes(0)=0, Yes($Dó_1$)=1...Yes($Dó_3$)=16 (2.1)

Um Conjunto de Mozart com uma função Yes, chamamos de um Campo de Bach.

Definamos no campo de Bach , algumas "distâncias":

D_+: Mo X Mo $\rightarrow Q_+$

(x,y) $\mapsto$ Yes(y) -Yes(x), se x<y (2.2)

D_- : Mo X Mo $\rightarrow Q_+$

(x,y) $\mapsto$ Yes(x) -Yes(y), se y<x (2.3)

D: Mo X Mo $\rightarrow Q_+$

(x,y) $\mapsto$ | Yes(y) -Yes(x) | (2.4)

Um Campo de Bach com as funções D_+ ,D_-, D acima chama-se um Espaço de Tom Jobim(Obs: Um espaço de Tom Jobim é um espaço métrico com a métrica D) .
Definamos o operador:

$\# : Mo-\{ Dó_3 \} \rightarrow Mo$
$y \mapsto y\#$ Tal que ,
$D_+(y, y\#)=0{,}5$ (observe que $y< y\#$), se y=0, temos que $0\#=0$. (2.5)
Analogamente, definimos o operador b:
$b: Mo-\{Dó_1\} \rightarrow Mo$
$y \mapsto by$
$D_+(by, y)=0{,}5$ (observe que $by< y$), se y=0, temos que $b0 =0$ (2.6)
Teorema 1:
$D_+(x,y)= D_+(x\#,y\#)$.
Demonstração:
$D_+(x\#,y\#)= Yes(y\#)-Yes(x\#)$. Mas, $D_+(y,y\#)=Yes(y\#)-Yes(y)=0{,}5$ e $D_+(x,x\#)=Yes(x\#)-Yes(x)=0{,}5$.
Então:
$D_+(x\#,y\#)= Yes(y\#)-Yes(x\#)=Yes(y)+0{,}5-Yes(x)-0{,}5=Yes(y)-Yes(x)= D_+(x,y)$.
Podemos agora, definir do ponto de vista matemático, as escalas musicais. A definição será via a função D_+.
Dada uma nota x pertencente ao conjunto(GG) $GG=\{Do_1,...Si_1\}$ a escala maior no tom x é um conjunto(x) formado por 7 notas(pertencentes a Mo), $x:=\{x_1,...x_7\}$, tal que:
x1=x,
$D_+(x_1,x_2)=1$, $D_+(x_2,x_3)=1$, $D_+(x_3,x_4)=0{,}5$, $D_+(x_4,x_5)=1$, $D_+(x_5,x_6)=1$, $D_+(x_6,x_7)=1$.
Dizemos que uma nota x está a oitava acima de outra nota y, se
$D_+(y, x)=6$.
Teorema 2: Seja Y uma nota de Mo e seja x_7 a sétima nota de uma escala x. Y é tal que, $D_+(x_7,Y)=0{,}5$. Então Y está uma oitava acima de x.
Demonstração:
é fácil mostrar, usando a função Yes, que $D_+(x_1,x_7)=5{,}5$(é uma soma telescópica, usando a definição da função D_+) Como $D_+(x_7,Y)=0{,}5$, temos:
$D_+(x_1,Y)=Yes(Y)-Yes(x_1)=Yes(x_7) + 0{,}5 - Yes(x_1)=6$

Agora podemos definir a mudança de tom maior, bastando saber a distância do tom. Em música, a primeira escala maior que aprendemos é a famosa $Dó=\{Dó_1, Ré_1, Mi_1, Fá_1 , Sol_1, Lá_1, Si_1 \}$. Foi em cima dessa estrutura que criamos a definição da função Yes e a função D_+ . Então, para realizarmos uma escala maior em um outro tom X, basta sabermos $D_+(Dó_1, X)=T$. Mais geral:
Teorema 3: Sejam duas escalas maiores X, Y tal que X<Y, $D_+(X,Y)=T$. Então: $D_+(x_i,y_i)=T$, Para todo $i=\{2,...7\}$
Demonstração:
Como, por definição: $D_+(x_1,y_1)=T$, temos: $Yes(y_1)-Yes(x_1)=T$.
$D_+(x_1,x_i)=m$ e $D_+(y_1,y_i)=m$, então: $Yes(x_i)-Yes(x_1)=m$ e $Yes(y_i)-Yes(y_1)=m$, então: $Yes(x_i)-Yes(y_i)=m+ Yes(x_1)- m -Yes(y_1)=T$.
Esse teorema é muito útil para os músicos, principalmente em instrumentos como as guitarras, onde a simetria é preservada ,ao aprender a escala numa configuração, é só passar a mesma estrutura no tom acima.
Da mesma forma, podemos aprender outras escalas: Ex: Menor melódica , $x:=\{x_1,...x_7\}$, tal que:
x1=x,
$D_+(x_1,x_2)=1$, $D_+(x_2,x_3)=0{,}5$, $D_+(x_3,x_4)=1$, $D_+(x_4,x_5)=1$, $D_+(x_5,x_6)=1$, $D_+(x_6,x_7)=1$.
Uma outra importância de usarmos essa estrutura é o fato de definirmos os modos. Exemplo: Ao tocarmos a escala de Dó, começando e terminando em Ré(oitava acima), temos uma outra sonoridade. Do ponto de vista matemático, é como se uma rotação de um triângulo virasse um quadrado. X dórico=$\{x_1,...x_7\}$, tal que:
x1=x,
$D_+(x_1,x_2)=1$, $D_+(x_2,x_3)=0{,}5$, $D_+(x_3,x_4)=1$, $D_+(x_4,x_5)=1$, $D_+(x_5,x_6)=1$, $D_+(x_6,x_7)=0{,}5$.

Uma escala interessante, onde temos a simetria, é a escala diminuta dimdom:
$x:=\{x_1,...x_7\}$, tal que:
x1=x,
$D_+(x_1,x_2)=1$, $D_+(x_2,x_3)=0,5$, $D_+(x_3,x_4)=1$, $D_+(x_4,x_5)=0,5$, $D_+(x_5,x_6)=1$, $D_+(x_6,x_7)=0,5$. é interessante e fácil mostrar que as escalas $x_1 = x_3 = x_5 = x_7$. Isto é, existem 3 escalas diminutas. Deixamos como exercício para o leitor.

2.2) Formação de Acordes.
Vamos definir o conjunto Miles = Mo^{25}, de tal forma que o conjunto Mo tenha as funções Yes e D. Isto é, seja um espaço de Tom Jobim. Um elemento do conjunto Miles, chamamos de acorde. Por enquanto, iremos representá-lo por uma 25-upla booleana. Isto é, Se a i-ésima posição do acorde=1, significa que a i-ésima nota está sendo tocada e se for = 0 , não. Exemplo: (1,0,...0) Representa que apenas a nota $Dó_1$ está sendo tocada. Formalmente definamos uma bijeção:
ELP: Miles $\rightarrow \{0,1\}^{25}$
. Ac $I\rightarrow$ELP(Ac) (2.1.1)
ELP(0)=0

ELP($Dó_1$)=(1,...0)...ELP($Dó_3$)=(0,...1) (2.1.2)

Sobre o conjunto Miles definamos uma operação(copiada da operação booleana).
+ : Miles x Miles $\rightarrow$Miles
(X,Y) $I\rightarrow$ X+Y.
Onde, ELP(X+Y)=ELP(X)+ELP(Y) (2.1.3)
Isto é, corrigimos o grave defeito do espaço vetorial, na abordagem musical Para facilitar, a nossa notação usaremos os colchetes de Brower, para representar o acorde. Dado um acorde, o colchete de Brower mostra-nos apenas as notas dos acordes que são tocadas.

[0]=(0,...0) (2.1.4)
[$Dó_1$]=(1,0, 0) (2.1.5)
[$Dó_1$, Mi_1]=(1,0,0,0,1,0...0) (2.1.6)
[$Dó_1$,....$Dó_3$]=(1,1,....,1) (2.1.7)
Exemplo da operação soma, com o colchete de Brower:
[$Dó_1$]+ [$Dó_1$]= [$Dó_1$], pois ELP([$Dó_1$]+ ELP([$Dó_1$]=(1,...0)+(1,...0)=(1,...0)=ELP([$Dó_1$]) (2.1.8)
[$Dó_1$]+ [$Dó_2$]= [$Dó_1$,$Dó_2$] (2.1.9)
[$Dó_1$] + [$Dó_1$, Mi_1]= [$Dó_1$, Mi_1] (2.1.10)
[$Ré_1$] + [$Dó_1$, Mi_1]= [$Dó_1$, $Ré_1$, Mi_1] (2.1.11)
Um Conjunto de Miles com a operação soma, como definida acima Chama-se um Espaço de Villa-Lobos.
Num espaço de Villa-Lobos definimos a medida total(N_T) de uma acorde como:
Dado um colchete de Brower, Ac= [$a_1...a_r$],

$$N_T(Ac) = \sum_{i=1}^{i=r} Yes(a_i) \quad (2.1.12)$$

Dois espaços de Villa-Lobos são harmonomorfos, se existe um bijeção KC tal que:
KC: $Villa\text{-}Lobos_1 \rightarrow Villa\text{-}Lobos_2$
X $I\rightarrow$ KC(X)
KC(x+y)=KC(x)+KC(y) (2.2.8)
KC(0)=0
$N_T(X)=N_T(KC(X))$

Com isso , ao aprender harmonia em 2 oitavas , é só usar um harmonomorfismo. Por isso, ao aprender um acorde em 2 oitavas no teclado é só transferir a forma para outra oitava.

Uma tríade é um acorde onde três notas são tocadas
Ac=[X,Y,Z]
Ac é uma tríade maior se $D_+(X,Y)=2$, $D_+(X,Z)=3,5$
Ac é uma tríade menor se $D_+(X,Y)=1,5$, $D_+(X,Z)=3,5$(usamos AC m)
Notação: Se X=Dó, então Ac=C...Se X= Si, então Ac=B .
II-V-I
Essa seqüência harmônica é a mais comum, iremos a definir do ponto de vista matemático
Sejam 3 tríades Ac1= [a1,a2,a3], Ac2=[b1,b2,b3], Ac3=[c1,c2,c3] é uma seqüência ii-v-i, se Ac1 é uma tríade menor, Ac2, Ac3 tríades maiores e $D_+(c1,a1)=1$, $D_+(c1,b1)=3,5$.(a1 em GG)
Teorema 4: c3=b1
Demonstração:
Como $D_+(c1,b1)=3,5$. 3 $D_+(c1,c3)=3,5$, então pelo fato da função yes ser bijetora temos c3=b1.
Exemplo: Dm=[$Ré_1$, $Fá_1$, $Lá_1$], G=[Sol_1, Si_1, $Ré_2$], Dó=[$Dó_1$, Mi_1, Sol_1]
Uma tétrade é um acorde de 4 notas tocadas simultaneamente, ela é representada por um colchete de Brower com 4 posições.
Antes de tratarmos a seqüência ii-v-1 em tétrade , precisamos de alguns resultados.
Teorema 5:Sejam x,y ($x,y \in GG$, x<y), e xo a nota oitava acima de x ,tal que $D_+(x,y)=T$. Então $D_+(y,xo)=6-T$. Demonstração: trivial, basta usar a função Yes.
Teorema 6:Sejam x,y ($x,y \in GG$, x<y), e xo a nota oitava acima de x ,tal que $D_+(y,xo)=T$. Então $D_+(x,y)=6-T$. Demonstração: trivial, basta usar a função Yes.

Dada uma nota $x \in GG$, a nota y está uma sétima maior de distância de x , se xo a nota oitava acima de x e´ tal que: $D_+(y,xo)=0,5$
Dada uma nota $x \in GG$, a nota y está uma sétima de distância de x , se xo a nota oitava acima de x e´ tal que: $D_+(y,xo)=1$.
Uma tétrade é um acorde maior com sétima maior(X7M=[x1,x2,x3,x4]) se
[x1,x2,x3] é uma tríade maior e x4 é uma sétima maior de x1
Uma tétrade é um acorde maior com sétima (X7=[x1,x2,x3,x4]) se
[x1,x2,x3] é uma tríade maior e x4 é uma sétima de x1
Uma tétrade é um acorde menor com sétima (Xm7=[x1,x2,x3,x4]) se
[x1,x2,x3] é uma tríade menor e x4 é uma sétima de x1

Sejam 3 acordes Ac1= [a1,a2,a3,a4], Ac2=[b1,b2,b3,b4], Ac3=[c1,c2,c3,c4] é uma seqüência ii-v-i, se Ac1 é um acorde menor com sétima, Ac2 é uma acorde maior com sétima, Ac3 é um acorde com sétima ou sétima maior e: $D_+(c1,a1)=1$, $D_+(c1,b1)=3,5$.(a1 em GG)
Outras seqüência musicais como:ii-v-i menor , V-IV-I.
Para certas análises mais rápidas o uso das 2 oitavas torna o trabalho mais lento, vamos propor um estudo usando apenas uma oitava, isto é iremos repetir o que foi feito para o conjunto GG.

3) Harmonia em uma oitava
Seja Parker= $GG \cup \{0\}$.
Como a oitava é a mesma, retiraremos os índices:
Parker= {0,Dó, ...Si} . Duas notas x,y em Parker, x<y se a freqüência de y é maior que a freqüência de x.
Definamos Solis = $Parker^{12}$.
Definamos a bijeção:
Montauk:Solis$\rightarrow\{0,1\}^{12}$

Ac $\mapsto$Montauk(Ac)
Montauk(0)=0
Montauk(Dó)=(1,...0)...Montauk(Si)=(0,...1)
Definamos a operação soma em Solis, como:

+ SolisxSolis $\rightarrow$Solis

(X,Y) I$\rightarrow$ X+Y

Tal que Montauk(X+Y)=Montauk(X)+Montauk(Y).

Representaremos o Acorde em Solis, pelo colchete de Howe, análogo ao colchete de Brower :

Montauk([[Dó,... Si]])=(1,1... 1)

[[Dó]]+[[Dó]]=[[Dó]]

[[X]]+[[X]]=[[X]]

[[Dó ,Mi, Si]]+[[Dó, Ré]]=[[Dó, Ré, Mi, Si]]

Vamos definir:

Hermeto: Mo $\rightarrow$GG

X_i I$\rightarrow$ X

Exemplo: Hermeto(Dó$_1$)=Hermeto(Dó$_2$)= Hermeto(Dó$_3$)=Dó

Definamos:

Gismonti:Miles $\rightarrow$ Solis

Ac I$\rightarrow$ Gismonti(Ac)

Gismonti([Dó$_1$,... Dó$_3$])=[[Hermeto(Dó$_i$),...Hermeto(Si$_i$)]]=[[Dó,..Si]]

Gismonti(Ac1+Ac2)=Gismonti(Ac1)+Gismonti(Ac2)

Ex:

Gismonti[Dó$_1$, Dó$_2$]=[[Dó]]

Gismonti([Dó$_1$,Mi$_1$] +[Dó$_{1,}$Mi$_2$, Fá$_2$, Dó$_3$])=[[Dó, Mi, Fá]]

Vamos mostrar a utilização do Solis.

Um acorde diminuto no Espaço de Villa-Lobos é uma tríade formada da seguinte forma [A1,A2, A3, A4], tal que:

D_+(A1, A2)=1,5 ; D_+(A2, A3)=1,5 ; D_+(A3, A4)=1,5.

Com isso é fácil provar que os acordes diminutos A1=A2=A3=A4

Ex: Dódim= Ré#dim=Fá#dim=Ládim, usando a função Gismonti, temos: Egberto(Dódim)= Egberto(Ré#dim)= Egberto(Fá#dim)= Egberto(Ládim)=[[Dó, Ré#, Fá#, Lá]]

Do ponto de vista musical, há um movimento muito interessante sonoro a troca de acordes , entre esses diminutos.

Podemos achar os outros acordes diminutos:

Dó#dim= Midim=Soldim=Lá#dim= [[Dó#,Mi, Sol, Lá#]]

Rédim=Fádim=Sol#dim=Sidim=[[Ré,Fá,Sol#,Si]]

Do ponto de vista matemático, o acorde diminuto é uma simetria, inclusive nessa bienal iremos aprender muito sobre esse assunto, onde veremos um trabalho(Tobias, B. 'Aplicações da Teoria de Grupos na Música")) sobre música e simetria.

4) Conclusão

Este trabalho construiu uma axiomática da música temperada(onde dó sustenido é igual a ré bemol), e não procurou explicar porque uma seqüência II-V-I é agradável aos ouvidos, pois é um assunto multidicisplinar(cultural, Física, estudo da audição). Também este trabalho permite interessantes continuações: um curso de teoria do violão para matemáticos, pesquisa da melhoria do aprendizado da álgebra usando música. Sem dúvida, lembramos aos matemáticos que o fato de dominarmos a teoria musical, não nos torna músicos...mas, como disse o grande Hermeto Pascoal, “tudo é som”!!!

Referências Bilbiográficas:

,

.Abdnour, J. O.; 2002- "Matemática e Música- O Pensamento Analógico na Construção de Significados"- Coleção Ensaios Transversais- Escrituras- 2ª Edição

Birkhoff, G. ; Mac Lane,1941-" A Survey on Moderna Algebra" - The MacMillan Company