
Tópicos em Teoria de Controle ¹

A. Leitão

Departamento de Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

G.N. Silva

Departamento de Computação e Estatística

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

¹Manuscrito atualizado em: 04 Outubro 2004

Conteúdo

1	Sistemas Lineares	1
1.1	Introdução	1
1.2	Sistemas Não-Autônomos	6
1.3	Sistemas Autônomos	11
2	Controlabilidade	17
2.1	Controlabilidade Para Sistemas Lineares	17
2.2	A Matriz de Controlabilidade	23
2.3	Conjunto dos Estados Atingíveis	29
2.4	Controles Redundantes	34
2.5	Considerações Finais	35
3	Estabilidade	37
3.1	Conceito e Exemplos	37
3.2	Estabilidade de Sistemas Lineares	41
3.3	Crítério de Routh–Hurwitz	42
3.4	Perturbação de Sistemas Lineares	44
3.5	Método de Lyapunov	49
3.6	Equação Matricial de Lyapunov	53
3.7	Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos	55
	Exercícios	56
4	Estabilização	59
4.1	Sistemas Lineares	59
4.2	Colocação de Pólos	62
4.3	Observador Dinâmico	65
4.4	Estabilização por Realimentação de Saída	68
4.5	Pontos de Operação	69
	Exercícios	71
5	Princípio do Máximo	73
5.1	Problemas com Horizonte Finito	73
5.2	Problemas com Horizonte Infinito	77
5.3	Aplicações do Princípio do Máximo	80
	Exercícios	90
	Bibliografia	93

Capítulo 1

Sistemas Lineares

Neste capítulo vamos apresentar a teoria básica de sistemas equações diferenciais ordinárias lineares que será útil para o estudo de sistemas de controle lineares.

O material relacionado a sistemas lineares contido neste capítulo pode ser encontrado citosotomayor. O teorema da contração é assunto básico dos cursos de matemática. O material que aqui aparece foi retirado de [Hon].

1.1 Introdução

Sistemas Lineares são aqueles que têm a forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde os a_{ij}, b_i são funções contínuas em um intervalo I , aberto com $i, j=1, 2, \dots, n$. Equivalentemente podemos escrever

$$x'_i = \sum_{j=1}^n [a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Se um conjunto de soluções $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ de classe C^1 em $I_0 \subset I$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n [a_{ij}(t)\varphi_j(t) + b_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

então tal conjunto é solução do sistema (1.1) em I_0 para todo $t \in I_0$.

Considerando agora $A(t)$ a matriz cujos elementos são as funções a_{ij} e $b(t)$ o vetor cujos elementos são as funções $b_i(t)$, temos a equação matricial:

$$x' = A(t)x + b(t). \quad (1.2)$$

Assim, se um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ é solução de (1.1) em I_0 então a aplicação $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ é solução para (1.2) em I_0 , isto é,

$$\varphi' = A(t)\varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in I_0.$$

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar algumas noções de espaços métricos necessários ao desenvolvimento deste capítulo.

Definição 1.1.1 Um espaço métrico é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma função,

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y), \end{aligned}$$

chamada distância de x a y , que satisfaz:

- (a) $d(x, x) = 0$
- (b) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$
- (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ - (desigualdade triangular)

Definição 1.1.2 Seja X um espaço métrico com a métrica d . Dizemos que uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é uma contração se existe $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$ tal que $\forall x_1, x_2 \in X$ temos que $d(T(x_1), T(x_2)) \leq cd(x_1, x_2)$, onde c é a chamada constante de contração de T .

Notação: Seja $T : X \rightarrow X$, denotaremos $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T^2$, ou seja $T^n = T \circ T^{n-1}$.

Lema 1.1.3 *Sejam $0 \leq c < 1$ e $m > n \geq 1$. Então $1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n-1} \leq (1 - c)^{-1}$.*

Demonstração: Exercício. ■

Definição 1.1.4 Dada uma sequência (x_n) em (X, d) e um ponto $x \in X$, dizemos que (x_n) converge a x se a sequência de números reais $d(x_n, x)$ converge a zero.

Definição 1.1.5 Uma sequência (x_n) de X é chamada de sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ para todo } n, m > n_0.$$

Dizemos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy neste espaço for convergente.

Teorema 1.1.6 (Teorema do ponto fixo de Banach para contrações)

Sejam X um espaço métrico e $T : X \rightarrow X$ uma contração. Então:

- (i) $\exists! \bar{x} : T(\bar{x}) = \bar{x}$;
- (ii) $\forall x_1$, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = T^n(x_1)$, converge a \bar{x} ;
- (iii) $\forall n$ temos $d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c} d(x_1, \bar{x})$.

Demonstração: (i) Mostremos primeiramente a *existência*. Seja $x_1 \in X$ qualquer e $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$

Vamos demonstrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Para $n > 1$, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq cd(x_{n-1}, x_n)$$

e, por indução sobre n , vem que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2).$$

Então, para $1 \leq n \leq m$, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq c^{n-1}d(x_1, x_2) + \dots + c^{m-2}d(x_1, x_2) \\ &= c^{n-1}d(x_1, x_2) (1 + c + \dots + c^{m-n-1}) \\ &\leq \frac{c^{n-1}}{1-c}d(x_1, x_2) \text{ (Lema (1.1.3)).} \end{aligned}$$

e, como $c^n \rightarrow 0$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como X é um espaço métrico completo, temos que existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Mostremos agora que $T\bar{x} = \bar{x}$. Assim sendo

$$d(T\bar{x}, x_{n+1}) = d(T\bar{x}, Tx_n) \leq cd(\bar{x}, x_n)$$

e, como $d(\bar{x}, x_n) \rightarrow 0$, segue que $x_n \rightarrow T\bar{x}$. Pelo teorema de unicidade do limite, temos então que $T\bar{x} = \bar{x}$.

Mostremos agora a *unicidade*. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in X$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, com $T\bar{x} = \bar{x}$, $T\bar{y} = \bar{y}$. Então

$$0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq cd(\bar{x}, \bar{y})$$

e, portanto, $c \geq 1$, o que contradiz a hipótese.

(ii) Observe que a sequência definida em *i*) também pode ser escrita da seguinte forma

$$x_{n+1} = T_{x_1}^n$$

Sabemos que esta sequência converge a um ponto fixo, mas pela unicidade do ponto fixo temos que ela converge a \bar{x} .

(iii) Da demonstração de *i*) resulta que para $1 \leq n \leq m$,

$$d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, \bar{x}) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c}d(x_1, x_2) + d(x_m, \bar{x})$$

Como $d(x_m, \bar{x}) \rightarrow 0$, segue a afirmação (iii). ■

Corolário 1.1.7 *Seja $T : X \rightarrow X$ tal que, para algum m , T^m é uma contração. Então T tem um e somente um ponto fixo e, para qualquer que seja $x_1 \in X$, a sequência $(T^n x_1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao ponto fixo.*

Demonstração: Como T^m é uma contração, seja \bar{x} seu único ponto fixo, ou seja $T^m\bar{x} = \bar{x}$. Então:

$$T^m(T\bar{x}) = T(T^m\bar{x}) = T\bar{x}$$

Logo $T\bar{x}$ é ponto fixo de T^m . Mas como \bar{x} é o único ponto fixo de T^m , temos que $\bar{x} = T\bar{x}$ (existência), ou seja \bar{x} é ponto fixo de T .

Para provar que \bar{x} é único, tomemos \tilde{x} como um outro ponto fixo de T . Assim,

$$T^m(\tilde{x}) = T^{m-1}(T\tilde{x}) = T^{m-1}(\tilde{x}) = T^{m-2}(T\tilde{x}) = \dots = T\tilde{x} = \tilde{x}$$

Logo \tilde{x} é ponto fixo de T^m , e portanto $\bar{x} = \tilde{x}$.

Provemos então a segunda parte do corolário.

Seja $x_1 \in X$. Tome $y_k = (T^m)^k y_1$, onde $y_1 = T^r x_1$, com $r \in \mathbb{N}$ fixo e $k \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach para contrações, $y_k \rightarrow \bar{x}$. Então, para $n > m$, temos que $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq r < m$, tal que $n = km + r$. Assim,

$$T^n x_1 = T^{mk+r} x_1 = T^{mk}(T^r x_1) = (T^m)^k y_1 = y_k$$

Como $y_k \rightarrow \bar{x}$, temos que $T^n x_1 \rightarrow \bar{x}$. ■

Consideraremos $C(I_0, \mathbb{E}) := \{x : I_0 \rightarrow \mathbb{E}\}$ o espaço das funções contínuas com a métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in I_0} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|_\infty.$$

Observação: Denotaremos por \mathbb{E} os espaços \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n .

Teorema 1.1.8 *Se as funções a_{ij} e b_i , $i, j=1, 2, \dots, n$, são contínuas em I , então existe uma única solução $\varphi(t)$ (definida em I) da equação*

$$x' = A(t)x + b(t),$$

que satisfaz a condição inicial

$$\varphi(t_0) = x_0, \forall t_0 \in I,$$

onde $x_0 \in \mathbb{E}$ é um valor arbitrário.

Demonstração: Seja $T : C \rightarrow C$ definida por $T\varphi(t) := x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)]ds$. Assim T está bem definida. Provemos que T possui um único ponto fixo em C , o que implica no resultado desejado. Dados $u, v \in C$, temos

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [A(s)(u(s) - v(s))]ds \right| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|u - v\|_\infty ds \\ &\leq K \|u - v\|_\infty |t - t_0|, \end{aligned}$$

onde $K := \sup_{s \in I_0} \|A(s)\|$. Também temos:

$$\begin{aligned} |T^2u(t) - T^2v(t)| &= |T(Tu)(t) - T(Tv)(t)| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)(Tu(s) - Tv(s))\| ds \\ &\leq K \int_{t_0}^t |Tu(s) - Tv(s)| ds \\ &\leq K^2 \|u - v\|_\infty \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = K^2 \|u - v\|_\infty \frac{(t - t_0)^2}{2!} \end{aligned}$$

Por indução, provamos que

$$|T^n u(t) - T^n v(t)| \leq \frac{K^n}{n!} \|u - v\|_\infty |t - t_0|^n$$

Suponhamos que a desigualdade acima seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} |T^{n+1}u(t) - T^{n+1}v(t)| &= |T(T^n u)(t) - T(T^n v)(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)(T^n u(s) - T^n v(s)) ds \right| \\ &\leq K \int_{t_0}^t \frac{K^n}{n!} \|u - v\|_\infty |s - t_0|^n ds \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_\infty |t - t_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

Seja $I_0 = [a, b]$ com $a < b$, segue que

$$|T^n u(t) - T^n v(t)| \leq \frac{K^n (b-a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para algum $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, podemos afirmar que T^m é uma contração. Do Corolário (1.1.7) segue que T possui um único ponto fixo $\varphi \in C$, tal que

$$T\varphi = \varphi,$$

isto é,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds \quad (1.3)$$

o que demonstra o teorema da existência e unicidade em questão. ■

Consideremos a equação diferencial

$$x^{(n)} = p_1(t)x^{(n-1)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x + g(t), \quad (1.4)$$

onde as funções p_1, p_2, \dots, p_n e g são contínuas num intervalo I . Podemos transformar a equação (1.4) num sistema de n equações de primeira ordem, assim:

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z'_1 = x' = z_2 \\ z'_2 = x'' = z_3 \\ z'_3 = x''' = z_4 \\ \vdots \\ z'_{n-1} = x^{(n-1)} = z_n \\ z'_n = x^{(n)} = p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + g(t) = p_1(t)z_n + \dots + p_n(t)z_1 + g(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Com tal mudança facilitaremos os cálculos a serem feitos, já que precisaremos apenas de achar a solução de equações diferenciais de primeira ordem.

O sistema (1.5) é equivalente na forma matricial à

$$z' = A(t)z + b(t),$$

onde

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_n(t) & p_{n-1}(t) & p_{n-2}(t) & \cdots & p_1(t) \end{bmatrix} \quad e \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

Assim, como pelo Teorema 1.1.8 a equação diferencial acima tem única solução, conseqüentemente, a equação (1.4) também tem solução única.

Exemplo 1.1.9 Transforme a equação

$$ax'' + bx + c = 0$$

onde a, b e c são constantes, num sistema de equações lineares.

Solução: O sistema dado é equivalente à $x'' + \frac{b}{a}x' + \frac{c}{a} = 0$. Façamos $x_1 = x$; então $x'_1 = x'$.

Façamos agora, $x_2 = x'$; então $x'_2 = x'' = -\frac{b}{a}x' - \frac{c}{a} = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a}$.

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a} \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c}{a} \end{bmatrix}.$$

Se a matriz $A(t)$ do sistema de equações

$$x' = A(t)x + b(t),$$

é constante, isto é, os elementos a_{ij} são constantes, dizemos que o sistema associado é um **sistema autônomo**. Caso contrário, chamamos o sistema de **sistema não-autônomo**. Trataremos agora do caso mais geral, onde o sistema é não-autônomo.

1.2 Sistemas Não-Autônomos

Estudaremos equações da forma

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{1.6}$$

onde todos os elementos da matriz $A(t)$ e do vetor $b(t)$ são funções contínuas num intervalo I . Como já visto, a equação (1.6) possui única solução.

Corolário 1.2.1 *Sejam φ, ψ soluções da equação homogênea*

$$x' = A(t)x. \tag{1.7}$$

(a) *Se a e b são constantes arbitrárias, então $\gamma = a\varphi + b\psi$ é solução da equação (1.7);*

(b) Se $\varphi(s) = 0$ para algum $s \in I$ então $\varphi(t) = 0, \forall t \in I$.

Demonstração: (a) Se φ e ψ são soluções da equação (1.7), então satisfazem

$$\varphi' = A(t)\varphi \quad e \quad \psi' = A(t)\psi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= a\varphi'(t) + b\psi'(t) \\ &= aA(t)\varphi(t) + bA(t)\psi(t) \\ &= A(t)[a\varphi(t) + b\psi(t)] \\ &= A(t)\gamma(t).\end{aligned}$$

(b) A função nula é solução da equação (1.7) e satisfaz a condição inicial $\varphi(s) = 0$. Pelo Teorema 1.1.8 esta solução é única. Então

$$\varphi(t) = 0, \forall t \in I.$$

■

Teorema 1.2.2 *O conjunto \mathcal{A} de todas as soluções da equação (1.7) é um subespaço do espaço vetorial das funções contínuas $\psi : I \rightarrow \mathbb{E}$, de dimensão n , e para cada $s \in I$, a aplicação que a cada $x_0 \in \mathbb{E}$ associa a solução $\varphi(t)$ satisfazendo $\varphi(s) = x_0$ é um isomorfismo de \mathbb{E} sobre \mathcal{A} .*

Demonstração: A primeira parte é consequência imediata do Corolário 1.2.1. Provemos a segunda parte. Representemos por ε_s a aplicação de \mathcal{A} em \mathbb{E} , dada por

$$\varepsilon_s(\varphi) = \varphi(s), \quad s \in I.$$

Observemos que ε_s é linear:

$$\begin{aligned}\varepsilon_s(a\varphi_1 + \varphi_2) &= (a\varphi_1 + \varphi_2)(s) \\ &= a\varphi_1(s) + \varphi_2(s) \\ &= a\varepsilon_s(\varphi_1) + \varepsilon_s(\varphi_2),\end{aligned}$$

onde φ_1 e φ_2 são soluções da equação (1.7). Pelo Teorema 1.1.8, temos que para $\forall x_0 \in \mathbb{E}, \exists \varphi_i \in \mathcal{A}$ tal que $\varepsilon_s(\varphi) = \varphi(s) = x_0$, ou seja, ε_s é sobrejetora. Agora

$$\ker \varepsilon_s = \{\varphi \in \mathcal{A} : \varepsilon_s(\varphi) = 0\}.$$

Mas pela parte (b) do Corolário 1.2.1, a única solução que satisfaz $\varphi(s) = 0$ é a solução nula. Logo $\ker \varepsilon_s = \{0\}$, ou seja, ε_s é injetora. Portanto ε_s é bijetora, e existe ε_s^{-1} (também bijetora),

$$\varepsilon_s^{-1}(x_0) = \varphi(t), \quad \text{com } \varphi(s) = x_0.$$

Assim obtemos uma aplicação de \mathbb{E} em \mathcal{A} , bijetora. Logo esta é isomorfismo de \mathbb{E} sobre \mathcal{A} e portanto $\dim \mathcal{A} = \dim \mathbb{E}$. ■

Notemos que como \mathcal{A} é um subespaço vetorial, também é um espaço vetorial. Particularmente se v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base de \mathbb{E} , então $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ com $\varphi_1(s) = v_1, \varphi_2(s) = v_2, \dots, \varphi_n(s) = v_n$ formam uma base de \mathcal{A} .

Consideremos agora as equações matriciais lineares

$$X' = A(t)X, \quad (1.8)$$

onde X é uma matriz quadrada de ordem n . $\phi(t)$ é solução da equação (1.8) se, e somente se, para todo $1 \leq j \leq n$, a j -ésima coluna $\phi_j(t)$ de $\phi(t)$ é solução da equação homogênea $x' = A(t)x$.

Definimos a **matriz fundamental** da equação (1.7) como sendo uma matriz quadrada $\phi(t)$ de ordem n cujas colunas formam uma base do espaço de soluções de (1.7).

Como as colunas de uma matriz fundamental formam uma base do espaço \mathcal{A} de soluções de (1.7), estas são linearmente independentes. Temos que a dimensão de \mathcal{A} é n ; logo temos n colunas linearmente independentes, e assim a matriz fundamental é não-singular¹.

Pelo Teorema 1.1.8, dado $t_0 \in I$, e M_0 uma matriz não-singular, existe uma única matriz fundamental ϕ tal que $\phi(t_0) = M_0$.

Seja C uma matriz constante, $n \times n$. Então se $\phi(t)$ é uma solução da equação (1.8), $\psi(t) = \phi(t)C$ é também solução de (1.8), pois

$$\psi'(t) = \phi'(t)C = A(t)\phi(t)C = A(t)\psi(t).$$

Proposição 1.2.3 *Sejam $\phi(t)$ e $\psi(t)$ soluções da equação*

$$X' = A(t)X,$$

sendo ϕ fundamental. Então existe uma única matriz C , $n \times n$, tal que

$$\psi(t) = \phi(t)C, \quad \forall t \in I.$$

C é não singular se e somente se $\psi(t)$ é fundamental.

Demonstração: Como ϕ é fundamental, é não singular para todo $t \in I$. Então temos

$$[\phi^{-1}(t)\psi(t)]' = [\phi^{-1}(t)]'\psi(t) + \phi^{-1}(t)\psi'(t). \quad (1.9)$$

Mas $\phi^{-1}(t) = \phi^{-1}(t)\phi(t)\phi^{-1}(t)$. Logo

$$\begin{aligned} [\phi^{-1}(t)]' &= [\phi^{-1}(t)\phi(t)\phi^{-1}(t)]' \\ &= [\phi^{-1}(t)]'\phi(t)\phi^{-1}(t) + \phi^{-1}(t)\phi'(t)\phi^{-1}(t) + \phi^{-1}(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t)]' \\ &= [\phi^{-1}(t)]' + \phi^{-1}(t)\phi'(t)\phi^{-1}(t) + [\phi^{-1}(t)]'. \end{aligned}$$

Assim obtemos $[\phi^{-1}(t)]' = 2[\phi^{-1}(t)]' + \phi^{-1}(t)\phi'(t)\phi^{-1}(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} [\phi^{-1}(t)]' &= -\phi^{-1}(t)\phi'(t)\phi^{-1}(t) \\ &= -\phi^{-1}(t)A(t)\phi(t)\phi^{-1}(t) \\ &= -\phi^{-1}(t)A(t), \end{aligned} \quad (1.10)$$

e substituindo em (1.9), obtemos

$$[\phi^{-1}(t)\psi(t)]' = -\phi^{-1}(t)A(t)\psi(t) + \phi^{-1}(t)A(t)\psi(t) = 0.$$

Portanto

$$\phi^{-1}(t)\psi(t) = C \implies \psi(t) = \phi(t)C.$$

Desta forma, temos que

$$\det \phi^{-1}(t) \det \psi(t) = \det[\phi^{-1}(t)\psi(t)] = \det C.$$

Assim, $\det C \neq 0$, isto é, C é não singular se e somente se $\det \psi(t) \neq 0$, ou seja, se e somente se $\psi(t)$ é fundamental. ■

¹ $\det[\phi(t)] \neq 0$, ou seja, é inversível.

Teorema 1.2.4 Se $\phi(t)$ é uma matriz fundamental da equação

$$x' = A(t)x,$$

então a solução $\varphi(t)$, com $\varphi(t_0) = x_0$, da equação

$$x' = A(t)x + b(t),$$

é dada por

$$\varphi(t) = \phi(t) \left[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right]. \quad (1.11)$$

Demonstração: Por causa do Teorema 1.1.8 basta verificar que $\varphi(t)$ dada em (1.11) satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$ (o que pode ser feito por inspeção) e a equação (1.6). Verifiquemos que $\varphi(t)$ satisfaz (1.6). De fato

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi'(t)[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds] + \phi(t)[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds]' = \\ &= A(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds] + \phi(t)\phi^{-1}(t)b(t) = A(t)\varphi + b(t). \end{aligned}$$

■

A título de ilustração vamos mostrar como deduzir a “cara” de φ usando o método de variação de parâmetros. Seja $C(t)$ tal que

$$\varphi(t) = \phi(t)C(t), \quad \varphi(t_0) = x_0. \quad (1.12)$$

Como $\phi(t)$ é fundamental, é não singular. Então

$$C(t_0) = \phi^{-1}(t_0)\varphi(t_0) = \phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Desde que $\varphi(t)$ é solução, satisfaz

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t). \quad (1.13)$$

Mas de (1.12), temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi'(t)C(t) + \phi(t)C'(t) \\ &= A(t)\phi(t)C(t) + \phi(t)C'(t) \\ &= A(t)\varphi(t) + \phi(t)C'(t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

De (1.13) e (1.14) segue que

$$A(t)\varphi(t) + b(t) = A(t)\varphi(t) + \phi(t)C'(t) \iff b(t) = \phi(t)C'(t) \iff C'(t) = \phi^{-1}(t)b(t).$$

Assim

$$C(t) = \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds + k,$$

onde k é um vetor constante arbitrário. Podemos determiná-lo utilizando a condição inicial $C(t_0) = \phi^{-1}(t_0)x_0$. Deste modo

$$C(t) = \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds,$$

e portanto

$$\varphi(t) = \phi(t)C(t) = \phi(t) \left[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

Observemos que para a caso homogêneo,

$$x' = A(t)x,$$

a solução é dada por

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Exemplo 1.2.5 Ache a solução da equação

$$x' = A(t)x,$$

com

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Uma matriz fundamental para esta equação é dada por (na próxima seção veremos como encontrá-la):

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \text{sen } kt & -\text{cos } kt \\ k \text{ cos } kt & k \text{ sen } kt \end{bmatrix}.$$

Efetuando os cálculos, temos que $\phi^{-1}(t)$ é dada por

$$\phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \text{sen } kt & \frac{1}{k} \text{ cos } kt \\ -\text{cos } kt & \frac{1}{k} \text{ sen } kt \end{bmatrix}.$$

Vimos que a solução é dada por

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Assim temos que

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_{01} \text{ cos } k(t-t_0) + x_{02}(1/k) \text{ sen } k(t-t_0) \\ -x_{01}k \text{ sen } k(t-t_0) + x_{02} \text{ cos } k(t-t_0) \end{bmatrix},$$

onde x_{01} e x_{02} são as componentes do vetor x_0 , isto é, $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$.

Um problema importante é o caso associado com o sistema adjunto ao sistema (1.7). Definimos o **sistema adjunto** como sendo o sistema

$$y' = -[A(t)]^t y.$$

Seja $\phi(t)$ uma matriz fundamental para a equação (1.7). Segue de (1.10) que $[\phi^{-1}(t)]^t$ é uma matriz fundamental do sistema adjunto. Se $A(t) = [-A(t)]^t$, o sistema é chamado **auto-adjunto**. Neste caso $[\phi^{-1}(t)]^t = \phi(t)$.

1.3 Sistemas Autônomos

Estudaremos equações da forma

$$x' = Ax + b(t), \quad (1.15)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ constante.

Consideremos primeiro o caso homogêneo

$$x' = Ax. \quad (1.16)$$

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental da equação (1.16), com $\phi(0) = I_d$.

Proposição 1.3.1 (a) $\phi'(t) = A\phi(t)$, $\phi(0) = I_d$;

(b) $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$;

(d) a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad (1.17)$$

converge para $\phi(t)$ em \mathbb{R} , uniformemente em cada intervalo compacto.

Demonstração: **(a)** Como $\phi(t)$ é a matriz fundamental,

$$\phi'(t) = A\phi(t), \quad \phi(0) = I_d.$$

(b) Fixemos s . Consideremos a equação matricial

$$X' = AX, \quad (1.18)$$

e as matrizes

$$\psi(t) = \phi(t+s), \quad \theta(t) = \phi(t)\phi(s).$$

Para a primeira matriz, temos

$$\psi'(t) = \phi'(t+s) = A\phi(t+s) = A\psi(t).$$

Logo $\psi(t)$ é a solução da equação (1.18), com $X(0) = \phi(s)$. Para a segunda matriz, temos

$$\theta'(t) = [\phi(t)\phi(s)]' = \phi(t)'\phi(s) = A\theta(t).$$

Logo $\theta(t)$ também é solução da equação (1.18), com $X(0) = \phi(s)$. Porém, pelo Teorema 1.1.8 a solução é única. Daí $\psi(t) = \theta(t)$, ou seja,

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s).$$

(c) Do item anterior, temos,

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Pondo $s = -t$, temos

$$\phi(t-t) = \phi(t)\phi(-t) \iff I_d = \phi(t)\phi(-t) \iff \phi^{-1}(t) = \phi(-t).$$

(d) Consideremos a seqüência de aplicações ϕ_k dadas por

$$\begin{cases} \phi_0(t) = I_d \\ \phi_{k+1}(t) = I_d + \int_0^t A\phi_k(s)ds. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= I_d + \int_0^t A\phi_0(s)ds = I_d + \int_0^t Ads = I_d + tA, \\ \phi_2(t) &= I_d + \int_0^t A\phi_1(s)ds = I_d + \int_0^t A(I_d + sA)ds = I_d + tA + \frac{t^2}{2!}A^2, \\ \phi_3(t) &= I_d + \int_0^t A\phi_2(s)ds = I_d + \int_0^t A(I_d + sA + \frac{s^2}{2!}A^2)ds \\ &= I_d + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3. \end{aligned}$$

Tomemos por hipótese de indução que

$$\phi_{k-1}(t) = I_d + \int_0^t A \left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{s^j A^j}{j!} \right) ds = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j A^j}{j!}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi_k(t) &= I_d + \int_0^t A\phi_{k-1}ds = I_d + \int_0^t A \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j A^j}{j!} \right) ds \\ &= I_d + \int_0^t A \left(I_d + sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{s^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} \right) ds \\ &= I_d + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{j=0}^k \frac{t^j A^j}{j!}. \end{aligned}$$

Portanto, por indução temos

$$\phi_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j A^j}{j!}.$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 1.1.8, agora para a equação linear homogênea

$$X' = AX, \quad X(0) = I_d,$$

temos que a seqüência ϕ_k converge uniformemente para a solução da equação acima, em cada intervalo compacto. Assim a série (1.17) converge para $\phi(t)$ em \mathbb{R} , uniformemente em cada intervalo compacto. ■

Observemos que a aplicação $t \rightarrow \phi(t)$ tem propriedades análogas à função exponencial. Definimos a exponencial da matriz A como sendo a matriz e^A definida por $\phi(1)$. Assim

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Logo, podemos reescrever a Proposição 1.3.1.

Proposição 1.3.2 (a) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$ e $e^{0A} = I_d$;

(b) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$;

(c) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$;

(d) $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto. ■

Conseqüentemente a solução da equação (1.16) é dada por

$$\varphi(t) = e^{tA} e^{-t_0 A} x_0.$$

E voltando ao caso não-homogêneo, com base no Teorema 1.2.4, a solução da equação (1.15) é dada por

$$\varphi(t) = e^{tA} \left[e^{-t_0 A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) ds \right].$$

Na próxima seção trabalharemos com a condição inicial $x(0) = x_0$. Neste caso as soluções acima tornam-se

- $\varphi(t) = e^{tA}$ para o caso homogêneo,
- $\varphi(t) = e^{tA} \left[x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right]$, para o caso não-homogêneo.

Exemplo 1.3.3 Calcule e^{tA} , com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Efetuando os cálculos, obtemos

$$A^{2k} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$$

e

$$A^{2k-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^k & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{2k-1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 1.3.4 *Seja A uma matriz $n \times n$ constante. Se λ é um auto-valor de A e v é um auto-vetor correspondente, então $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução da equação*

$$x' = Ax.$$

Demonstração: Temos $Av = \lambda v$. Logo

$$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = \lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t} = A\varphi(t).$$

■

Proposição 1.3.5 *Seja A uma matriz $n \times n$ constante. Se A tem auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e v_1, v_2, \dots, v_n são auto-vetores linearmente independentes, com $Av_i = \lambda_i v_i$, então a matriz $V(t)$, cuja i -ésima coluna, $i = 1, 2, \dots, n$, é $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i$, é uma matriz fundamental da equação*

$$x' = Ax.$$

Em particular $e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$.

Demonstração: Como os auto-valores λ_i são linearmente independentes, o resultado é imediato do Lema (1.3.4). A particularidade

$$e^{tA} = V(t)V^{-1}(0),$$

segue da unicidade da solução da equação

$$X' = AX, \quad \text{com } X(0) = I_d.$$

■

Quando os auto-valores da matriz A (real) são complexos conjugados, teremos uma solução complexa para a equação (1.16). Mas podemos expressá-la como solução real. Sejam $\lambda = \alpha + i\beta$ um auto-valor e $v = v_1 + iv_2$ um auto-vetor correspondente; assim $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ também é um auto-valor com auto-vetor correspondente $\bar{v} = v_1 - iv_2$, pois $Av = \lambda v \iff A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \iff A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Pela Proposição (1.3.5), $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ e $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$ são soluções linearmente independentes da equação (1.16). Deste modo

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)] \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2i}[\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)]$$

são soluções reais de (1.16), com $\varphi_1(0) = v_1$, $\varphi_2(0) = v_2$. Veja:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \frac{1}{2}[\varphi'(t) + \bar{\varphi}'(t)] = \frac{1}{2}[A\varphi(t) + A\bar{\varphi}(t)] = A\frac{1}{2}[\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)] = A\varphi_1(t), \\ \varphi_2'(t) &= \frac{1}{2i}[\varphi'(t) - \bar{\varphi}'(t)] = \frac{1}{2i}[A\varphi(t) - A\bar{\varphi}(t)] = A\frac{1}{2i}[\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)] = A\varphi_2(t), \\ \varphi_1(0) &= \frac{1}{2}[\varphi(0) + \bar{\varphi}(0)] = \frac{1}{2}[v + \bar{v}] = \frac{1}{2}[2v_1] = v_1, \\ \varphi_2(0) &= \frac{1}{2i}[\varphi(0) - \bar{\varphi}(0)] = \frac{1}{2i}[v - \bar{v}] = \frac{1}{2i}[2iv_2] = v_2. \end{aligned}$$

Os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes, pois, caso contrário teríamos $v_2 = cv_1$ e assim $v = v_1 + iv_2 = v_1 + icv_1 = (1 + ic)v_1$ e $\bar{v} = v_1 - iv_2 = v_1 - icv_1 = (1 - ic)v_1$ resultariam linearmente dependentes, o que não é verdade. Então as soluções $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são linearmente independentes. Agora,

$$\varphi(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}v = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(v_1 + iv_2),$$

e

$$\overline{\varphi}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}\overline{v} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)(v_1 - iv_2).$$

Logo

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}[\varphi(t) + \overline{\varphi}(t)] = \frac{1}{2}[e^{\alpha t}(2v_1 \cos \beta t - 2v_2 \operatorname{sen} \beta t)]. \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \cos \beta t - v_2 \operatorname{sen} \beta t)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \frac{1}{2i}[\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)] = \frac{1}{2i}[e^{\alpha t}(2iv_1 \operatorname{sen} \beta t + 2iv_2 \cos \beta t)] \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \operatorname{sen} \beta t + v_2 \cos \beta t)].\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.6 Encontre uma matriz fundamental para a equação

$$x' = Ax,$$

com

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Temos que ik e $-ik$ são auto-valores de A e

$$v = \begin{bmatrix} -i \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 + iv_2$$

é um auto-vetor correspondente ao auto-valor ik . Portanto

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t}(v_1 \cos \beta t - v_2 \operatorname{sen} \beta t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \cos kt - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen} kt \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} kt \\ k \cos kt \end{bmatrix},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= e^{\alpha t}(v_1 \operatorname{sen} \beta t + v_2 \cos \beta t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \operatorname{sen} kt + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos kt \\ &= \begin{bmatrix} -\cos kt \\ k \operatorname{sen} kt \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Consequentemente uma matriz fundamental para a equação dada é

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} kt & -\cos kt \\ k \cos kt & k \operatorname{sen} kt \end{bmatrix}.$$

Agora considerando a equação não-homogênea (1.15), devemos ressaltar que o Teorema 1.2.4, naturalmente, também é válido para sistemas autônomos; tanto é que já o usamos na solução do Exemplo (1.2.5).

Capítulo 2

Controlabilidade

Neste capítulo vamos introduzir as noções básicas de controle de sistemas lineares. Para isto vamos estudar a controlabilidade à origem e as propriedades do conjunto de estados controláveis. Vamos introduzir a matriz de controlabilidade e algumas propriedades desta que, em conjunto com outras condições, caracterizam a controlabilidade do sistema linear.

Também será objeto de estudo neste capítulo as propriedades do conjunto dos estados atingíveis do sistema.

2.1 Controlabilidade Para Sistemas Lineares

Estudaremos sistemas autônomos da forma

$$x' = Ax + Bu, \quad (2.1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes constantes. Denominamos o vetor x (n -dimensional) de **vetor estado** e u (m -dimensional) de **variável de controle**.

Consideraremos primeiramente controlabilidade à origem; desta forma, o alvo é $x = 0$. Por trabalharmos com sistemas autônomos, podemos escolher o tempo inicial como sendo zero. Assim, o estado inicial é dado por

$$x(0) = x_0. \quad (2.2)$$

As variáveis de controle são funções de t , integráveis. Atribuiremos classes aos diferentes tipos de variáveis de controle; se as funções são ilimitadas, dizemos que $u \in \mathcal{U}_u$; se são limitadas, isto é, se $|u_i(t)| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, dizemos que $u \in \mathcal{U}_b$. Quando $|u_i(t)| = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, dizemos que $u \in \mathcal{U}_{bb}$. Desta forma

$$\mathcal{U}_{bb} \subset \mathcal{U}_b \subset \mathcal{U}_u,$$

onde \mathcal{U}_{bb} , \mathcal{U}_b e \mathcal{U}_u são os conjuntos de controle.

Definimos o **conjunto controlável no tempo** t_1 como sendo o conjunto de estados iniciais x_0 que podem ser levados à origem no tempo t_1 usando um controle admissível, isto é, um controle pertencente ao conjunto de controle escolhido. Denotaremos o conjunto definido acima por $\mathcal{C}(t_1)$, mas, podemos ser ainda mais exatos, denotando tal conjunto por $\mathcal{C}(t_1, u, 0)$, onde t_1 é o tempo e $u \in \mathcal{U}$ é o controle usado, e 0 (zero) é o alvo.

Definimos o conjunto controlável \mathcal{C} como sendo o conjunto de pontos que podem ser levados à

origem em qualquer tempo finito, ou seja,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 \geq 0} \mathcal{C}(t_1).$$

Temos que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, porém é desejável que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Quando isto ocorre todos os estados iniciais são controláveis à origem e dizemos que o sistema é **completamente controlável**.

Proposição 2.1.1 *Se $x_0 \in \mathcal{C}$ e se y é um ponto na trajetória de x_0 à 0, então $y \in \mathcal{C}$.*

Demonstração: Suponhamos que $x(t)$ seja a trajetória, com controle $u(t)$. Por hipótese $x_0 \in \mathcal{C}$, assim $x(t_1) = 0$, para algum $t_1 \geq 0$. Também por hipótese, y é um ponto na trajetória de x_0 à 0, então para algum tempo τ , $x(\tau) = y$.

Tomemos o controle $v(t) = u(t + \tau)$ (para começarmos a partir de y , ou seja, mudamos a origem). Então com $x(0) = y$, seguimos a mesma trajetória de x_0 e alcançamos a origem no tempo $t_1 - \tau$. Deste modo $y \in \mathcal{C}(t_1 - \tau)$ e portanto $y \in \mathcal{C}$. ■

Com este resultado podemos afirmar que toda trajetória de x_0 à 0 fica totalmente no conjunto controlável.

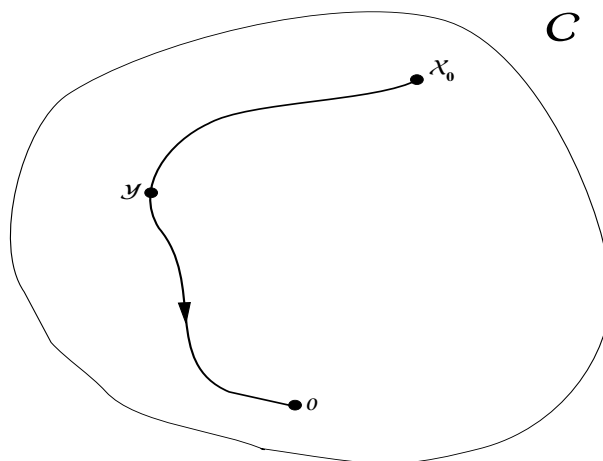


Figura 2.1: Ilustração referente à Proposição 2.1.1

Apresentaremos a seguir, algumas definições necessárias para próximas demonstrações.

Definição 2.1.2 Um caminho num espaço métrico X é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow X$ onde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Os pontos $x_1 = \alpha(0)$ e $x_2 = \alpha(1)$ são chamados respectivamente, de ponto inicial e ponto final do caminho α . Dizemos também que α é um caminho ligando os pontos x_1 e x_2 .

Definição 2.1.3 (Conexidade por Caminhos) Um espaço métrico X é conexo por caminhos, se para todo $x_1, x_2 \in X$ existe um caminho α ligando x_1 e x_2 .

Proposição 2.1.4 \mathcal{C} é conexo por caminhos.

Demonstração: Sejam $x_0, y_0 \in \mathcal{C}$. Pela Proposição 2.1.1, existe um caminho de cada ponto à origem que fica totalmente em \mathcal{C} . Assim existe um caminho em \mathcal{C} conectando x_0 e y_0 . De maneira análoga se mostra que $\mathcal{C}(t_1)$ é conexo por caminhos. Portanto podemos observar que \mathcal{C} não é composto de um número de partes disjuntas. ■

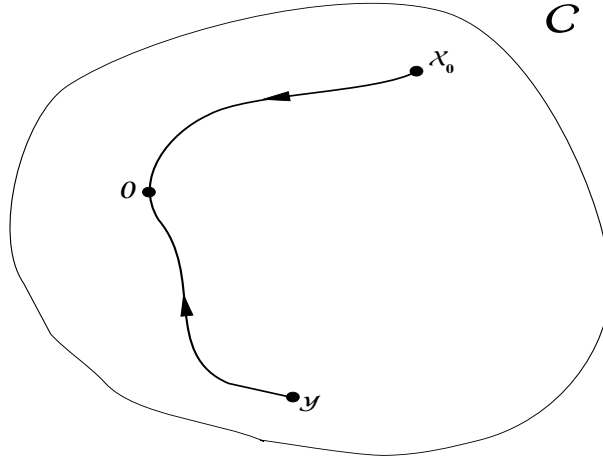


Figura 2.2: Ilustração referente à Proposição 2.1.4

Proposição 2.1.5 Se $t_1 < t_2$, então $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}(t_2)$.

Demonstração: Seja x_0 um ponto qualquer de $\mathcal{C}(t_1)$, com controle $u(t)$. Consideremos o controle v definido por

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{para } 0 \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{para } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Apliquemos este controle em x_0 . Então

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 & \text{pois } x_0 \in \mathcal{C}(t_1), \\ x' = Ax & \text{para } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Logo $x(t) = 0$ para $t_1 < t \leq t_2$. Claramente o controle v é integrável e assim é admissível. Desta forma x_0 é um ponto de $\mathcal{C}(t_2)$ e assim mostramos que o conjunto controlável em qualquer tempo contém o conjunto controlável em todos os tempos anteriores. ■

Obviamente 0 pertence a $\mathcal{C}(0)$. Logo $0 \in \mathcal{C}(t_1)$ para qualquer $t_1 \geq 0$ e então $0 \in \mathcal{C}$.

Proposição 2.1.6 \mathcal{C} é aberto, se e somente se, $0 \in \text{int } \mathcal{C}$.¹

Demonstração: $[\Rightarrow]$ Vimos que $0 \in \mathcal{C}$. Mas quando \mathcal{C} é aberto, temos que $\mathcal{C} = \text{int } \mathcal{C}$. Logo $0 \in \text{int } \mathcal{C}$.

$[\Leftarrow]$ Se $0 \in \text{int } \mathcal{C}$, então existe uma bola $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$. Seja u o controle que leva um ponto arbitrário x_0 à 0 no tempo t_1 . Seja $y(t)$ a solução com $y(0) = y_0$, onde $y_0 \in \mathcal{B}(x_0, r_0)$. Pela continuidade da

¹int \mathcal{C} denota o interior de \mathcal{C}

solução do PVI, $y(t_1) = y_1 \in \mathcal{B}(0, r)$ para r_0 suficientemente pequeno. Como $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$, podemos encontrar um controle \hat{u} que leva y_1 à 0 no tempo t_2 . Tomemos o controle v definido por

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{para } 0 \leq t \leq t_1, \\ \hat{u}(t - t_1) & \text{para } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Logo usando este controle, é possível levar y_0 à 0 no tempo $t_1 + t_2$. Deste modo $y_0 \in \mathcal{C}(t_1 + t_2)$ e $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset \mathcal{C}, \forall x_0 \in \mathcal{C}$. Portanto \mathcal{C} é aberto se $0 \in \text{int } \mathcal{C}$. ■

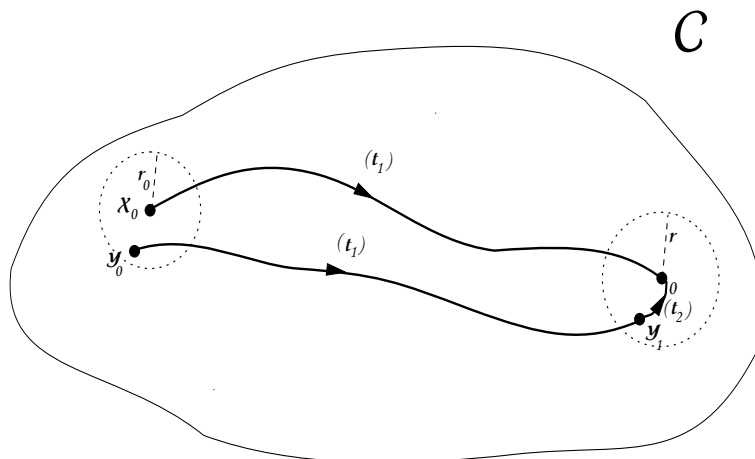


Figura 2.3: Ilustração referente à Proposição 2.1.6

As equações estado para o sistema linear autônomo são dadas conforme já vimos por $x' = Ax + Bu$, da seção anterior temos que a solução é dada por

$$x(t) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds \right). \quad (2.3)$$

Temos que $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ se e somente se existe um controle $u \in \mathcal{U}$, tal que $x(t_1) = 0$, ou seja,

$$0 = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} Bu(s) ds \right),$$

e como a função exponencial nunca se anula,

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} Bu(s) ds. \quad (2.4)$$

Precisamos agora saber sob que condições o sistema é completamente controlável, isto é, $\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n$. Os conjuntos de controle que usaremos são integráveis, com ou sem limite, ou seja, \mathcal{U} pode ser \mathcal{U}_a ou \mathcal{U}_b . Provaremos agora alguns resultados sobre o conjunto controlável. Admitimos que o conjunto de controles admissíveis \mathcal{U} é convexo

Proposição 2.1.7 $\mathcal{C}(t_1)$ é simétrico e convexo.

Demonstração: Primeiro provemos que $\mathcal{C}(t_1)$ é simétrico. Seja $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ com controle $u(t)$. Da equação (2.4), segue que $-x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ com controle $-u(t)$, e assim $\mathcal{C}(t_1)$ é simétrico.

Agora provemos a convexidade. Temos que o conjunto \mathcal{U} é convexo:

$$cu_1 + (1-c)u_2 \in \mathcal{U}, \text{ para } 0 \leq c \leq 1, u_1, u_2 \in \mathcal{U}.$$

Suponhamos que os controles u_1 e u_2 levam os pontos x_1 e x_2 à origem no tempo t_1 , respectivamente. De (2.4), segue que

$$x_1 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_1(s) ds \text{ e } x_2 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_2(s) ds.$$

Temos que

$$\begin{aligned} cx_1 + (1-c)x_2 &= -c \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_1(s) ds - (1-c) \int_0^{t_1} e^{-sA} B u_2(s) ds \\ &= - \int_0^{t_1} e^{-sA} B [cu_1(s) + (1-c)u_2(s)] ds, \text{ para } 0 \leq c \leq 1. \end{aligned}$$

Logo $cx_1 + (1-c)x_2 \in \mathcal{C}(t_1)$ e portanto $\mathcal{C}(t_1)$ é convexo. ■

Proposição 2.1.8 \mathcal{C} é simétrico e convexo.

Demonstração: Lembremos que $\mathcal{C} = \cup_{t_1 \geq 0} \mathcal{C}(t_1)$. A simetria é óbvia. Provemos que \mathcal{C} é convexo. Sejam $x_1 \in \mathcal{C}(t_1)$ e $x_2 \in \mathcal{C}(t_2)$ com $t_1 < t_2$. Desde que $t_1 < t_2$, $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}(t_2)$, e daí segue que $x_1 \in \mathcal{C}(t_2)$. Pela Proposição 2.1.7 $\mathcal{C}(t_2)$ é convexo, então

$$cx_1 + (1-c)x_2 \in \mathcal{C}(t_2), \text{ para } 0 \leq c \leq 1.$$

Mas $\mathcal{C}(t_2) \subset \mathcal{C}$. Logo \mathcal{C} é convexo. ■

Exemplo 2.1.9 Consideremos um sistema instável com dois componentes, isto é, qualquer desvio da origem, se o sistema for incontrolável, levará a um estado de desequilíbrio. Para um sistema controlável com estas características, podemos considerar as equações estado

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u_1 \\ x_2' = x_2 + u_1 \end{cases}$$

e $u_1 \in \mathcal{U}_b$, ou seja, $|u_1| \leq 1$. Encontre $\mathcal{C}(t_1)$ e \mathcal{C} .

Solução: O sistema dado é equivalente a

$$x' = Ax + Bu,$$

com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. De (2.4) segue que $x \in \mathcal{C}(t_1)$ se

$$(x_1, x_2)^t = - \int_0^{t_1} e^{-I_d s} B u_1 ds.$$

Mas

$$e^{-I_d s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k (I_d)^k}{k!} = I_d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} = I_d e^{-s}.$$

Logo

$$x_1 = x_2 = - \int_0^{t_1} e^{-s} u_1 ds.$$

Agora, como $|u_1| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |x_1| &= \left| - \int_0^{t_1} e^{-s} u_1 ds \right| \leq \int_0^{t_1} |e^{-s}| |u_1| ds \\ &\leq \int_0^{t_1} e^{-s} ds = -e^{-t_1} + 1. \end{aligned}$$

Assim

$$\mathcal{C}(t_1) = \{x_1 = x_2 : |x_1| \leq 1 - e^{-t_1}\},$$

e

$$\mathcal{C} = \{x_1 = x_2 : |x_1| < 1\}.$$

Observemos que, como parte do \mathbb{R}^2 , $\text{int } \mathcal{C} = \emptyset$. Daí segue que \mathcal{C} não é aberto (Proposição 2.1.6). Com $\mathcal{C} = \{x_1 = x_2 : |x_1| < 1\}$ podemos concluir que para qualquer estado inicial fora do intervalo $-1 < x_1 < 1$, o sistema é incontrolável. Porém a origem pertence a este intervalo e o sistema é controlável aí. O sistema continua controlável para qualquer desvio da origem menor que 1. Mas, em geral, não é possível controlar os dois componentes simultaneamente com o mesmo controle. Isto só é possível se os desvios iniciais dos dois componentes forem iguais.

Geralmente são necessárias duas condições para o sistema ser completamente controlável. O conjunto controlável deve ser n -dimensional e ilimitado, mesmo quando os controles pertencem a \mathcal{U}_b .

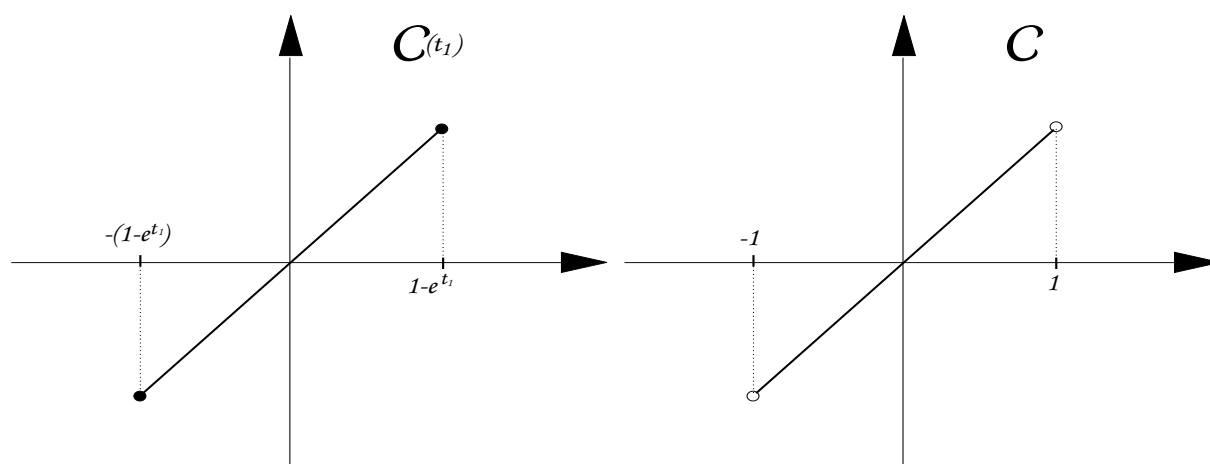


Figura 2.4: Ilustração referente ao Exemplo 2.1.9

2.2 A Matriz de Controlabilidade

Definimos a **matriz de controlabilidade** M , como sendo a matriz formada pela matriz B , $n \times m$, e o seu produto com potências da matriz A , $n \times n$, ou seja, a matriz

$$M = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B],$$

que tem n linhas e nm colunas.

Exemplo 2.2.1 Ache a matriz de controlabilidade para o sistema do exemplo anterior, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$M = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Provaremos agora, alguns resultados sobre a controlabilidade completa que dependem do posto de M e dos auto-valores de A . Observemos por exemplo, que o posto da matriz de controlabilidade no exemplo anterior é 1, e pelo Exemplo 2.1.9 existem pontos próximos à origem que não são controláveis.

Proposição 2.2.2 $0 \in \text{int } \mathcal{C} \Leftrightarrow \text{posto}(M) = n$.

Demonstração: $[\Rightarrow]$ Temos que $\text{posto}(M) \leq n$. Suponhamos que $\text{posto}(M) < n$. Então não existem n colunas de M linearmente independentes, e assim existe pelo menos um vetor $y \in \mathbb{R}^n$, com $\|y\| = 1$, que é ortogonal a todas as colunas de M . Deste modo y também é ortogonal a cada coluna de B e a cada coluna de $A^k B$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, ou seja,

$$y^t B = y^t A^k B = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Ver [Lim]) concluímos que

$$y^t A^k B = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Da seção anterior sabemos que

$$e^{-sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (-s)^k}{k!}, \quad (2.6)$$

isto é, e^{-sA} é uma combinação linear de A^k , onde $k \in \mathbb{N}$. Portanto de (2.5) e (2.6), segue que

$$y^t e^{-sA} B = 0.$$

De (2.4), temos que $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ se

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds.$$

Então, para todo $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$

$$y^t x_0 = - \int_0^{t_1} y^t e^{-sA} B u(s) ds = 0.$$

Consequentemente $\mathcal{C}(t_1)$ fica num hiperplano com normal y , para todo $t_1 > 0$. E o conjunto controlável fica no mesmo hiperplano, e então qualquer bola $\mathcal{B}(0, r) \not\subset \mathcal{C}, \forall r$. Portanto $0 \notin \text{int } \mathcal{C}$, o que contradiz a hipótese. Logo $\text{posto}(M) = n$.

[\Leftarrow] Suponhamos que $0 \notin \text{int } \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}, \forall t_1$, temos que $0 \notin \text{int } \mathcal{C}(t_1)$, o que implica que $0 \in \text{fr}^2 \mathcal{C}(t_1)$. Como já vimos, $\mathcal{C}(t_1)$ é convexo. Deste modo existe um hiperplano suporte à $\mathcal{C}(t_1)$ passando por 0, para todo t_1 . Seja $b(t_1)$ o normal a este hiperplano. Então $b^t x_0 \leq 0, \forall x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$. De (2.4), temos que $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ se

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds.$$

Assim,

$$\int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds = -b^t x_0 \geq 0, \forall x_0 \in \mathcal{C}(t_1). \quad (2.7)$$

Mas $u \in \mathcal{U} \Rightarrow -u \in \mathcal{U}$. Portanto

$$\int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds = -b^t x_0 \leq 0, \forall x_0 \in \mathcal{C}(t_1). \quad (2.8)$$

Assim de (2.7) e (2.8) segue que

$$\int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds = 0,$$

o que implica que

$$b^t e^{-sA} B = 0, \text{ para } 0 \leq s \leq t_1. \quad (2.9)$$

Como (2.9) é válida para qualquer $s \in [0, t_1]$, tomemos $s = 0$. Assim

$$b^t B = 0.$$

Derivando (2.9) k vezes e tomando sempre $s = 0$, obtemos

$$b^t A^k B = 0.$$

Logo b é ortogonal a todas as colunas de M , e assim $\text{posto}(M) < n$, contradizendo a hipótese. Portanto $0 \in \text{int } \mathcal{C}$. ■

Com este resultado temos uma relação entre o posto da matriz de controlabilidade com a origem, e consequentemente (de acordo com a Proposição 2.1.6) com o conjunto ser aberto ou não. Se o posto de M é menor que n , o sistema não é completamente controlável. Porém, se o posto de M é igual a n , o sistema pode ou não ser completamente controlável, dependendo agora do conjunto de controle.

Proposição 2.2.3 *Se $\text{posto}(M) = n$, e $u \in \mathcal{U}_u$, então $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.*

²fronteira de $\mathcal{C}(t_1)$

Demonstração: Por hipótese posto(M) = n . Logo, pela proposição anterior, $0 \in \text{int } \mathcal{C}$. Então existe uma bola $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$, para algum $r > 0$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário. Consideremos $y_0 = cx_0$, com $c = \frac{1}{2}r \frac{1}{\|x_0\|}$. Temos que $\|y_0\| = \|cx_0\| = c \|x_0\| = \frac{1}{2}r$. Logo $y_0 \in \mathcal{B}(0, r)$, e assim é controlável com um controle v pertencente a \mathcal{U}_u . Portanto

$$y_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} Bv(s) ds.$$

Então

$$cx_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} Bv(s) ds \Rightarrow x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B \frac{v(s)}{c} ds = - \int_0^{t_1} e^{-sA} Bu(s) ds,$$

onde

$$u(s) = \frac{v(s)}{c} \in \mathcal{U}_u.$$

Deste modo x_0 é controlável, e como x_0 foi tomado arbitrariamente temos que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. De maneira análoga podemos mostrar que $\mathcal{C}(t_1) = \mathbb{R}^n, \forall t_1 > 0$. ■

A partir de agora consideraremos apenas o conjunto \mathcal{U}_b como sendo o conjunto de controle.

Proposição 2.2.4 *Se posto(M) = n , e $\text{Re}(\lambda_i) < 0^3$ para cada auto valor λ_i de A , então $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Suponhamos a princípio que A é diagonalizável. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto arbitrário. Consideremos a equação

$$x' = Ax, \tag{2.10}$$

e façamos a transformação $x = Py$, onde P é a matriz formada pelos auto-vetores linearmente independentes correspondentes aos auto-valores λ_i de A . De $x = Py$, temos

$$x' = Py' \tag{2.11}$$

Assim, das equações (2.10) e (2.11) segue que

$$Py' = Ax = APy \Rightarrow y' = P^{-1}APy = Dy,$$

onde D é a matriz

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

A solução da equação diferencial acima é dada por

$$y(t) = e^{Dt} y_0,$$

onde $y_0 = P^{-1}x_0$. Determinemos e^{Dt} . Temos que

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

³ $\text{Re}(\lambda_i)$ representa a parte real de λ_i

logo,

$$\begin{aligned}
e^{Dt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Desde que $Re(\lambda_i) < 0$, temos que $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ e assim $\|y(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. De $x = Py$ segue que $\|x(t)\| = \|Py(t)\| \leq \|P\| \|y(t)\| \rightarrow 0$, ou seja, $\|x(t_1)\| < \delta$ para algum $t_1 > 0$ e $\delta > 0$ é tomado arbitrariamente pequeno. Por hipótese $\text{posto}(M) = n$, então pela Proposição 2.2.2 $0 \in \text{int } \mathcal{C}$. Assim existe uma bola $\mathcal{B}(0, \delta) \subset \mathcal{C}$. Como $\|x(t_1)\| < \delta$, $x(t_1)$ pode ser levado à 0 em algum tempo t_2 por um controle \hat{u} , digamos, pertencente a \mathcal{U}_b . Consideremos o controle v definido por

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq t_1, \\ \hat{u} & \text{para } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Usando o controle v , podemos levar x_0 à 0 em algum tempo $t_1 + t_2$. Portanto $x_0 \in \mathcal{C}(t_1 + t_2) \subset \mathcal{C}$. Como x_0 era um ponto arbitrário em \mathbb{R}^n , temos que $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Se A não é diagonalizável, a matriz D terá alguns elementos não nulos acima da diagonal principal. Contudo, ainda é verdade que $\|y(t)\| \rightarrow 0$ e assim este detalhe não invalida a demonstração apresentada. ■

Em alguns casos onde temos auto-valores imaginários puros o resultado anterior não é aplicável. Contudo, podemos provar um resultado similar para estes casos.

Proposição 2.2.5 *Se $\text{posto}(M) = n$, e $Re(\lambda_i) \leq 0$ para cada auto-valor λ_i de A , então $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$ e que $y \notin \mathcal{C}$. Deste modo existe um hiperplano com normal b separando y e \mathcal{C} , tal que

$$b^t x_0 \leq p, \forall x_0 \in \mathcal{C} \text{ e } b^t y > p.$$

Se mostramos que

$$b^t x_0 = - \int_0^{t_1} b^t e^{-sA} B u(s) ds > p$$

para t_1 suficientemente grande e para algum controle $u \in \mathcal{U}_b$, teremos uma contradição. A igualdade acima segue diretamente de (2.4). Então vamos definir $z^t(s) = b^t e^{-sA} B$, assim $z(t) \neq 0$ para $0 \leq t \leq t_1$. Escolhendo $u_i(t) = -\text{sgn } z_i(t)$ temos

$$b^t x_0 = \int_0^{t_1} |z(t)| dt.$$

Cada componente de z é uma combinação de termos da forma $q(t)e^{-\lambda_i t}$, onde q é um polinômio e λ_i é um auto-valor de A .

Consideremos, a princípio, os auto-valores com parte real negativa. Assim $q(t)e^{-\lambda_i t} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Os termos correspondentes aos auto-valores com parte real nula são polinômios em t ou são termos periódicos em t . Tanto os termos polinomiais como os termos periódicos dão uma contribuição positiva à integral acima num intervalo não nulo. Portanto $b^t x_0 = \int_0^{t_1} |z(t)| dt$ é arbitrariamente grande para t_1 suficientemente grande. Logo obtemos a contradição requerida e $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. ■

Como já vimos, se $\text{posto}(M) < n$ o sistema não é totalmente controlável, ou seja, $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$. Mas mesmo com $\text{posto}(M) = n$ o sistema ainda pode não ser totalmente controlável.

Proposição 2.2.6 *Se $\text{posto}(M) = n$, e A tem um auto-valor com parte real positiva, então $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Sejam λ um auto-valor de A com $\text{Re}(\lambda) > 0$ e y um auto-vetor à esquerda correspondente.

Então temos

$$y^t A = \lambda y^t.$$

Observemos que

$$y^t A A = \lambda y^t A \Leftrightarrow y^t A^2 = \lambda \lambda y^t \Leftrightarrow y^t A^2 = \lambda^2 y^t.$$

Suponhamos por indução que

$$y^t A^{k-1} = \lambda^{k-1} y^t.$$

Mas

$$y^t A^{k-1} A = \lambda^{k-1} y^t A \Leftrightarrow y^t A^k = \lambda^{k-1} \lambda y^t \Leftrightarrow y^t A^k = \lambda^k y^t.$$

Logo provamos que

$$y^t A^k = \lambda^k y^t. \quad (2.13)$$

Das equações (2.6) e (2.13) segue que

$$\begin{aligned} y^t e^{-sA} &= y^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (-s)^k}{k!} \right) \\ &= y^t \left(I_d - As + \frac{A^2 s^2}{2!} - \frac{A^3 s^3}{3!} + \dots \right) \\ &= y^t I_d - y^t A s + \frac{y^t A^2 s^2}{2!} - \frac{y^t A^3 s^3}{3!} + \dots \\ &= y^t - \lambda y^t s + \frac{\lambda^2 y^t s^2}{2!} - \frac{\lambda^3 y^t s^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \lambda s + \frac{\lambda^2 s^2}{2!} - \frac{\lambda^3 s^3}{3!} + \dots \right) y^t \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (-s)^k}{k!} \right) y^t \\ &= e^{-\lambda s} y^t. \end{aligned}$$

Deste modo

$$y^t e^{-sA} = e^{-\lambda s} y^t. \quad (2.14)$$

Seja $x_0 \in \mathcal{C}$. Logo $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$, para algum $t_1 > 0$. Assim

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds,$$

e da equação (2.14) segue que

$$y^t x_0 = - \int_0^{t_1} y^t e^{-sA} B u(s) ds = - \int_0^{t_1} e^{-\lambda s} y^t B u(s) ds. \quad (2.15)$$

Quando $t_1 \rightarrow \infty$, $e^{-\lambda s} \rightarrow 0$ pois $Re(\lambda) > 0$, e assim $e^{-\lambda s}$ é limitado. Desde que $y^t B$ é um termo constante e $u(s)$ pertence ao conjunto $\mathcal{U}_b(u(s)$ é limitado), temos que $e^{-\lambda s} y^t B u(s)$ é limitado, o que implica que

$$- \int_0^{t_1} e^{-\lambda s} y^t B u(s) ds < p, \text{ para algum } p.$$

De (2.15) segue que

$$y^t x_0 < p,$$

e assim existe um hiperplano separando \mathcal{C} e com normal y , e o conjunto controlável fica em um dos semi-espacos definidos pelo hiperplano. Portanto $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^n$. ■

Exemplo 2.2.7 Verifique a controlabilidade do sistema $x' = Ax + Bu$ com:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} q \\ r \\ s \end{bmatrix}, \text{ onde } p, q, r \text{ e } s \text{ são números reais.}$$

Solução: (a) Temos que

$$M = [B \ AB] = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso $\text{posto}(M) = 1 \neq n = 2$. Assim o sistema não é completamente controlável.

(b) Temos que

$$M = [B \ AB] = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso $\text{posto}(M) = 2 = n$. Logo se $u \in \mathcal{U}_u$, o sistema é completamente controlável. Agora se $u \in \mathcal{U}_b$, devemos analisar os auto-valores de A . Temos que 0 e 1 são os auto-valores de A . Como $Re(1) > 0$, o sistema não é completamente controlável.

(c) Temos que

$$M = [B \ AB \ AB^2] = \left[\begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} q & pq + r & p^2q + 2pr + s \\ r & pr + s & p^2r + 2ps \\ s & ps & p^2s \end{bmatrix}.$$

Neste caso $\text{posto}(M) = 3 = n$. Portanto se $u \in \mathcal{U}_u$, o sistema é completamente controlável. Porém se $u \in \mathcal{U}_b$ e $\text{Re}(p) \leq 0$ (note que p é o único auto-valor de A) o sistema é completamente controlável.

2.3 Conjunto dos Estados Atingíveis

Até então consideramos controlabilidade à origem. Mas, de maneira semelhante, podemos definir a controlabilidade a um ponto x_1 . Definimos $\mathcal{C}(t_1, x_1)$ como sendo o conjunto dos pontos controláveis a x_1 no tempo t_1 . Temos que $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$ se e somente se existe controle $u \in \mathcal{U}$, tal que $x(t_1) = x_1$, ou seja,

$$x_1 = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right).$$

Logo,

$$x_0 = e^{-t_1 A} x_1 - \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds. \quad (2.16)$$

O resultado acima segue diretamente de (2.3). Muitos resultados que provamos anteriormente para $\mathcal{C}(t_1)$ também são válidos para $\mathcal{C}(t_1, x_1)$, por exemplo a convexidade. Por outro lado alguns resultados não são válidos, por exemplo se não existe controle u tal que $Ax_1 + Bu = 0$ não podemos afirmar que $\mathcal{C}(t_1, x_1) \subset \mathcal{C}(t_2, x_1)$ para $t_2 > t_1$.

Agora vamos definir o **conjunto dos estados atingíveis**. Definimos $\mathcal{R}(t_1, x_0)$ como sendo o conjunto dos pontos que são atingíveis a partir de um ponto inicial x_0 no tempo t_1 . De (2.3) segue que $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ se

$$x_1 = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right), \quad (2.17)$$

para algum $u \in \mathcal{U}$.

Podemos observar claramente uma reciprocidade entre os dois conjuntos: $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$, então $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$. Também, podemos definir o **sistema tempo-inverso**. Definimos este sistema como sendo o sistema com a seguinte equação estado

$$x' = -Ax - Bu. \quad (2.18)$$

Agora determinemos quando x_0 pertence aos conjuntos $\mathcal{C}(t_1, x_0)$ e $\mathcal{R}(t_1, x_0)$ para o sistema tempo-inverso. Da seção anterior, temos que a solução de (2.18) é dada por

$$x(t) = e^{-tA} \left(x_0 - \int_0^t e^{sA} B u(s) ds \right).$$

Logo, $x_0 \in \mathcal{C}(t_1, x_1)$ se

$$x_0 = e^{t_1 A} x_1 + \int_0^{t_1} e^{sA} B u(s) ds, \quad (2.19)$$

e $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ se

$$x_1 = e^{-t_1 A} \left(x_0 - \int_0^{t_1} e^{sA} B u(s) ds \right). \quad (2.20)$$

Existe uma relação entre o sistema tempo-inverso (2.18) e o original (2.1). Se fizermos a mudança de variável $s = t_1 - \tau$ em (2.19), teremos $ds = -d\tau$ e $\begin{cases} \tau = t_1 & \text{se } s = 0 \\ \tau = 0 & \text{se } s = t_1 \end{cases}$. Assim,

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{t_1 A} x_1 + \int_{t_1}^0 e^{t_1 A} e^{-\tau A} B u(t_1 - \tau) (-d\tau) \\ &= e^{t_1 A} x_1 + e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-\tau A} B u(t_1 - \tau) d\tau \\ &= e^{t_1 A} \left(x_1 + \int_0^{t_1} e^{-\tau A} B \hat{u}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde temos $\hat{u}(\tau) = u(t_1 - \tau)$. Portanto comparando (2.17) e (2.21) podemos concluir que o conjunto controlável para o sistema tempo-inverso é igual ao conjunto dos estados atingíveis para o sistema original. Conseqüentemente as propriedades gerais do conjunto controlável também serão válidas para o conjunto dos estados atingíveis.

Exemplo 2.3.1 Encontre o conjunto controlável e o conjunto dos estados atingíveis para o sistema unidimensional

$$\begin{cases} x' = x + u; \\ x_0 = \frac{1}{2}, |u| \leq 1. \end{cases}$$

Solução: De (2.17) temos que $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, \frac{1}{2})$ se

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{t_1} \left(\frac{1}{2} + \int_0^{t_1} e^{-s} u(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{t_1} + e^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-s} u(s) ds. \end{aligned}$$

Mas como $|u| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \left| x_1 - \frac{1}{2} e^{t_1} \right| &\leq e^{t_1} \int_0^{t_1} e^{-s} ds \\ &= e^{t_1} (-e^{-t_1} + 1) = e^{t_1} - 1. \end{aligned}$$

Portanto

$$1 - e^{t_1} \leq x_1 - \frac{1}{2} e^{t_1} \leq e^{t_1} - 1,$$

e assim,

$$\mathcal{R}(t_1, \frac{1}{2}) = \left[1 - \frac{1}{2} e^{t_1}, \frac{3}{2} e^{t_1} - 1 \right].$$

De (2.20) temos que os pontos pertencentes ao conjunto dos estados atingíveis para o sistema tempo-inverso são dados por

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-t_1} \left(\frac{1}{2} - \int_0^{t_1} e^s u(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-t_1} - e^{-t_1} \int_0^{t_1} e^s u(s) ds. \end{aligned}$$

Considerando que $|u| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \left| x_1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \right| &\leq e^{-t_1} \int_0^{t_1} e^s ds \\ &= e^{-t_1} (e^{t_1} - 1) = 1 - e^{-t_1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$e^{-t_1} - 1 \leq x_1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \leq 1 - e^{-t_1},$$

e o conjunto procurado é o intervalo fechado

$$\left[\frac{3}{2} e^{-t_1} - 1, 1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \right],$$

que pelo que vimos anteriormente é o conjunto controlável ao ponto $\frac{1}{2}$ para o sistema em questão. Notemos que todos os pontos em \mathbb{R} são atingíveis por $\frac{1}{2}$ num tempo finito, mas somente os pontos no intervalo $(-1, 1)$ são controláveis a $\frac{1}{2}$ (isto pode se facilmente observado tomando t_1 arbitrariamente grande).

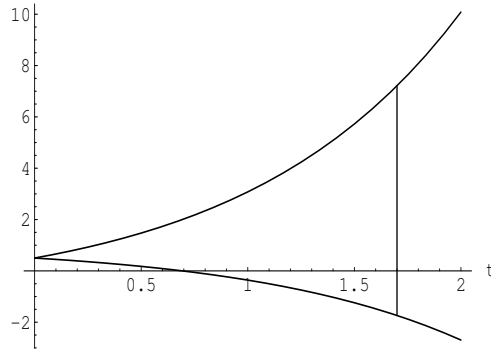


Figura 2.5: A linha vertical representa o conjunto $\mathcal{R}(t_1, 1/2)$

Proposição 2.3.2 *Os conjuntos dos estados atingíveis e controlável são contínuos em t_1 .*

Demonstração: Para mostrar que isto é uma propriedade geral, vamos considerar, por simplicidade, que o conjunto dos estados atingíveis pela origem com controles limitados, o qual denotaremos por $\mathcal{R}(t)$. Logo de (2.19) segue que $x \in \mathcal{R}(t)$ quando

$$x = \int_0^t e^{sA} B u(s) ds.$$

Mostremos que $\mathcal{R}(t_1)$ é contínua, ou seja, se dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $|t_2 - t_1| < \delta(\epsilon)$, então $d_H(\mathcal{R}(t_2), \mathcal{R}(t_1)) < \epsilon$, que é equivalente à $\max(H_{12}, H_{21}) < \epsilon$ para $t_2 \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$, onde $H_{12} = \sup \{d(y, \mathcal{R}(t_1))\}_{y \in \mathcal{R}(t_2)}$ e $H_{21} = \sup \{d(x, \mathcal{R}(t_2))\}_{x \in \mathcal{R}(t_1)}$.

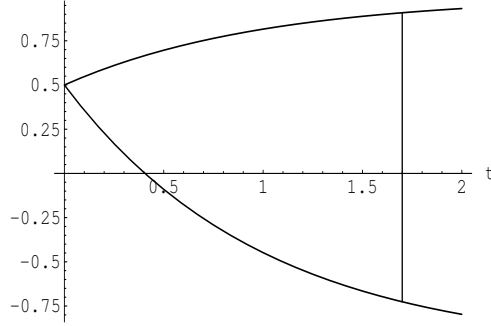


Figura 2.6: A linha vertical representa o conjunto $\mathcal{C}(t_1, 1/2)$

Tomemos $M = \max \| e^{sA} B \|_{t_1, t_2 \in [0, T]}$.

Seja $\bar{x} \in \mathcal{R}(t_1)$ com controle u . Temos que mostrar que $d(\bar{x}, \mathcal{R}(t_2)) < \epsilon$.

Tomemos $t_3 = \min(t_1, t_2)$ e consideremos o controle v definido por

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } 0 \leq t \leq t_3, \\ \hat{u}(t), & \text{para } t_3 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $\hat{u} \in \mathcal{U}_b$.

Se

$$\bar{y} = \int_0^{t_2} e^{sA} B v(s) ds, \quad (2.23)$$

então $\bar{y} \in \mathcal{R}(t_2)$.

Suponhamos $t_3 = t_1$ e de (2.22) e (2.23) temos

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| &= \left\| \int_0^{t_2} e^{sA} B v(s) ds - \int_0^{t_1} e^{sA} B u(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^{t_1} e^{sA} B v(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{sA} B v(s) ds - \int_0^{t_1} e^{sA} B u(s) ds \right\| \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{y}\| &= \left\| \int_{t_3}^{t_2} e^{sA} B v(s) ds \right\| \leq \int_{t_3}^{t_2} \| e^{sA} B v(s) \| ds \\ &\leq M |t_2 - t_3|. \end{aligned}$$

Assim, se $\delta < \frac{\epsilon}{M}$ temos

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| < M |t_2 - t_3| < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

O caso $t_3 = t_2$ também se verifica analogamente. Logo, $\|\bar{x} - \bar{y}\| < \epsilon, \forall \bar{x} \in \mathcal{R}(t_1)$. Portanto, $d(\bar{x}, \mathcal{R}(t_2)) < \epsilon$ e assim $H_{21} < \epsilon$.

Da mesma forma, mostra-se que $H_{12} < \epsilon$. Portanto, $\max\{H_{12}, H_{21}\} < \epsilon$. ■

Para a próxima proposição precisamos das seguintes notações e conceitos. Considere o espaço vetorial de funções reais

$$\mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R}) := \{f : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ possui quadrado integrável}\}.$$

A este espaço associamos a norma usual, $\| \cdot \|_2$, dada por

$$\|f(t)\| := \left(\int_0^{t_1} |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}, \forall f \in \mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R}).$$

É conhecido que $\mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert e que bolas fechadas são fracamente compactas. Relembramos a noção de convergência fraca para esse espaço. Diz-se que uma sequência $(f^k) \in \mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R})$, $\forall k$, converge fracamente a uma função $f \in \mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R})$ se

$$\int_0^{t_1} v(s) f^k(s) ds \longrightarrow \int_0^{t_1} v(s) f(s) ds, \quad \forall v \in \mathcal{L}^2([0, t_1], \mathbb{R}).$$

Proposição 2.3.3 *O conjunto dos estados atingíveis é compacto.*

Demonstração: De (2.17) temos que $x_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$ quando

$$x_1 = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right). \quad (2.24)$$

Assim, se considerarmos $u \in \mathcal{U}_b$, claramente $\mathcal{R}(t_1, x_0)$ é limitado. Agora temos que provar que $\mathcal{R}(t_1, x_0)$ é fechado. Para isto, devemos mostrar que toda sequência convergente de pontos em $\mathcal{R}(t_1, x_0)$ possui limite em $\mathcal{R}(t_1, x_0)$.

Seja

$$x_1^{(k)} = e^{t_1 A} \left(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u^{(k)}(s) ds \right)$$

uma sequência de pontos em $\mathcal{R}(t_1, x_0)$, onde $u^k \in \mathcal{U}_b$ é a sequência de controles correspondentes. Denotemos por θ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, a i -ésima coluna de $e^{-sA} B$. Então

$$x_1^{(k)} = e^{t_1 A} \left[x_0 + \left(\int_0^{t_1} \theta_1(s) u_1^{(k)}(s) ds + \dots + \int_0^{t_1} \theta_m(s) u_m^{(k)}(s) ds \right)^t \right], \quad (2.25)$$

onde

$$u^{(k)}(s) = \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(s) \\ \vdots \\ u_m^{(k)}(s) \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que $x_1^{(k)} \longrightarrow \hat{x}_1$, quando $k \longrightarrow \infty$, para algum $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\hat{x}_1 \in \mathcal{R}(t_1, x_0)$, isto é, \hat{x}_1 é da forma (2.24), para algum $\hat{u} \in \mathcal{U}_b$. A demonstração deste fato estará concluída, uma vez que mostrarmos que $\exists \hat{u} \in \mathcal{U}_b$ tal que

$$\int_0^{t_1} \theta_i(s) u_i^{(k_j)}(s) ds \longrightarrow \int_0^{t_1} \theta_i(s) \hat{u}_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

para alguma subsequência $u_i^{(k_j)}$ de $u_i^{(k)}$, devido a (2.25) e à unicidade do limite de seqüências em \mathbb{R}^n .

Estamos considerando $u^{(k)} \in \mathcal{U}_b$. Logo

$$\|u_i^{(k)}(t)\|_2 = \left(\int_0^{t_1} |u_i^{(k)}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{t_1} ds \right)^{1/2} = (t_1)^{1/2}. \quad (2.26)$$

De (2.26) vemos que a sequência $u_i^{(k)}$ é limitada em $\mathcal{L}^2[0, t_1]$. Portanto possui subsequência fracamente convergente para algum $\hat{u}_i \in \mathcal{L}^2[0, t_1]$, isto é,

$$\int_0^{t_1} f(s)u_i^{(k_j)}(s)ds \longrightarrow \int_0^{t_1} f(s)\hat{u}_i(s)ds, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2[0, t_1]. \quad (2.27)$$

Agora suponhamos que $\hat{u}_i > 1$ num subconjunto $H \subset [0, t_1]$ com medida $h > 0$. Seja

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in H, \\ 0 & \text{se } s \notin H. \end{cases}$$

Então

$$\int_0^{t_1} f(s)\hat{u}_i(s)ds = \int_H \hat{u}_i ds > h.$$

Mas,

$$\int_0^{t_1} f(s)u_i^{(k_j)}(s)ds = \int_H u_i^{(k_j)} ds \leq h.$$

Portanto temos uma contradição. Se tomarmos $u_i < -1$, analogamente teremos outra contradição. Deste modo, $-1 \leq u_i \leq 1$, ou seja, $|u_i| \leq 1$. Desde que os pontos no conjunto dos estados atingíveis são definidos em termos de integrais da forma (2.26) para funções específicas $f(t)$, o conjunto dos estados atingíveis é fechado e consequentemente é compacto. ■

No desenvolvimento da teoria não fizemos restrições no número de controles usados, isto é, na dimensão do vetor u . Ocasionalmente, pode haver uma redundância entre estes controles. Podemos remover esta redundância, sem perdermos algo de importância prática nas aplicações da teoria.

2.4 Controles Redundantes

Na equação (2.1) vemos que os controles são dados pelo termo Bu , onde B é uma matriz $n \times m$ e u é um vetor m -dimensional. A solução desta equação por um dado ponto inicial é única. Deste modo, se a matriz B tem m colunas linearmente independentes, diferentes controles levam a diferentes trajetórias, isto é, $Bu = Bv$ implica que $u = v$. Se $m > n$, obviamente isto não é verdade, pois é impossível B ter m colunas linearmente independentes. Então podemos reduzir o número de controles independentes. Suponhamos que B tenha \hat{m} colunas linearmente independentes. Se $\hat{m} < n$, através de operações com as colunas, podemos encontrar uma matriz P de modo que

$$u = P\hat{u} \quad \text{e} \quad BP = \hat{B}, \quad (2.28)$$

onde \hat{B} , $n \times \hat{m}$, é a matriz formada pelas \hat{m} colunas linearmente independentes de B , e as $m - \hat{m}$ colunas restantes são nulas. Sempre podemos colocar as \hat{m} colunas linearmente independentes ocupando as \hat{m} primeiras posições. De (2.28) temos que

$$Bu = BP\hat{u} = \hat{B}\hat{u}$$

Vamos definir a matriz C , $n \times \hat{m}$, como sendo a matriz formada pelas colunas não nulas de B ; e o vetor v , m -dimensional, como sendo o vetor formado pelos primeiros \hat{m} componentes de \hat{u} . Deste modo

$$Cv = \hat{B}\hat{u} = Bu$$

e obtemos um sistema com \hat{m} controles independentes.

Exemplo 2.4.1 Verifique a redundância entre os controles do sistema

$$x' = Ax + Bu$$

com $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $u^t = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$.

Solução: Neste caso temos $m = 3$ e $n = 2$. Consideremos a matriz elementar P

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$BP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{B},$$

$$Bu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 + 3u_3 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 \end{bmatrix} = \hat{B}\hat{u}.$$

Logo,

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$

Qualquer escolha dos controles originais tal que $u_1 + 2u_2 + u_3 = v$ não afeta a trajetória. Assim o sistema original possui uma dupla redundância.

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo de Controlabilidade provamos vários resultados sobre o conjunto controlável e para facilitar o entendimento procuramos fazer diversas ilustrações e exemplos. Foram discutidas também as condições sobre a total controlabilidade do sistema; vimos que tais condições estão associadas ao posto da matriz de controlabilidade M e dos auto-vetores de A .

Fizemos um breve estudo também sobre o conjunto dos estados atingíveis onde vimos que de maneira semelhante ao que fizemos em controlabilidade à origem, o alvo pode ser um ponto qualquer.

E por último em controles reduntantes vimos que quando a matriz B , $n \times m$, tem m colunas linearmente independentes, diferentes controles levam à diferentes trajetórias, mas quando isto não ocorre podemos reduzir o número de controles independentes.

Capítulo 3

Estabilidade

Estudamos neste capítulo o comportamento em períodos *longos* de tempo das soluções de sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias (EDO's). O principal interesse está em determinar se uma solução (trajetória) permanece ou não limitada e, em caso afirmativo, se esta converge assintoticamente para algum ponto de equilíbrio.

Na Secção 3.1 é definido o conceito de estabilidade de um ponto de equilíbrio. Na Secção 3.2 são discutidas condições necessárias e suficientes para estabilidade de sistemas lineares autônomos. A Secção 3.3 se destina a analisar um critério algébrico (teorema de Hurwitz) para garantir estabilidade de matrizes. Na Secção 3.4 consideramos sistemas obtidos por *perturbações* de sistemas lineares estáveis. As Secções 3.5 e 3.6 tratam do critério de estabilidade formulado por Lyapunov. Na Secção 3.7 aplicamos o critério de Lyapunov a sistemas lineares discretos.

3.1 Conceito e Exemplos

Considere a equação diferencial ordinária

$$z' = f(z), \tag{3.1}$$

em que o campo vetorial f satisfaz as seguintes condições:

- $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto; (3.2)

- $\theta \in D$, $f(\theta) = \theta$; (3.3)

- f é continuamente diferenciável em D . (3.4)

Como o sistema é autônomo, i.e. o campo vetorial f não depende explicitamente do tempo, podemos sem perda de generalidade estudar as soluções a partir do instante de tempo $t_0 = 0$. A hipótese (3.4) garante, para toda condição inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$, a existência de uma solução local para o problema de valor inicial (PVI):

$$z' = f(z), z(0) = z_0. \tag{3.5}$$

Essa solução pode ser prolongada a um *intervalo máximo de existência*, o qual é aqui representado por¹

$$J(z_0) = [0, \omega(z_0)).$$

¹Estamos interessados apenas no futuro.

Nesse intervalo a solução é unicamente determinada. Este resultado é consequência do teorema de Picard–Lindelöf.² A chave para esse resultado é considerar a equação integral associada ao PVI (3.5)

$$z(t) = z_0 + \int_0^t f(z(s)) ds, \quad t \in [0, \tau],$$

no espaço $C([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$, onde $\tau > 0$ é escolhido de forma adequada. Representamos esta *solução maximal* por $z(\cdot, z_0)$.

A condição (3.3) garante que θ é um *ponto de equilíbrio* do sistema, pois o PVI com condição inicial $z_0 = \theta$ possui apenas a solução $z(\cdot, z_0) \equiv \theta$ (repouso). Note que a escolha de θ como ponto de equilíbrio não é restritiva, uma vez que é sempre possível (através de translações) alterar um campo vetorial de forma a atingir esta configuração, desde que o campo possua apenas um zero.³

Definição 3.1.1 O ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ do sistema (3.1) é denominado *estável* quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } z_0 \in B_\delta(\bar{z}) \implies J(z_0) = [0, \infty) \text{ e } z(t, z_0) \in B_\varepsilon \forall t \geq 0;$$

é denominado *atrativo* quando:

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } z_0 \in B_\delta(\bar{z}) \implies J(z_0) = [0, \infty) \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, z_0) = \theta;$$

é denominado *assintoticamente estável* quando é simultaneamente estável e atrativo. □ □ □

Exemplo 3.1.2 Considere o problema do pêndulo não linear modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

O sistema correspondente é:

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z) := \begin{pmatrix} z_2 \\ -\sin z_1 \end{pmatrix},$$

cujo campo vetorial é mostrado na Figura 3.1.

É de simples verificação o fato dos pontos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \pm k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

serem pontos de equilíbrio do sistema. Através de uma translação, o ponto de equilíbrio $(\pi, 0)$ pode ser levado na origem e então analisado no sentido da Definição 3.1.1. É intuitivamente claro que os pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ são de natureza diferente. Sem entrar em detalhes, comentamos por hora que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável, enquanto que $(\pi, 0)$ não o é. □ □ □

Exemplo 3.1.3 Consideremos agora o conhecido sistema não linear de Lorenz:

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z) = \begin{pmatrix} s(z_2 - z_1) \\ rz_1 - z_2 - z_1z_3 \\ z_1z_2 - bz_3 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

²Maiores detalhes na literatura especializada em EDO; por exemplo [Sot] ou [Wa2].

³Na definição a seguir e no resto do texto adotamos a seguinte notação: Para $r \geq 0$, temos

$$B_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| < r\}, \quad \bar{B}_r(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| \leq r\}, \quad B_r = B_r(\theta), \quad \bar{B}_r = \bar{B}_r(\theta).$$

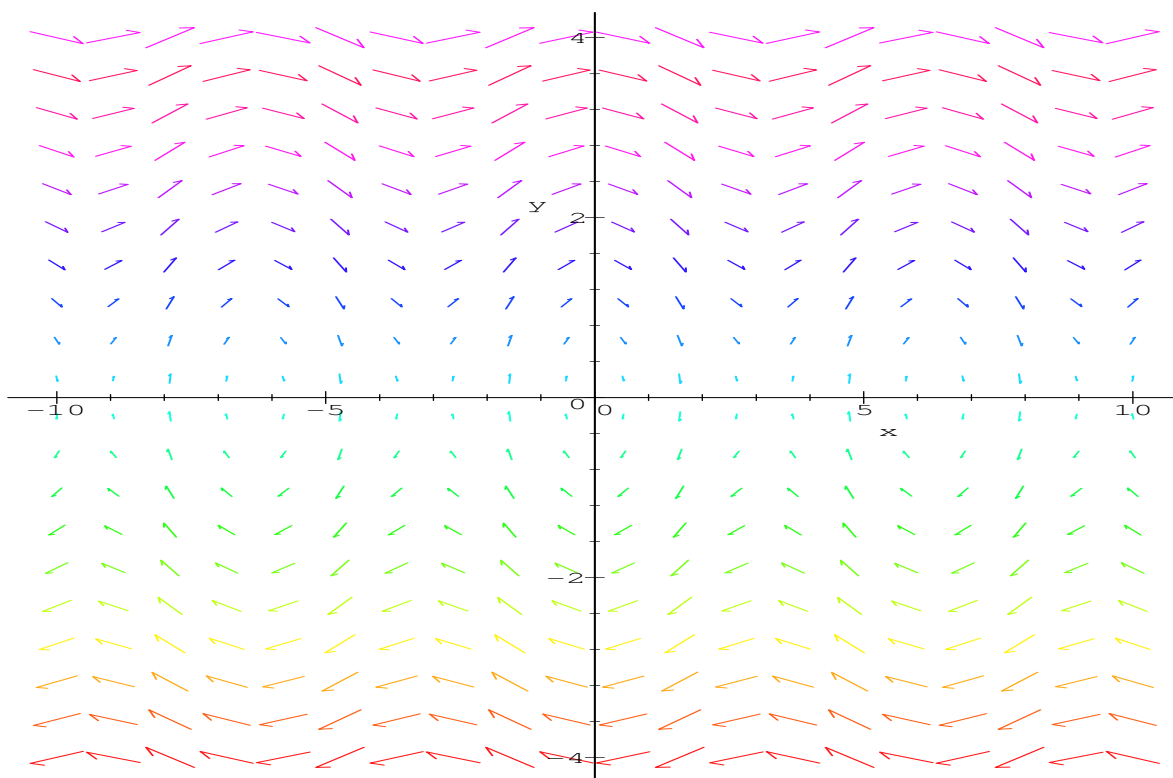


Figura 3.1: Campo vetorial de $x'' + \sin x = 0$

onde s , r e b são constantes positivas. Este sistema foi utilizado por Lorenz como modelo de dimensão finita para um fenômeno físico (a convecção de Rayleigh–Bénard).

Em particular, a escolha dos parâmetros $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ gera um atrator estranho, que foi observado numericamente e tem sido objeto intensivo de estudo de vários grupos de pesquisadores.⁴ Para $r > 1$, o sistema possui três pontos de equilíbrio:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

A estabilidade destes 3 pontos de equilíbrio pode ser analisada quando conhecemos um pouco melhor a aproximação linear do campo vetorial. É possível assim, verificar de forma clara a natureza instável do sistema. □ □ □

Observação 3.1.4 É importante observar que a atratividade não implica, em geral, na estabilidade assintótica. Um exemplo é encontrado no sistema não linear

$$\begin{cases} x' = (x^2(y-x) + y^5) / (x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2) \\ y' = y^2(y-2x) / (x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2) \end{cases}$$

cujas dinâmicas são ilustradas na Figura 3.2. Entretanto, para sistemas autônomos, as definições de atratividade e estabilidade assintótica são equivalentes. Tal fato é analisado na próxima seção. Sistemas estáveis mas não atrativos são mais fáceis de ser encontrados. Considere, por exemplo,

⁴Maiores detalhes por exemplo em [Je].

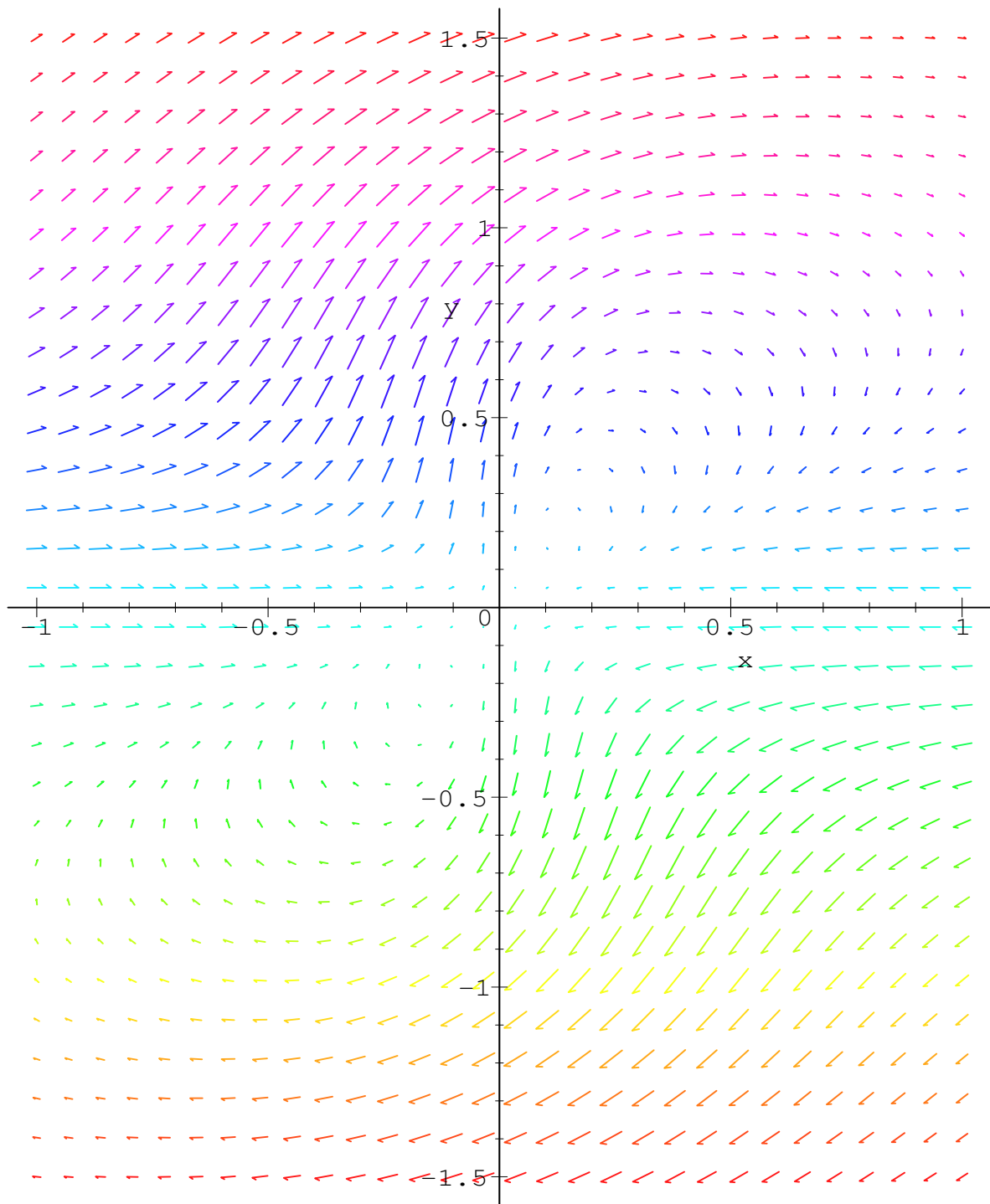


Figura 3.2: A origem é um ponto de equilíbrio atrativo, porém não é estável

$f(z) = Az$, onde A corresponde à matriz de rotação pelo ângulo de $\pi/2$. □ □ □

3.2 Estabilidade de Sistemas Lineares

Analisamos nesta secção o importante caso particular do sistema (3.1) em que a dinâmica do sistema é descrita pela equação

$$z' = Az, \tag{3.7}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. O objetivo principal é esclarecer a questão da estabilidade do ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$. Neste caso é usual referir-mo-nos ao sistema (3.7) como sistema estável.

Teorema 3.2.1 *Seja o sistema (3.7). São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) O ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável;
- b) O ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é atrativo;
- c) $\max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\} < 0$.

Demonstração: a) \implies b) Segue imediatamente da Definição 3.1.1.

b) \implies c) Suponha que A possui um autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\alpha \geq 0$. Se v é um autovetor correspondente, definimos através de

$$z(s) := \operatorname{Re}(e^{\lambda s}v), \quad s \geq 0$$

uma solução que claramente não satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \theta$.

c) \implies a) Temos que

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

com constantes $c \geq 0$ e $\omega > 0$. Observando que a solução do sistema é $z(t, z_0) = e^{At}z_0$, concluímos que $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável. ■

Observação 3.2.2 Se o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável, podemos concluir do Teorema 3.2.1 que todas as soluções de (3.7) convergem exponencialmente para θ quando $t \rightarrow \infty$. Esta propriedade é denominada *estabilidade exponencial*. Fica claro, portanto, que os conceitos de estabilidade assintótica e exponencial são equivalentes no caso dos sistemas lineares autônomos.

□ □ □

Observação 3.2.3 Caso o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ do sistema (3.7) seja assintoticamente estável, então o sistema

$$z' = Az + b(t), \quad t \geq 0, \tag{3.8}$$

é *BIBO-estável* (*Bounded-Input Bounded-Output*). Isto é, se $b \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$, então toda solução de (3.8) está também em $L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^n)$. Este fato segue imediatamente da representação da solução para o problema não homogêneo. Tal propriedade é entretanto perdida quando o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é somente estável (veja o próximo exemplo). □ □ □

Exemplo 3.2.4 Considere o oscilador harmônico modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + a^2 x = b(t)$$

e o respectivo sistema

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Note que $\bar{z} = \theta$ é um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Como uma matriz fundamental para esse sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} \sin at & \cos at \\ a \cos at & -a \sin at \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

podemos concluir que o ponto de equilíbrio é estável.

Considere agora como inhomogeneidade (entrada) a função limitada $b(t) := \cos \omega t$. A solução correspondente é dada por

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2\omega} \sin \omega t & , \text{ para } \omega = a \\ \frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos at) & , \text{ para } \omega \neq a \end{cases}$$

A interpretação da solução obtida é a seguinte:

— Para $\omega \neq a$, a solução é formada pela composição de duas vibrações com frequências respectivamente $a/2\pi$ (frequência da energia do sistema) e $\omega/2\pi$ (frequência da força externa).

— No caso $a = \omega$, observamos o fenômeno de ressonância: com o tempo o sistema ganha cada vez mais energia e a solução se torna ilimitada. Na prática, o sistema acaba sendo destruído, devido à sobrecarga de energia acumulada. □ □ □

Observação 3.2.5 Suponha que no sistema (3.7) tenhamos $\max\{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A \} = 0$. Nesse caso o ponto $\bar{z} = \theta$ será estável exatamente quando todos os blocos de Jordan relativos aos autovalores λ com $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ tiverem forma diagonal (por quê?). □ □ □

Definição 3.2.6 Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ que satisfaz

$$\max\{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } M \} < 0.$$

é denominada *matriz estável*. □ □ □

3.3 Critério de Routh–Hurwitz

Como sabemos, os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ do sistema (3.7) são as raízes do polinômio característico de A (aqui denominado p_A). Suponha que p_A é da forma

$$p_A(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}.$$

Pela Definição 3.2.6 a matriz A é estável quando todas as raízes de p_a estiverem no semi-plano esquerdo do plano complexo. Discutimos nesta seção uma condição necessária (critério de Routh–Hurwitz) para a estabilidade de uma matriz.

Lema 3.3.1 Se A é uma matriz estável, então todos os coeficientes a_1, \dots, a_n de p_A são positivos.

Demonstração: Denotando por λ_k os autovalores reais de A e por λ_j os autovalores com parte imaginária não nula, temos que

$$p_A(r) = \prod_k (r - \lambda_k) \prod_j (r^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_j)r + |\lambda_j|^2).$$

A hipótese da estabilidade de A implica em

$$-\lambda_k > 0, \quad -2\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0.$$

Provando assim que os coeficientes de p_A são positivos. ■

Uma desvantagem óbvia da aplicação deste critério é a necessidade do conhecimento do polinômio característico p_A . O exemplo a seguir mostra que o critério não é suficiente para garantir a estabilidade de A .

Exemplo 3.3.2 Considere a equação diferencial

$$x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} + x = 0.$$

O polinômio característico do sistema correspondente é

$$p(r) = r^3 + r^2 + r + 1$$

e possui raízes $-1, \pm i$. Portanto, o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ do sistema correspondente é estável, mas não é assintoticamente estável. □ □ □

Observação 3.3.3 No caso dos polinômios de grau menor ou igual a 4, é possível encontrar condições suficientes para garantir a estabilidade da matriz A a partir da aplicação do teorema fundamental da álgebra (veja [Gon]). De fato, os polinômios

- i)* $r + a$
- ii)* $r^2 + ar + b$
- iii)* $r^3 + ar^2 + br + c$
- iv)* $r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d$

com coeficientes reais possuem apenas raízes com parte real negativa se e somente se as seguintes condições são respectivamente satisfeitas:

- i*)* $a > 0$
- ii*)* $a > 0, b > 0$
- iii*)* $a > 0, b > 0, c > 0$ e $ab > c$
- iv*)* $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ e $abc > c^2 + a^2d$.

□ □ □

Exemplo 3.3.4 Considere um circuito com um resistor (de resistência R), dois indutores (cada um com indutância L) e um capacitor (de capacitância C), onde as constantes R, L e C são positivas. O problema é modelado pela equação diferencial escalar

$$L^2Cx^{(3)} + RLCx^{(2)} + 2Lx^{(1)} + Rx = 0.$$

A função x representa a diferença de potencial (DDP). Da Observação 3.3.3 segue a estabilidade assintótica do circuito (veja ainda a Observação 3.2.2). □ □ □

O próximo passo é a obtenção de uma condição suficiente para o caso geral de (3.7). O critério apresentado a seguir foi descoberto por Routh em 1877. Seja

$$p(r) = r^n + \sum_{i=1}^n a_i r^{n-i}$$

um polinômio com coeficientes reais positivos. Defina os polinômios U e V (com coeficientes também reais positivos) de modo que

$$U(r) + iV(r) = p(ir), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Temos então:

- Grau de $U = n$ e grau de $V = n - 1$, se n for par;
- Grau de $U = n - 1$ e grau de $V = n$, se n for ímpar.

Definimos a partir de U e V os seguintes polinômios:

- $q_1 := U$, $q_2 := V$, se n é par;
 $q_1 := V$, $q_2 := U$, se n é ímpar.
- q_3, \dots, q_m são obtidos a partir do algoritmo de divisão de Euclides aplicado ao par q_1, q_2 . Temos assim:⁵

$$q_{k-1} = \kappa_k q_k - q_{k+1}, \quad k = 2, \dots, m-1 \quad \text{e} \quad q_{m-1} = \kappa_m q_m.$$

Após esta construção estamos prontos para enunciar o teorema de Routh.

Teorema 3.3.5 *Sejam U, V, q_1, \dots, q_m definidos como acima. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) *O polinômio p possui apenas raízes λ com $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$;*
- b) *$m = n + 1$ e os sinais dos coeficientes de maior grau de q_1, \dots, q_{n+1} alternam.*

A demonstração deste resultado foge aos nossos objetivos e não é apresentada. O leitor interessado pode encontrar em [Gan] uma demonstração baseada em um teorema de resíduos da análise complexa.

3.4 Perturbação de Sistemas Lineares

Consideramos nesta seção sistemas da forma

$$z' = Az + g(z), \tag{3.9}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supomos ainda que as hipóteses em (3.3) e (3.4) sejam satisfeitas pela função

$$f(z) := Az + g(z), \quad z \in D := \mathbb{R}^n.$$

O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (3.9).

Teorema 3.4.1 *Seja A uma matriz estável e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação satisfazendo $\lim_{|z| \rightarrow 0} |g(z)|/|z| = 0$. Então o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ do sistema (3.9) é assintoticamente estável.*

Demonstração: Das hipóteses temos que

$$\exists c \geq 0, \beta > 0 \quad \text{tq} \quad (\|e^{At}\| \leq ce^{-2\beta t}), \quad \forall t \geq 0,$$

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tq} \quad (|g(y)| \leq c^{-1}\beta|y|), \quad \forall y \in B_\delta.$$

⁵Note que q_m é (a menos de uma constante) o maior divisor comum de q_1, q_2 .

Seja $z : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução local do sistema

$$z' = A z + g(z).$$

(A existência desta solução é garantida pela hipótese (3.4).) Temos então

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{At} z(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(z(s)) ds, \\ |z(t)| &\leq \|e^{At}\| |z(0)| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| |g(z(s))| ds \\ &\leq c e^{-2\beta t} |z(0)| + \beta \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} |z(s)| ds, \quad t \in [0, T). \end{aligned}$$

Definindo $w(t) := e^{2\beta t} |z(t)|$ para $t \in [0, T)$, obtemos a estimativa

$$w(t) \leq c |z(0)| + \beta \int_0^t w(s) ds, \quad t \in [0, T).$$

Temos agora como resultado do lema de Gronwall que

$$w(t) \leq c |z(0)| e^{\beta t}, \quad t \in [0, T),$$

de onde segue

$$|z(t)| \leq c |z(0)| e^{-\beta t}, \quad t \in [0, T). \quad (3.10)$$

Podemos então concluir que a solução local z pode ser prolongada ao intervalo $[0, \infty)$. Logo, a estimativa (3.10) vale para $T = \infty$ e o teorema fica provado. ■

Observação 3.4.2 A importância do Teorema 3.4.1 é a forma pela qual ele pode ser aplicado na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas de controle em (3.9):

- Expanda o campo vetorial f no ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$. O sistema resultante é da forma (3.9), onde $A = df(\theta)$ e $g(z) = f(z) - df(\theta)g$. (A hipótese de g estar definida em todo \mathbb{R}^n não é restritiva, pois na demonstração necessitamos de g somente em uma vizinhança de $\bar{z} = \theta$.)
- Verifique se $A = df(\theta)$ é uma matriz estável.
- A hipótese $\lim_{|z| \rightarrow 0} |g(z)|/|z| = 0$ é trivialmente satisfeita, pois f é suposta continuamente diferenciável.

Note, entretanto, que este método de linearização fornece apenas uma condição suficiente para a estabilidade. Tal condição é por demasiado restritiva e está longe de ser necessária (veja o Exemplo 3.5.1). □ □ □

Exemplo 3.4.3 Aplicamos o método de linearização ao oscilador não linear com amortecimento $a > 0$, que é descrito pela equação diferencial

$$\ddot{x} + 2a \dot{x} + \sin x = 0.$$

O sistema correspondente é:

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -2az_2 - \sin z_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

e a linearização do sistema no ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ nos fornece a matriz

$$A = df(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que os autovalores da matriz A são:

$$\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

A matriz A é portanto estável e o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável. O sistema (3.11) possui ainda outro ponto de equilíbrio, a saber: $\hat{z} = (\pi, 0)$. A linearização neste ponto gera a matriz

$$\hat{A} = df(\hat{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2a \end{pmatrix},$$

que possui um autovalor λ com $Re(\lambda) > 0$. O Teorema 3.4.1 não se aplica, entretanto o ponto de equilíbrio \hat{z} não é estável. Nas Figuras 3.3 e 3.4 é mostrado o campo em vizinhanças dos pontos $\bar{z} = \theta$ e $\hat{z} = (\pi, 0)$, respectivamente. $\square \square \square$

Exemplo 3.4.4 Consideremos novamente o sistema de Lorenz (veja Exemplo 3.1.3), descrito pela equação diferencial

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z) = \begin{pmatrix} s(z_2 - z_1) \\ rz_1 - z_2 - z_1z_3 \\ z_1z_2 - bz_3 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

onde s , r e b são constantes positivas. É fácil verificar que, para $r > 1$, existem três pontos de equilíbrio:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}.$$

Linearizando o sistema nestes pontos, obtemos respectivamente as matrizes:

$$\bar{A} = df(\bar{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = df(\hat{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix},$$

e

$$\tilde{A} = df(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Para o ponto de equilíbrio \bar{z} obtemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (s+1)\lambda - s(r-1)),$$

o qual possui duas raízes negativas e uma positiva. Portanto, a estabilidade numa vizinhança de \bar{z} é improvável.

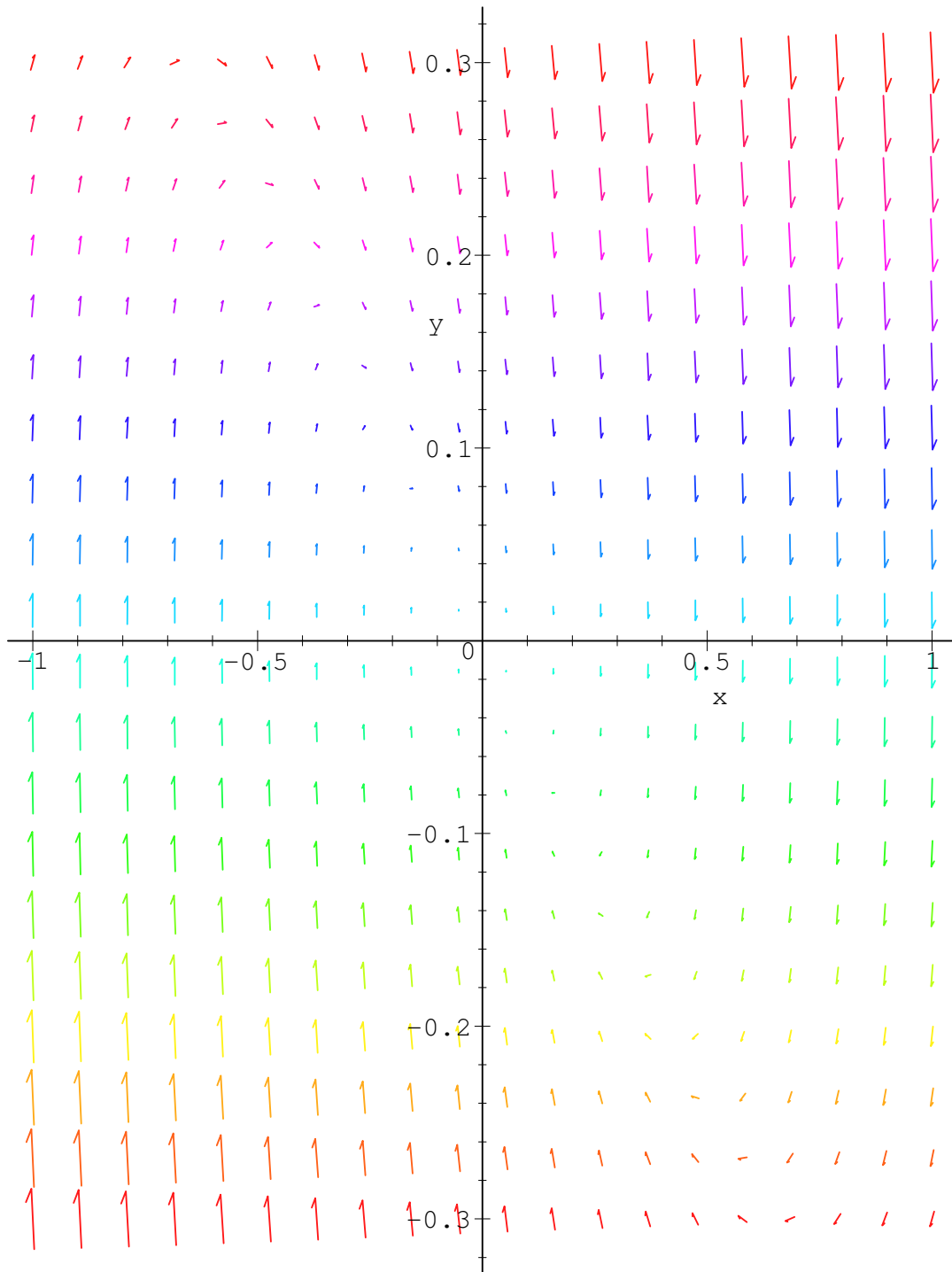


Figura 3.3: Campo vetorial de $x'' + 2ax' + \sin x = 0$ (para $a = 1$) em uma vizinhança do ponto $\bar{z} = \theta$.

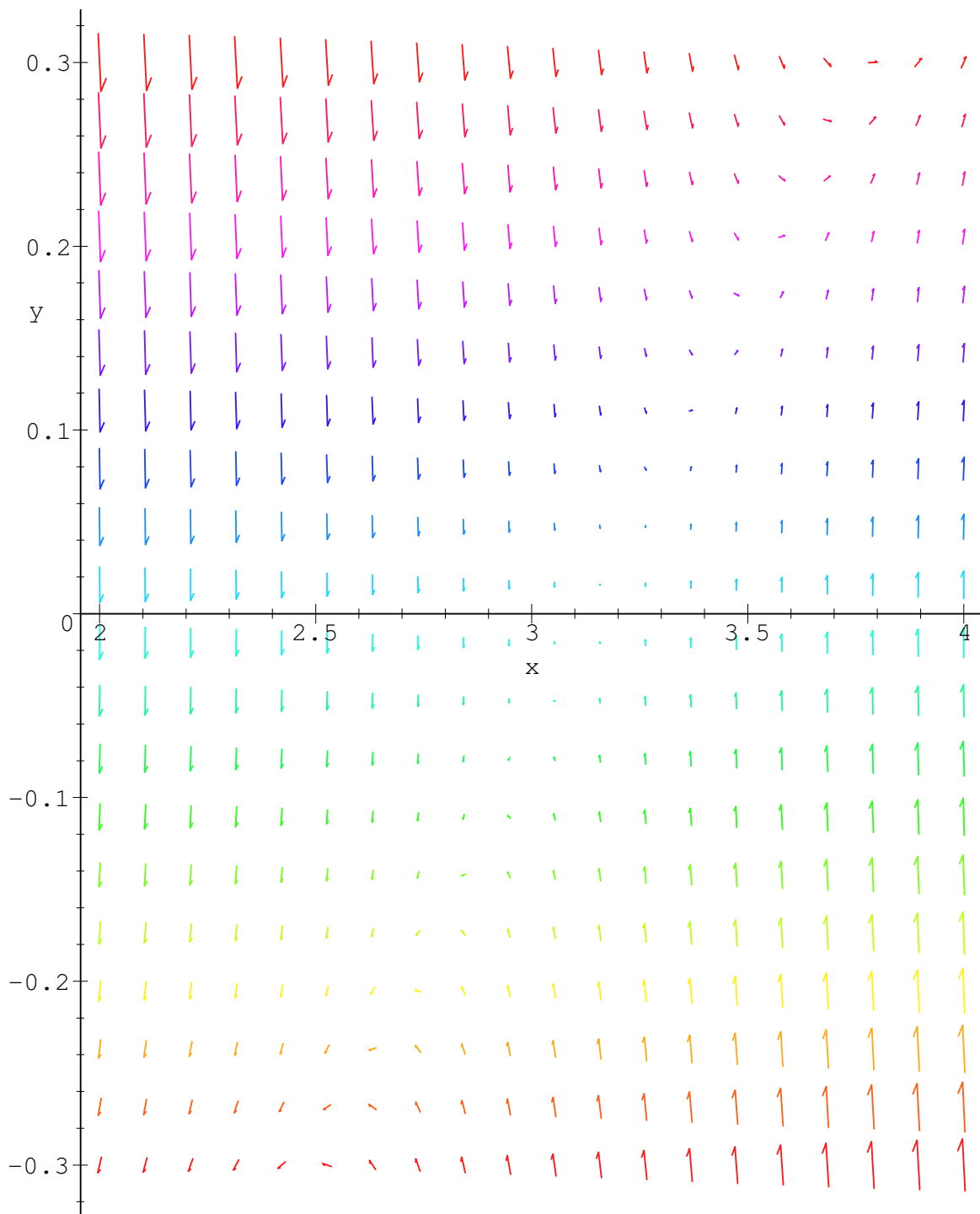


Figura 3.4: Campo vetorial de $x'' + 2ax' + \sin x = 0$ (para $a = 1$) em uma vizinhança do ponto $\hat{z} = (\pi, 0)$.

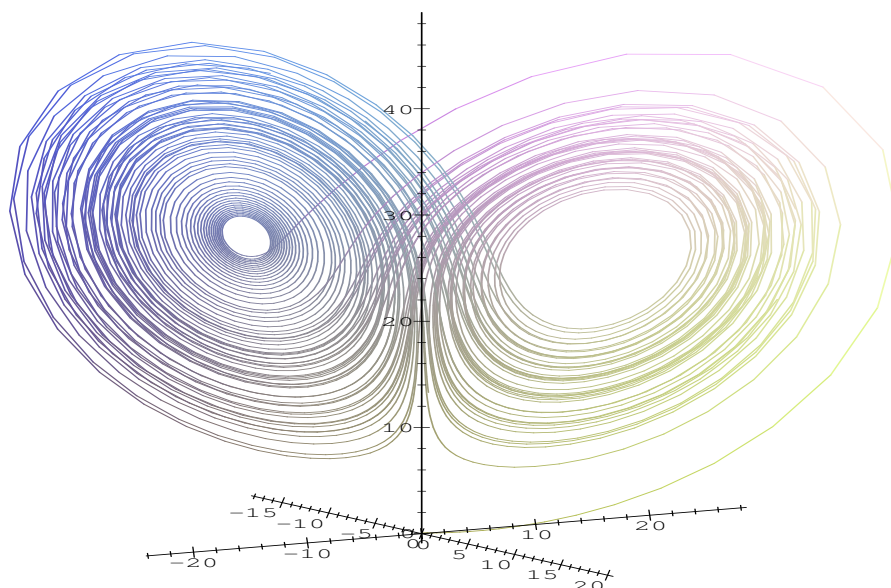


Figura 3.5: Órbita do atrator de Lorenz (3.12) para os parâmetros $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$; condição inicial: $z(0) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

Os pontos de equilíbrio \hat{z} e \tilde{z} estão associados ao mesmo polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (s + 1 + b)\lambda^2 + b(s + r)\lambda + 2bs(r - 1).$$

O critério de Routh–Hurwitz é aplicável quando⁶

$$(s + 1 + b)b(s + r) - 2bs(r - 1) > 0$$

Este é o caso se

$$s > b + 1, \quad r < r_c := s \frac{s + 3 + b}{s - b - 1},$$

quando então podemos concluir que os pontos de equilíbrio \hat{z} e \tilde{z} são assintoticamente estáveis. Para os valores especiais $s = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, temos $r > r_c \approx 24.74$ e os três pontos de equilíbrio não mais são estáveis. Entretanto, os polinômios característicos de \hat{z} e \tilde{z} ainda possuem uma raiz negativa, fato que contribui para o comportamento ímpar das órbitas do sistema (veja Figura 3.5).

□ □ □

3.5 Método de Lyapunov

Um método eficiente de se verificar a estabilidade é o desenvolvido por *A.M. Lyapunov (1893)*. O método trata de sistemas não lineares da forma (3.1) e se baseia na análise de autovalores. Analisamos a seguir um exemplo que serve de motivação para o método apresentado nesta secção.

⁶Veja Observação 3.3.3.

Exemplo 3.5.1 Considere o sistema

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -3z_2 - z_1^5 \\ -2z_2 + z_1^5 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Os autovalores da matriz $A = df(\theta)$ são 0 e -2 . Logo, A não é uma matriz estável e a questão da estabilidade do ponto de equilíbrio θ permanece em aberto.

Defina $V(z_1, z_2) := z_1^6 + 9z_2^2$ e seja $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ uma solução do sistema (3.13). Temos então

$$\frac{d}{dt}V(z_1(t), z_2(t)) = -6z_1(t)^{10} - 36z_2(t)^2 \leq 0,$$

de onde segue

$$0 \leq V(z_1(t), z_2(t)) = V(z_1(0), z_2(0)) - \int_0^t (6z_1(s)^{10} + 36z_2(s)^2) ds, \quad t \geq 0.$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio θ é agora uma consequência direta desta desigualdade. Além disto, temos ainda que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \theta$. De fato, como a função $t \mapsto V(z_1(t), z_2(t))$ é monótona não crescente, existe o limite $a := \lim_{t \rightarrow \infty} V(z_1(t), z_2(t))$.

Como $V(z_1, z_2) = 0$ se e somente se $(z_1, z_2) = \theta$, basta verificar que $a = 0$. Suponha por contradição que $a > 0$. Temos então que

$$0 < a \leq V(z_1(t), z_2(t)) \leq V(z_1(0), z_2(0)), \quad t \geq 0.$$

Defina $m := \inf\{6z_1^{10} + 36z_2^2 \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; a \leq V(z_1, z_2) \leq V(z_1(0), z_2(0))\}$. Como V é contínua, temos que $m > 0$. Para $t \geq 0$ temos agora

$$0 \leq V(z_1(t), z_2(t)) \leq V(z_1(0), z_2(0)) - m \int_0^t dt = V(z_1(0), z_2(0)) - mt.$$

Como o lado direito da última expressão se torna negativo para t suficientemente grande, chegamos à desejada contradição. □ □ □

Definição 3.5.2 Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é uma vizinhança qualquer de $\bar{z} = \theta$, é denominada *função de Lyapunov* para o sistema $z' = f(z)$ quando satisfaz:

- i) V é contínua em U e continuamente diferenciável em $U \setminus \{\theta\}$;
- ii) $V(\theta) = 0$, $V(x) > 0$ para todo $x \in U$, $x \neq \theta$;
- iii) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in U \setminus \{\theta\}$.

V é denominada *função de Lyapunov estrita* quando, ao invés da condição iii), satisfizer:

- iii*) $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$ para todo $x \in U \setminus \{\theta\}$.

□ □ □

Teorema 3.5.3 Seja U uma vizinhança qualquer de $\bar{z} = \theta$ e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para o sistema $z' = f(z)$. São verdadeiras as afirmativas:

- a) $\bar{z} = \theta$ é um ponto de equilíbrio estável ;
- b) $\bar{z} = \theta$ é um ponto de equilíbrio atrativo se e somente se existe vizinhança W de θ de modo que a solução estacionária seja a única solução $z : [0, \infty) \rightarrow U$ de $z' = f(z)$ com $z(0) \in W$ e $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$.

Demonstração: Provamos primeiro o item a). Seja $r > 0$ tal que $B_{2r} \subset U$. Defina $\beta :=$

$\min\{V(x) \mid |x| = r\}$ e $U_\beta := \{x \in U \mid V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r \subset B_r$. Então $\beta > 0$ e a continuidade de V implica que $U_\beta \neq \emptyset$ e que U_β é uma vizinhança de θ . Seja z uma solução de

$$z' = f(z), \quad z(0) = z_0 \in U_\beta.$$

Temos então $V(z(0)) < \beta$ e

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) = \langle \nabla V(z(t)), z'(t) \rangle = \langle \nabla V(z(t)), f(z) \rangle \leq 0, \quad t \in [0, \omega(z_0)], \quad (3.14)$$

onde $\omega(z_0)$ é o maior real que satisfaz $z(t) \in \bar{B}_r, \forall t \in [0, \omega(z_0)]$. Se existisse $t_1 \in (0, \omega(z_0))$ tal que $|z(t_1)| = r$, teríamos

$$V(z(0)) < \beta \leq V(z(t_1))$$

pela definição de β e

$$V(z(t_1)) \leq V(z(0))$$

como conseqüência de (3.14), nos levando a uma contradição. Portanto, temos necessariamente $z(t) \in B_r$, para todo $t \in [0, \omega(z_0)]$. Isto porém contradiz a maximalidade do intervalo $[0, \omega(z_0)]$, provando assim que $\omega(z_0) = \infty$ e $z(t) \in B_r$ para todo $t \in [0, \infty)$. Fica assim provado que $\bar{z} = \theta$ é um ponto de equilíbrio estável.

Provamos agora b). Defina inicialmente $W := U_\beta$.

(\implies) Como \bar{z} é atrativo, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z_0 \in B_\delta$, a solução correspondente $z(\cdot, z_0)$ converge para \bar{z} quando $t \rightarrow \infty$. Caso $W \not\subseteq B_\delta$, redefina $W := U_\beta \cap B_\delta$. Seja $z : [0, \infty) \rightarrow U$ uma solução de $z' = f(z); z(0) = z_0 \in W$ satisfazendo $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0, t \in [0, \infty)$. Temos então

$$V(z(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(z(t)) = V(\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)) = V(\theta) = 0.$$

Logo, $z(0) = \theta$ e de $V(z(t)) = V(z(0)), \forall t$, concluímos que $z(t) = \theta, t \in [0, \infty)$.

(\impliedby) Seja z uma solução de $z' = f(z)$ com $z(0) \in W$. Do item a) temos que $z : [0, \infty) \rightarrow B_r$. Logo, para toda seqüência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim_n t_n = \infty$, a seqüência $(z(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente. Para provar que θ é um ponto de equilíbrio atrativo, basta verificarmos que o limite $\lim_n z(t_n)$ é sempre θ . Suponhamos por contradição que existe uma seqüência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\lim t_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} z(t_n) = \hat{z} \neq \theta$. Se $|\hat{z}| = r$ chegaríamos (como em a)) à contradição: $V(z(0)) < \beta \leq V(\hat{z})$ e $V(\hat{z}) \leq V(z(0))$. Logo $\hat{z} \in B_r$. Note ainda que a hipótese $V(\hat{z}) = \beta$ implica na mesma contradição acima. Logo $V(\hat{z}) < \beta$ e portanto $\hat{z} \in U_\beta = \{x \in U \mid V(x) < \beta\} \cap \bar{B}_r$.

Considere agora a solução \tilde{z} do sistema

$$\tilde{z}' = f(\tilde{z}), \quad \tilde{z}(0) = \hat{z}.$$

Do item a) temos que

$$\tilde{z} : [0, \infty) \rightarrow B_r,$$

Como $\hat{z} \neq \theta$ e $V(\tilde{z}(t))$ é monótona não crescente, então $V(\tilde{z}(t)) \leq V(\tilde{z}(0)) = V(\hat{z}), \forall t$. Caso a igualdade sempre se verificasse, a hipótese em b) implicaria em $\tilde{z}(t) \equiv \theta$ e $\hat{z} = \theta$. Portanto, existe um $\tau > 0$ com $V(\tilde{z}(\tau)) < V(\hat{z})$.

A equação diferencial é autônoma, logo as funções $z_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por $z_n(t) := z(t_n + t)$ são soluções respectivamente de $z'_n = f(z_n), z_n(0) = z(t_n)$. Como $\lim_n z(t_n) = \hat{z}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n(t) - \tilde{z}(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z(t_n + t) - \tilde{z}(t)| = 0, \quad t \in [0, \tau].$$

Isto é, $\lim_n z_n(t) = \tilde{z}(t), t \in [0, \tau]$. Temos, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(z(t_n + \tau)) = V(\tilde{z}(\tau)) < V(\hat{z}).$$

Isto porém é um absurdo, pois sendo $V(z(t))$ monótona não crescente, é possível encontrar, para todo $n \in \mathbb{N}$, um $m \in \mathbb{N}$ tal que $V(z(t_n + \tau)) \geq V(z(t_m)) \geq V(\hat{z}) = \lim_n V(z(t_n))$. ■

Corolário 3.5.4 (Lyapunov) *Seja V uma função de Lyapunov estrita em U , uma vizinhança de θ , para o sistema $z' = f(z)$. Então, o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável.*

Demonstração: O Teorema 3.5.3 a) garante estabilidade de \bar{z} em alguma vizinhança $B_r \subset U$. Note agora que, para toda solução de $z' = f(z)$ que permanece em B_r para $t \geq 0$, a aplicação $t \mapsto V(z(t))$ é monótona estritamente decrescente. Portanto, a única dentre essas soluções que satisfaz $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0$, $t \geq 0$ é a solução estacionária $z(t) \equiv \theta$. Do Teorema 3.5.3 b) segue que \bar{z} é atrativo. ■

Exemplo 3.5.5 Considere novamente o sistema não linear

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} -3z_2 - z_1^5 \\ -2z_2 + z_1^5 \end{pmatrix}.$$

No Exemplo 3.5.1 introduzimos a função de Lyapunov estrita

$$V(z_1, z_2) := z_1^6 + 9z_2^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

a fim de analisar este sistema. Podemos agora concluir diretamente do Corolário 3.5.4 que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável. □ □ □

Exemplo 3.5.6 Considere a equação diferencial para o circuito elétrico RLC:

$$CL\ddot{x} + RC\dot{x} + x = 0,$$

cujo sistema associado é

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -[LC]^{-1} & -RL^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

onde R , L e C são constantes positivas. Uma função de Lyapunov para este sistema é

$$V(z_1, z_2) := Lz_2^2 + C^{-1}z_1^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de onde calculamos

$$\langle \nabla V(z_1, z_2), f(z_1, z_2) \rangle = -2Rz_2^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, V não é uma função de Lyapunov estrita e o Teorema 3.5.3 a) garante que $\bar{z} = \theta$ é estável. Note porém que a condição $-2Rz_2(t)^2 = 0$, para todo $t \geq 0$, implica em $z_2(t) = z_2'(t) = 0$, $t \geq 0$. Da equação diferencial temos então $z_1(t) = 0$, $t \geq 0$. Assim sendo, o Teorema 3.5.3 b) garante que $\bar{z} = \theta$ é também atrativo e, portanto, assintoticamente estável. □ □ □

Exemplo 3.5.7 Considere agora o sistema

$$z' = f(z) \quad \text{com} \quad f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Uma função de Lyapunov é dada por $V(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$. O Teorema 3.5.3 garante que $\bar{z} = \theta$ é um ponto de equilíbrio estável mas não atrativo (verifique!). □ □ □

3.6 Equação Matricial de Lyapunov

Iniciamos esta secção recordando alguns importantes conceitos da álgebra linear, relacionados com os autovalores de uma matriz.

Definição 3.6.1 Uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ é denominada

Positiva definida quando $\langle x, Mx \rangle > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$;

Positiva semi-definida quando $\langle x, Mx \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Negativa definida quando $-M$ é positiva definida. □ □ □

No lema a seguir apresentamos a solução de uma equação matricial que é fundamental para a formulação do critério de Lyapunov.

Lema 3.6.2 *Sejam $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, $V \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $W \in \mathbb{R}^{n,m}$. Se U e V são matrizes estáveis, então a solução única da equação matricial*

$$UX + XV + W = \Theta \quad (X \in \mathbb{R}^{n,m})$$

é a matriz estável X definida por

$$X := \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt.$$

Demonstração: Da hipótese, temos que existem constantes $c \geq 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\|e^{tU}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad \|e^{tV}\| \leq ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Note que para $T > 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TV} - W &= \int_0^T \frac{d}{dt}(e^{tU} W e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W V e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V) dt. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$, temos que

$$X = \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt$$

é solução da equação matricial $-W = UX + XV$, ficando assim provada a existência de soluções. Para provar unicidade, suponha que X_1, X_2 são ambas soluções de $UX + XV + W = \theta$ e defina $\hat{X} := X_1 - X_2$. Logo, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n,m}$ é solução de

$$U\hat{X} + \hat{X}V = \Theta.$$

Temos então

$$\frac{d}{dt}(e^{tU} \hat{X} e^{tV}) = e^{tU}(U\hat{X} + \hat{X}V)e^{tV} = \Theta$$

e portanto,

$$e^{tU} \hat{X} e^{tV} = e^{0U} \hat{X} e^{0V} = \hat{X}.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$, obtemos $\hat{X} = \Theta$. ■

No teorema a seguir é apresentada uma equação matricial, que fornece uma forma equivalente de definir a estabilidade de uma matriz.

Teorema 3.6.3 *Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a) A é uma matriz estável;
- b) Existe uma matriz positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que

$$A^*P + PA = -I. \quad (3.15)$$

Demonstração: Se a matriz A é estável, a existência de P segue do Lema 3.6.2 com $U = A^*$, $V = A$ e $X = P$. Reciprocamente, se P satisfaz a equação (3.15), defina

$$V(x) := \langle x, Px \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, a função diferenciável V satisfaz $V(0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \neq \theta$ e ainda

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^*x, Ax \rangle \\ &= \langle A^*Px, x \rangle + \langle x, PAx \rangle \\ &= \langle (A^*P + PA)x, x \rangle \\ &= -\langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Isto é, V é uma função de Lyapunov estrita. O Corolário 3.5.4 implica que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável. O Teorema 3.2.1 garante por fim que os autovalores de A possuem parte real estritamente negativa. ■

Observação 3.6.4 No Teorema 3.6.3, a equação (3.15) pode ser substituída pela exigência de $A^*P + PA$ ser negativa definida. □ □ □

Teorema 3.6.5 *Sejam $A, X, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $C \in \mathbb{R}^{l,n}$ matrizes satisfazendo*

- $A^*X + XA = -W$;
- $W - C^*C$ é positiva semi-definida;
- (A, C) é observável.

Então a matriz A é estável sse X for positiva definida.

Demonstração: (\implies) Seja A uma matriz estável. Do Lema 3.6.2 temos que $X = \int_0^\infty e^{tA^*} W e^{tA} dt$. Logo, para $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} \langle x, Xx \rangle &= \int_0^\infty \langle e^{tA} x, W e^{tA} x \rangle dt \\ &\geq \int_0^\infty \langle e^{tA} x, C^* C e^{tA} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty |C e^{tA} x|^2 dt. \end{aligned}$$

Como (A, C) é observável, concluímos que $C e^{tA} x = \theta$, $\forall t \geq 0$ sse $x = \theta$.

(\impliedby) Suponha X positiva definida. Defina como na demonstração do Teorema 3.6.3 a função

$$V(x) := \langle x, Xx \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $W - C^*C$ é positiva semi-definida, então W também o é. Logo, V é uma função de Lyapunov, pois $\langle \nabla V(z(t)), Az(t) \rangle = -\langle z, Wz \rangle$ (veja Observação 3.6.4). Seja agora z uma solução de $z' = Az$ com $\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0, t \geq 0$. Temos então

$$0 = \frac{d}{dt}V(z(t)) = -\langle z(t), Wz(t) \rangle.$$

Logo,

$$0 \leq \langle z(t), (W - C^*C)z(t) \rangle = -\langle Cz(t), Cz(t) \rangle, t \geq 0.$$

Portanto, $Cz(t) = \theta, t \geq 0$, e da observabilidade de (A, C) temos $z(0) = \theta$. O Teorema 3.5.3 b) garante que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ é assintoticamente estável e do Teorema 3.2.1 segue a estabilidade da matriz A . ■

A equação matricial (3.15) é denominada *equação matricial de Lyapunov*. Igualmente interessante na análise da estabilidade de sistemas não lineares é o critério de Popov, que fornece condições suficientes para garantir a *estabilidade absoluta* de sistemas de loop fechado. Para detalhes sobre o conceito de estabilidade absoluta e sobre o critério de Popov veja [Fö3].

3.7 Estabilidade de Sistemas Lineares Discretos

Uma análise de estabilidade semelhante à realizada na Secção 3.2 para problemas contínuos pode ser estendida para sistemas de evolução discretos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, \dots \quad (3.16)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $x_k \in \mathbb{R}^n, k \geq 0$.

Definição 3.7.1 O ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ do sistema (3.16) é denominado:

estável quando: dado $\delta > 0$, para todo $x_0 \in B_\delta$, temos $x_k \in B_\delta, k = 1, 2, \dots$

atrativo quando: para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \theta$. □ □ □

Como nos sistemas contínuos autônomos, a atratividade implica na estabilidade. A análise da estabilidade de tais sistemas é bastante simples e é esclarecida com os seguintes lemas:

Lema 3.7.2 Dado um sistema linear discreto da forma (3.16), são equivalentes as afirmações:

- a) O ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ é atrativo;
- b) O operador A considerado como elemento do espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é contrativo, i.e.

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1.$$

Demonstração: a) \implies b) Seja λ um autovalor de A e x_0 o respectivo autovetor. Logo, $x_k = A^k x_0 = \lambda^k x_0$. Da hipótese temos agora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k \|x_0\| = 0,$$

o que implica em $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, b) fica provado.

b) \implies a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos da hipótese

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \leq \|x_0\| \lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0$$

e o teorema fica provado. ■

No que se refere à verificação da estabilidade do ponto de equilíbrio de (3.16) temos o lema a seguir, que por sua semelhança com o Lema 3.7.2 é deixado para o leitor como exercício.

Lema 3.7.3 Dado o sistema linear discreto (3.16), são equivalentes as afirmações:

- a) O ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ é estável;
- b) O operador A considerado como elemento do espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é não expansivo, i.e.

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1.$$

O critério de Lyapunov também se aplica a sistemas discretos, com a finalidade de estabelecer condições suficientes para estabilidade.

Definição 3.7.4 Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada *função de Lyapunov quadrática* para o sistema $x_{k+1} = Ax_k$ quando satisfaz:

- i) V é da forma: $V(x) = \langle x, Px \rangle$, com P positiva definida;
- ii) $V(Ax) < V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$.

□ □ □

Lema 3.7.5 Seja V uma função de Lyapunov quadrática para o sistema (3.16). Então o ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ é atrativo.

Demonstração: Seja λ um autovalor de A e x o respectivo autovetor. Por hipótese temos

$$|\lambda|^2 \langle x, Px \rangle = \langle Ax, PAx \rangle < \langle x, Px \rangle,$$

provando assim que $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, o lema fica provado. ■

Do Lema 3.7.5, obtemos para sistemas discretos um resultado análogo ao Teorema 3.6.3.

Lema 3.7.6 O ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ do sistema $x_{k+1} = Ax_k$ é atrativo se e somente se existe matriz definida positiva P tal que $A^*PA - P$ é negativa definida.

Demonstração: (\implies) Como $\|A\| < 1$, é fácil verificar que $P = I$ (a matriz identidade) é tal que $A^*PA - P$ é negativa definida. (Na verdade para qualquer matriz positiva definida P a expressão acima é negativa definida.)

(\impliedby) Basta observar que $V(x) := \langle x, Px \rangle$ define uma função de Lyapunov quadrática para o sistema. ■

A equação $A^*PA - P = -I$ é denominada *equação matricial discreta de Lyapunov*.

Corolário 3.7.7 Se o ponto de equilíbrio $\bar{x} = \theta$ do sistema $x_{k+1} = Ax_k$ é atrativo, então existe uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.

Demonstração: Segue imediatamente do Lema 3.7.6. ■

Exercícios

3.1 Verifique que o ponto de equilíbrio do sistema no Exemplo 3.5.7 é estável mas não atrativo.

3.2 Considere o sistema do oscilador não linear amortecido (veja Exemplo 3.4.3)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \alpha \sin(x_1),$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são constantes.

a) Mostre que $V(x_1, x_2) := 2^{-1}x_2^2 - \alpha \cos x_1$ é uma função de Lyapunov para o sistema;

b) Verifique que todas as soluções do sistema possuem intervalo de existência $[0, \infty)$;

c) Prove que toda solução (x_1, x_2) do sistema satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (2\pi k, 0),$$

onde $k \in \mathbb{N}$ depende da condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$.

3.3 Encontre para o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_1^3x_2$$

uma função de Lyapunov da forma

$$V(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

provando assim que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3.4 Encontre para o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 - 4x_3$$

uma função de Lyapunov da forma

$$V(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3.$$

3.5 Complete os detalhes da demonstração do Lema 3.7.3.

3.6 Para sistemas não autônomos, o método de linearização não pode, via de regra, ser utilizado na análise de estabilidade. Tal fato se torna claro mesmo para sistemas lineares. Considere o sistema $z' = A(t)z$, com

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos 4t & 2 + 2 \sin 4t \\ -2 + 2 \sin 4t & -1 + 2 \cos 4t \end{pmatrix}.$$

a) Calcule os autovalores de $A(t)$;

b) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio instável;

(Dica: Observe que a equação diferencial possui uma solução da forma: $e^{\alpha t + i\beta t}$.)

3.7 O que se pode afirmar, a partir do método de linearização, sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$ do sistema no Exercício 3.4?

3.8 Considere novamente o oscilador harmônico ($\xi > 0$, $\gamma > 0$)

$$\ddot{x} + F_\xi(\dot{x}) + \gamma x = 0, \quad \text{com } F_\xi(s) := \begin{cases} -\xi, & s > 0 \\ \xi, & s < 0 \end{cases}$$

a) Faça um esboço da família de soluções no plano (x, \dot{x}) ;

b) Encontre os pontos de equilíbrio (x, \dot{x}) do sistema.

3.9 Considere o sistema ($\kappa > 0$, $b > 0$)

$$\ddot{x} = \kappa U(t), \quad \text{com } U(t) := \begin{cases} -b, & t > 0 \\ b, & t < 0 \end{cases}$$

- a) Faça um esboço da família de soluções no plano (x, \dot{x}) ;
- b) Mostre que existem soluções periódicas e calcule o período da órbita.

3.10 Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é positiva indefinida, i.e. não é nem positiva definida nem negativa definida.

3.11 Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = 3x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2.$$

- a) Mostre que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável;
- b) Prove que $V(x_1, x_2) := \frac{5}{3}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ é uma função de Lyapunov estrita;
- c) Considere a solução correspondente à condição inicial $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$. Estime o tempo $t_s > 0$ em que a solução (x_1, x_2) alcança a região $x_1^2 + x_2^2 \leq 0.02$. (Dica: Encontre $a > 0$ com $\dot{V}(x) \leq -aV(x)$.)

3.12 Prove que o polinômio $p(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 9$ possui somente raízes com parte real negativa.

3.13 Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$. Prove a equivalência das afirmações abaixo:

- a) $\max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \text{ é autovalor de } A\} < -\sigma$;
- b) Para cada matriz positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, a equação matricial

$$A^*W + XA + 2\sigma X = -W$$

possui uma única solução positiva definida X .

Capítulo 4

Estabilização

Neste capítulo utilizamos o conceito de estabilidade introduzido no Capítulo 3 e analisamos a seguinte questão: Como e quando é possível tornar estável um sistema de controle. Tal tarefa, denominada de estabilização, tem se mostrado nos últimos anos como uma das aplicações mais importantes da teoria de controle em problemas de engenharia e tecnologia. A forma clássica de realizá-la é obter a entrada (ou controle) a partir do estado ou da saída do sistema. Falamos então de realimentação de estado ou de saída. A questão da estabilização permite abordagens tanto qualitativas quanto quantitativas, ambas aqui discutidas.

Na Secção 4.1, definimos os sistemas lineares estabilizáveis e discutimos um resultado sobre estabilização de sistemas autônomos controláveis. A seguir é analisada uma condição necessária e suficiente para estabilização de sistemas autônomos. Na Secção 4.2, consideramos o problema quantitativo relacionado à estabilização. O método de colocação de pólos nos fornece uma estratégia de estabilização, na qual é possível escolher o grau de estabilidade do sistema estabilizado. Na Secção 4.3 é apresentada a estratégia de Luenberger (observador dinâmico), através da qual o estado de um sistema paralelo é utilizado para estabilizar o sistema dado. Na Secção 4.4 é discutido um método de estabilização que combina o observador dinâmico com a realimentação de saída. Na Secção 4.5 consideramos o problema de estabilizar o ponto de operação (desconhecido) de um sistema linear.

4.1 Sistemas Lineares

Em aplicações são utilizadas essencialmente estratégias de realimentação de saída e de realimentação de estado, com o objetivo de alterar a dinâmica do sistema livre (sem controle) obtendo determinadas propriedades, que podem ser:

- BIBO-estabilidade; (qualitativo)
- Estabilidade assintótica; (qualitativo)
- Aceleração do retorno ao ponto de equilíbrio. (quantitativo)

No caso dos sistemas de controle lineares autônomos, as propriedades acima estão intrinsecamente relacionadas com os autovalores da matriz do sistema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, considere o sistema de controle

$$z' = Az + Bu. \quad (4.1)$$

Supondo que o controle u é obtido a partir do estado z por uma lei linear, escrevemos

$$u = Fz,$$

onde $F \in \mathbb{R}^{m,n}$. Substituindo em (4.1), obtemos

$$z' = (A + BF)z. \quad (4.2)$$

A fim de tornar o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ assintoticamente estável, devemos escolher F de modo que $A + BF$ seja uma matriz estável (veja Definição 3.2.6).

Definição 4.1.1 O sistema de controle (A, B) é denominado *estabilizável* quando existe $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ tal que a matriz $A + BF \in \mathbb{R}^{n,n}$ é estável. $\square \square \square$

O sistema (4.1), quando escrito com o controle de malha fechada, toma a forma $(A + BF, B)$. A controlabilidade de (A, B) implica na controlabilidade de $(A + BF, B)$. Este argumento nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 4.1.2 *Seja (A, B) é um sistema autônomo controlável. Então (A, B) é estabilizável pela matriz de realimentação*

$$F := -B^*W_T^{-1},$$

onde

$$W_T := \int_0^T e^{-tA}BB^*e^{-tA^*} dt, \quad T > 0.$$

Demonstração: A idéia é utilizar o Teorema 3.6.5 com

$$(A, C) = ((A + BF)^*, B^*) \quad \text{e} \quad X = W_T.$$

Para garantir a estabilidade de $(A + BF)$ – ou equivalentemente de $(A + BF)^*$ – basta verificar que:

- (1) W_T é positiva definida;
- (2) $((A + BF)^*, B^*)$ é observável;
- (3) $W := -(A + BF)W_T - W_T(A + BF)^*$ é tal que $W - BB^*$ é positiva semi-definida.

(1) Por construção, W_T é positiva semi-definida. Logo, W_T é não singular para $T > 0$ e, portanto, W_T é positiva definida.

(2) Como (A, B) é controlável, $(-A, B)$ também o é. Dá-se a controlabilidade de $(-(A + BF), B)$. Por fim, segue a observabilidade de $((A + BF)^*, B^*)$.

(3) Observe que

$$\begin{aligned} (A + BF)W_T + W_T(A + BF)^* &= AW_T - BB^* + W_TA^* - BB^* \\ &= -\int_0^T \frac{d}{dt}(e^{-tA}BB^*e^{-tA^*}) dt - 2BB^* \\ &= -e^{-TA}BB^*e^{-TA^*} + BB^* - 2BB^* \\ &= -e^{-TA}BB^*e^{-TA^*} - BB^*. \end{aligned}$$

Chegamos assim à identidade

$$W = e^{-TA}BB^*e^{-TA^*} + BB^*,$$

a qual nos permite concluir que $W - BB^*$ é positiva semi-definida. \blacksquare

Observação 4.1.3 O Teorema 4.1.2 garante que sistemas autônomos controláveis são estabilizáveis por realimentação de estado. A recíproca entretanto não é verdadeira, conforme podemos verificar no seguinte exemplo trivial:

$$\begin{cases} A \text{ matriz estável, } B = \Theta \\ z' = Az + Bu \end{cases}$$

□ □ □

A fim de esclarecer a questão levantada na Observação 4.1.3, investigamos condições suficientes para garantir a controlabilidade de sistemas estabilizáveis. Este é o objetivo do teorema

Teorema 4.1.4 *Seja (A, B) um sistema autônomo de controle. Então (A, B) é controlável se e somente se (A, B) e $(-A, -B)$ são ambos estabilizáveis.*

Demonstração: Seja (A, B) controlável. Então $(-A, -B)$ é controlável e a estabilidade de (A, B) e $(-A, -B)$ segue do Teorema 4.1.2. Reciprocamente, sejam (A, B) e $(-A, -B)$ estabilizáveis. É possível escrever os sistemas $(\pm A, \pm B)$ na forma normal

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \Theta & A_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ \Theta \end{pmatrix} u,$$

onde (A_{11}, B_1) é controlável. O sistema

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \Theta & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ \Theta \end{pmatrix} \right)$$

é estabilizável quando existe uma matriz $F = (F_1, F_2)$ tal que

$$\pm \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ \Theta & A_{22} \end{pmatrix}$$

é uma matriz estável. Concluimos daí que os blocos $\pm A_{22}$ possuem somente autovalores com parte real estritamente menor que zero. Como essa condição não pode ser satisfeita simultaneamente para A_{22} e $-A_{22}$, temos que o bloco A_{22} não pode existir na forma normal. Temos então que

$$A = P^{-1} A_{11} P, \quad B = P^{-1} B_1,$$

onde P é não singular. A controlabilidade de (A, B) segue agora da controlabilidade de (A_{11}, B_1) . ■

Exemplo 4.1.5 Considere novamente o problema do equilíbrio de um bastão vertical. A equação diferencial é

$$\ddot{\phi} - g\phi = -u(t),$$

que se escreve na forma do sistema

$$z' = Az + Bu \quad \text{com} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O sistema (A, B) é controlável devido à condição de posto. Logo, o Teorema 4.1.4 garante sua estabilidade. O Teorema 4.1.2 nos permite ainda calcular a matriz de ganho F , isto porém exige algumas contas longas. □ □ □

O problema da estabilização de sistemas não lineares é discutido em [Is]. Em particular os sistemas *Single-Input Single-Output* (SISO) não lineares são tratados no Capítulo 4, onde é possível identificar semelhanças com a abordagem aqui apresentada para sistemas lineares. Uma técnica baseada na utilização de séries de Fourier (*equilíbrio harmônico*) pode ser encontrada em [Fö1, Capítulo 2].

4.2 Colocação de Pólos

Uma vez esclarecida a questão de que todo sistema controlável pode ser estabilizado por uma estratégia de controle de realimentação do tipo $u = Fz$, concentra-mo-nos no problema de escolher a posição no plano complexo dos autovalores da matriz do sistema

$$z' = (A + BF)z.$$

Esta tarefa é equivalente à de escolher os pólos de uma função racional – colocação de pólos. Tratamos nesta secção apenas de sistemas com controle escalar ($m = 1$), isto é, da forma

$$z' = Az + bu \quad \text{com} \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Investigamos a princípio um resultado do tipo forma-normal.

Lema 4.2.1 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. São equivalentes as afirmações:*

- a) (A, b) é controlável;
 b) Existe $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ inversível tal que o sistema (A, b) nas coordenadas $x = Pz$ tenha a forma $x' = \tilde{A}x + \tilde{b}u$ com

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os números a_0, \dots, a_{n-1} são os coeficientes do polinômio característico p de A : $p(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i$.

Demonstração: a) \implies b) Basta encontrar uma base w^1, \dots, w^n para \mathbb{R}^n , de modo que a matriz $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ definida pelas equações

$$Pw^k = e^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

satisfaça

$$(i) Pb = e^n, \quad (ii) PAP^{-1}e^1 = -a_0e^n, \quad (iii) PAP^{-1}e^{k+1} = e^k - a_k e^n, \quad 1 \leq k < n.$$

Definimos w^k recursivamente por

$$w^n = b, \quad w^k = Aw^{k+1} + a_k b, \quad 1 \leq k < n.$$

Temos então

$$w^k = A^{n-k}b + \sum_{j=1}^{n-k} a_{n-j} A^{n-k-j} b, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.3)$$

Como $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ são linearmente independentes (devido à controlabilidade de (A, b)), temos de (4.3) que w^1, \dots, w^n também o são. Do teorema de Caley–Hamilton, temos que $p(A) = \theta$. Logo,

$$\begin{aligned} Pb &= Pw^n = e^n \quad (\text{provando } (i)); \\ Aw^1 &= A^n b + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} A^{n-j} b \pm a_0 b = p(A)b - a_0 b = -a_0 b \\ &= -a_0 w^n \quad (\text{provando } (ii)); \\ Aw^{k+1} &= w^k - a_k e^n, \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{provando } (iii)). \end{aligned}$$

$b) \implies a)$ Seja agora o sistema (\tilde{A}, \tilde{b}) satisfazendo as hipóteses do item $b)$. O critério do posto nos garante que esse sistema é controlável. Logo, (A, b) é também controlável. ■

O teorema a seguir esclarece o resultado principal sobre a colocação de raízes dos polinômios característicos de sistemas de controle.

Teorema 4.2.2 *Seja (A, b) um sistema controlável e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ números complexos dados, com $r + 2(s - r) = n$. Então existe $f \in \mathbb{R}^n$ tal que o polinômio característico de $A + bf$ possui como raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$.*

Demonstração: Seja f um vetor com componentes f_0, \dots, f_{n-1} . O Lema 4.2.1 nos permite escrever o sistema $A + bf$ (a menos de uma mudança de variáveis) na forma

$$A + bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & f_2 - a_2 & \cdots & f_{n-2} - a_{n-2} & f_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix},$$

onde $a_0, \dots, a_{n-1}, 1$ são os coeficientes do polinômio característico de A . Logo, o polinômio característico p de $A + bf$ satisfaz

$$p(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} (f_i - a_i)r^i.$$

Como os coeficientes $f_i - a_i$, $i = 0, \dots, n - 1$ são determinados pelas raízes do polinômio, podemos determinar f_0, \dots, f_{n-1} (observe que é preciso resolver um sistema não linear com n variáveis e n equações). ■

Exemplo 4.2.3 Considere novamente o sistema linear (veja Exemplo 4.1.5)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A estabilização com $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nos leva à matriz

$$A + bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - f_0 & -f_1 \end{pmatrix},$$

cujos polinômios característicos são: $\lambda^2 + f_1\lambda + (f_0 - g)$. Se escolhermos os autovalores $\lambda_{\pm} = -1$, obtemos os coeficientes $f_0 = g + 1$, $f_1 = 2$. □ □ □

Observação 4.2.4 É possível obter um resultado semelhante ao apresentado no Teorema 4.2.2 para sistemas genéricos (A, B) – com $m \geq 1$. Neste caso, a demonstração baseia-se na forma normal. Discutimos aqui o caso geral na forma de algoritmo.

Seja o sistema de controle

$$z' = Az + Bu, \quad \text{com } A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n,m}.$$

Procuramos uma matriz $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ tal que os autovalores de $A + BF$ sejam os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ dados (note que os autovalores complexos aparecem com seus conjugados).

Os autovetores de $A + BF$ devem ser encontrados satisfazendo:

$$(A + BF)v^i = \lambda_i v^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definindo $q^i := Fv^i$, $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$(A - \lambda_i I)v^i + Bq^i = \theta, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} v^i \\ q^i \end{pmatrix} \in \text{Ke}(A - \lambda_i I | B), \quad 1 \leq i \leq n, \quad F = (q^1 | \dots | q^n)(v^1 | \dots | v^n)^{-1},$$

caso $\det(v^1 | \dots | v^n) \neq 0$. Essa última condição é satisfeita quando $A + BF$ é diagonalisável, o que por sua vez pode ser garantido pela escolha dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. $\square \square \square$

Exemplo 4.2.5 Considere o sistema de controle com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do sistema livre ($u = 0$) são $-1, -2, 2$. Escolhemos para novos autovalores os valores: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -4$. Calculamos a seguir o núcleo de $(A - \lambda_i I | B)$ $i = 1, 2, 3$, onde

$$(A - \lambda_i I | B) = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -\lambda_i - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um simples cálculo nos permite obter $\text{Ke}(A - \lambda_i I | B)$, sendo estes para $i = 1, 2, 3$ respectivamente

$$\begin{aligned} & \text{span}\{(1, -2, 4, 0, 0)^*, (1, 0, 0, -2, -4)^*\}, \quad \text{span}\{(3, 2, -6, -5, 0)^*, (2, -3, 9, 0, 26)^*\}, \\ & \text{span}\{(2, 1, -4, -9, 0)^*, (-2, -4, 16, 0, -36)^*\}. \end{aligned}$$

Podemos escolher então:

$$\begin{aligned} v^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{52}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad q^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obtemos assim a matriz de ganho

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{52}{5} & -12 & -5 \end{pmatrix},$$

e a matriz do sistema de malha fechada é

$$A + BF = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{72}{5} & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\square \square \square$

Uma interessante aplicação da colocação de pólos para um modelo de um reator químico é discutida em [KnKw] (ver exemplo 5.5). Neste problema a variável de estado ($z \in \mathbb{R}^5$) corresponde à temperatura em diferentes partes do reator, enquanto que o controle ($u \in \mathbb{R}^3$) corresponde à abertura de três válvulas de refrigeração disponíveis.

4.3 Observador Dinâmico

Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{l,n}$ considere o sistema de controle (A, B, C) . Na Secção 4.1, vimos que para estabilizar um sistema utilizando uma estratégia de realimentação de estado da forma $u = Fz$ temos que encontrar F de modo a tornar a matriz $(A + BF)$ estável.

Fazemos agora o desenvolvimento equivalente para o problema de realimentação de saída, quando procuramos controladores da forma $u = Fy$. Note que

$$u = Fy = FCz, \quad F \in \mathbb{R}^{m,l}.$$

O objetivo é então encontrar F de modo que o ponto de equilíbrio $\bar{z} = \theta$ do sistema $z' = (A + BFC)z$ seja assintoticamente estável. Tal abordagem encontra sérios obstáculos à sua realização, pois mesmo as hipóteses

$$(A, B) \text{ controlável, } (A, C) \text{ observável}$$

não são suficientes para garantir a estabilidade da matriz $(A + BFC)$. Tal fato pode ser comprovado no simples exemplo a seguir.

Exemplo 4.3.1 Considere o problema de controle descrito por

$$\ddot{x} + x = u, \quad y = x.$$

Na forma de sistema temos

$$\begin{cases} z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

É fácil verificar que os sistemas (A, B) e (A, C) são respectivamente controlável e observável. Escolhendo agora uma estratégia de controle linear de realimentação de saída, temos

$$u := fy, \quad \text{com } f \in \mathbb{R}^{1,1}.$$

Obtemos assim a equação $\ddot{x} + (1 - f)x = 0$, que corresponde ao sistema $z' = (A + BfC)z$, com

$$(A + BfC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico deste novo sistema, obtemos $p(r) = r^2 + (1 - f) = 0$, que possui raízes:

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{f - 1}.$$

Obviamente é impossível encontrar $f \in \mathbb{R}$ que satisfaça $\text{Re}(\lambda_+) < 0$ e $\text{Re}(\lambda_-) < 0$ ao mesmo tempo. Portanto, o sistema não é estabilizável. □ □ □

Na Secção 4.4 é analisada uma alternativa para a estabilização por realimentação de saída, que consiste de duas etapas: inicialmente o estado é reconstruído a partir da saída; em um segundo passo utiliza-se a aproximação do estado na realimentação.

A fim de reconstruir dinamicamente o estado z a partir da observação y , utilizamos a seguinte idéia:

- O sistema (A, B, C) é simulado por outro com a mesma estrutura;
- Seja x o estado desse sistema paralelo e $w = Cx$ sua saída;
- O controle do sistema paralelo é constituído pelo controle do sistema usual adicionado de uma componente da forma $L(w - y)$, com $L \in \mathbb{R}^{n,l}$;
- Obtemos assim o sistema

$$x' = Ax + Bu + L(Cx - y), \quad w = Cx,$$

que é denominado *observador dinâmico*;¹

- A diferença entre os estados do observador e do sistema original é definida por $\varepsilon := z - x$ e satisfaz

$$\varepsilon' = A\varepsilon - L(Cx - Cz) = (A + LC)\varepsilon;$$

- L é escolhido tal que $(A + LC)$ seja estável, garantindo assim $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \theta$.

A análise da estabilidade de $(A + LC)$ nos leva ao conceito de detectabilidade. O teorema a seguir estabelece a equivalência entre a detectabilidade de um sistema $(A, , C)$ e a estabilidade da matriz do observador dinâmico $(A + LC)$.

Teorema 4.3.2 Dadas $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $C \in \mathbb{R}^{1,n}$, são equivalentes as afirmações:

- $(A, , C)$ é detectável;
- Se $v \in \mathbb{C}^n$ é autovetor de A e seu autovalor λ satisfaz $Re(\lambda) \geq 0$, então $Cv \neq \theta$;
- $(A^*, -C^*)$ é estabilizável;
- Existe $L \in \mathbb{R}^{n,l}$ tal que a matriz $(A + LC)$ é estável.

Demonstração: a) \implies b) Sejam v e λ como em b). Considere as soluções especiais do problema de valor inicial $z' = Az$, $z(0) = v$ dadas por

$$z_r(t) := Re(e^{\lambda t}v), \quad z_i(t) := Im(e^{\lambda t}v), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que, se $Cv = \theta$, então v pertence ao subespaço não observável de $(A, , C)$. Neste caso, $\lim_t z_r(t) \neq \theta$, contradizendo a detectabilidade de $(A, , C)$.

b) \implies c) Note que é possível escrever o sistema $(A^*, -C^*)$ na forma normal

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_I & \times \\ \Theta & A_{II} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_I \\ \Theta \end{pmatrix},$$

com (A_I, C_I) controlável. Analisamos separadamente as duas possíveis situações:

Se o bloco A_{II} não existir, temos $(A^*, -C^*) = (P^{-1}A_I P, P^{-1}C_I)$. Logo, $(A^*, -C^*)$ é controlável. O item c) segue agora do Teorema 4.1.2.

Suponha que o bloco A_{II} esteja presente na forma normal. Se μ é um autovalor de A_{II}^* e w um autovetor correspondente, temos para $v = \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix}$ que

$$\tilde{A}^*v = \mu v, \quad \tilde{C}v = \theta.$$

Da hipótese em b) segue que $Re(\mu) < 0$, provando assim que A_{II}^* (e conseqüentemente A_{II}) é uma matriz estável. Da controlabilidade de (A_I, C_I) segue sua estabilizabilidade, i.e. existe F_I tal que

¹A escolha da letra L para o observador se deve a D.G. Luenberger, que introduziu esta idéia.

$(A_I + C_I F_I)$ é estável. Temos então que a matriz

$$\tilde{A} + \tilde{C}(F_I | \Theta) = \begin{pmatrix} A_I + C_I F_I & \times \\ \Theta & A_{II} \end{pmatrix}$$

é estável. Como $\tilde{F} = (F_I | \Theta)$ estabiliza (\tilde{A}, \tilde{C}) e $(P^{-1}\tilde{A}P, P^{-1}\tilde{C}) = (A^*, -C^*)$, então $F = \tilde{F}P$ estabiliza $(A^*, -C^*)$.

$c) \implies d)$ Por hipótese, existe uma matriz D tal que a matriz $A^* + (-C^*)(-D)$ é estável. Logo, $A + LC$ é estável com a escolha $L := D^*$.

$d) \implies a)$ Dado $z_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} Ke(CA^k)$ defina $z(t) := e^{tA}z_0, t \in \mathbb{R}$. Do teorema de Caley–Hamilton segue $Cz(t) = \theta$, para $t \geq 0$. Logo, z também é solução de

$$z' = (A + LC)z.$$

Como os autovalores da matriz $(A + LC)$ possuem parte real negativa, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \theta$. ■

Exemplo 4.3.3 Vamos aplicar a idéia do observador dinâmico ao sistema (A, B, C) com matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que (A, B) é controlável e (A, C) observável, e portanto também detectável. Os autovalores de $A + LC$ com $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ são obtidos resolvendo-se a equação

$$0 = \det(\lambda I - (A + LC)) = \lambda^2 + (3 - l_1)\lambda + (2 - 2l_1 - 3l_2). \quad (4.4)$$

Escolhemos para a matriz $A + LC$ os autovalores $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -10$. Resolvendo (4.4) para (l_1, l_2) , obtemos $l_1 = -16, l_2 = -56/3$. O observador dinâmico possui então a seguinte estrutura:

$$x' = \hat{A}x + Bu - Ly,$$

com

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -16 & -56/3 \end{pmatrix}.$$

O observador dinâmico nos permite reconstruir a componente z_2 do estado – note que a componente z_1 já é observada. Suponha que temos a seguinte situação:

$$u(t) \equiv 1, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $\xi \in \mathbb{R}$. O erro de reconstrução $\varepsilon := z - x$ satisfaz

$$\begin{cases} \varepsilon' = (A + LC)\varepsilon \\ \varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \end{cases}$$

Os autovalores de $A + LC$ são $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -10$ e os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/3 \end{pmatrix}$. Temos então

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 3e^{-9t} - 3e^{-10t} \\ 8e^{-9t} - 7e^{-10t} \end{pmatrix}.$$

Nos interessa saber o quão rápido ε_2 converge a zero. Para $t = 0.5$, temos $\varepsilon_2(t) = 0.041 \xi$ (aproximadamente 4% do erro inicial) e para $t = 0.9$, temos $\varepsilon_2(t) = 0.015 \xi$ (i.e. 0.1% do erro inicial).

□ □ □

É possível utilizar sistemas auxiliares *observadores* também para sistemas de controle não lineares. Para maiores detalhes, consulte [KIF], [Is]. Ainda no contexto de sistemas autônomos, o leitor pode encontrar em [KnKw] detalhes sobre o *observador reduzido* (semelhante ao observador discutido nesta secção).

4.4 Estabilização por Realimentação de Saída

O Exemplo 4.3.1 nos mostra que a forma clássica da estabilização por realimentação de saída $u = Fy = FCx$ nem sempre é possível. Uma alternativa é utilizar o observador dinâmico para encontrar uma aproximação para o estado, e, a partir desta aproximação, escolher o controle.

O observador dinâmico é definido pelo sistema (veja Secção 4.3)

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu + L(w - y) \\ w = Cx \end{cases} \quad (4.5)$$

A partir do estado x escolhemos um controle de realimentação da forma $u = Fx$. Substituindo esse controlador no sistema (A, B) , obtemos para (z, x) o sistema acoplado:

$$\begin{cases} z' = Az + BFx \\ x' = (A + BF + LC)x - LCz \end{cases} \quad (4.6)$$

que está associado à matriz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{pmatrix}.$$

Se a matriz \hat{A} for estável, conseguimos atingir o nosso objetivo inicial de estabilizar (A, B, C) através do sistema acoplado (4.6) – constituído de processo mais observador. Note que esta abordagem nos permite, além de estabilizar o processo, reconstruir seu estado.

Defina agora $w := z - x$. O sistema (4.6) se escreve nas novas variáveis (z, w) como

$$\begin{cases} z' = (A + BF)z + BFw \\ w' = (A + LC)w \end{cases} \quad (4.7)$$

Concluimos assim que a matriz \hat{A} é semelhante à matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ \Theta & A + LC \end{pmatrix}.$$

A tarefa de estabilizar \hat{A} é portanto equivalente à de estabilizar \tilde{A} . Note, porém, que a estrutura de \tilde{A} nos permite escrever

$$p_{\tilde{A}} = p_{(A+BF)} p_{(A+LC)},$$

onde p_M representa o polinômio característico da matriz M . Sendo assim, nossa tarefa se reduz a:

- Determinar F tal que a matriz $A + BF$ é estável;
- Determinar L tal que a matriz $A + LC$ é estável.

Conhecemos, entretanto, da Definição 4.1.1 e do Teorema 4.3.2 condições necessárias e suficientes para que os objetivos acima possam ser alcançados. São essas respectivamente:

- (A, B) estabilizável,
- $(A, , C)$ detectável.

Exemplo 4.4.1 Considere o sistema (A, B, C) do Exemplo 4.3.3 com matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0).$$

Vimos naquele exemplo que a matriz

$$L = \begin{pmatrix} -16 \\ -56/3 \end{pmatrix}$$

é tal que $A + LC$ possui autovalores -9 e -10 . Se $F = (f_1 \ f_2)$, os autovalores de $A + BF$ são dados pelas raízes do polinômio característico

$$\det(\lambda I - (A + BF)) = \lambda^2 + (3 - f_1 - f_2)\lambda + (2 - 5f_1 - f_2).$$

Escolhendo para $A + BF$ os autovalores $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -6$, obtemos para F os coeficientes: $f_1 = -5$, $f_2 = -3$. Portanto, a matriz do sistema (4.7) assume a forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -17 & 3 \\ 0 & 0 & -56/3 & -2 \end{pmatrix}.$$

□ □ □

A estabilização por realimentação de saída para sistemas SISO não lineares especiais é considerada em [KIF].

4.5 Pontos de Operação

Nesta secção consideramos os problemas de determinação e estabilização de pontos de operação. Considere um sistema de controle (A, B) , no qual a variável de controle u se decompõe em uma entrada fixa \bar{u} (desconhecida) e um sinal de controle v . O sistema se escreve então como

$$z' = Az + B(\bar{u} + v). \quad (4.8)$$

O *ponto de operação* z_o do sistema (4.8) corresponde ao ponto de equilíbrio do sistema livre (i.e. $v \equiv 0$). Temos assim

$$z_o = -A^{-1}B\bar{u}.$$

O problema abordado nesta secção é o de encontrar uma estratégia de controle v que torne o ponto de operação assintoticamente estável e que, se possível, nos permita identificá-lo.

Note que se \bar{u} é conhecido, recaímos no problema de estabilização do sistema (A, B) . De fato, uma vez calculado z_o , basta fazer a mudança de variável $x = z - z_o$ para que o estado x satisfaça a dinâmica $x' = Ax + Bv$.

Utilizando uma abordagem semelhante à do observador dinâmico, é possível não somente estabilizar o ponto de operação, como também determiná-lo. Vamos aproximar o estado z por x satisfazendo a dinâmica:

$$x' = L(z - x),$$

onde $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ é não singular. Escolhemos agora para (4.8) um controle da forma

$$v = F(z - x).$$

Fazendo a mudança de variáveis $\hat{z} = z - z_o$, $\hat{x} = x - z_o$, obtemos

$$\hat{x}' = L(z - x) = L(\hat{z} - \hat{x})$$

e ainda

$$\hat{z}' = z' = Az + B\bar{u} + BF(z - x) = A\hat{z} + BF\hat{z} - BF\hat{x}.$$

Temos então, para o par $(\hat{z} \ \hat{x})$, o sistema

$$\begin{pmatrix} \hat{z}' \\ \hat{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & -BF \\ L & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Portanto, basta encontrar matrizes F e L , tais que a matriz do sistema (4.9) seja estável. Note que, se A é estável, uma escolha possível é $F = \Theta$, $L = -I$.

Exemplo 4.5.1 Considere o sistema de controle (A, B) com matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Supomos F e L da forma:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}.$$

A fim de torna a matriz $A + BF$ estável, escolhemos $f_1 = f_2 = -3$, obtendo assim:

$$A + BF = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Temos então

$$\begin{pmatrix} A + BF & -BF \\ L & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 & 3 \\ l_1 & l_2 & -l_1 & -l_2 \\ l_2 & l_1 & -l_2 & -l_1 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (7 + 2l_1)\lambda^3 + (10 + 8l_1 + l_1^2 - l_2^2 - 6l_2)\lambda^2 + (8l_1 + l_1^2 - l_2^2 - 12l_2)\lambda + 2(l_2^2 - l_1^2).$$

A observância do critério de Hurwitz (veja Teorema 3.3.5) nos leva a escolher os coeficientes $l_1 = 1$, $l_2 = -3$. As raízes obtidas são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -4.$$

Logo, $F = \begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix}$ e $L = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ estabilizam o ponto de operação.

Para fins de cálculo, suponha $\bar{u} = -2$. O ponto de operação correspondente é $z_o = -A^{-1}B\bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Suponha as condições iniciais: $z(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x(0) = \theta$. Temos então

$$\begin{pmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e a solução do sistema $(\hat{z}' \ \hat{x}')$ é:

$$\begin{pmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66e^{-t} + 66e^{-2t} + 48te^{-2t} \\ 33e^{-t} - 34e^{-2t} - 48te^{-2t} \\ -77e^{-t} + 96te^{-2t} + 12e^{-4t} + 60e^{-2t} \\ 55e^{-t} - 44e^{-2t} - 96te^{-2t} - 12e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

□ □ □

Exercícios

4.1 Considere o sistema SISO (A, b) com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre a forma normal (\hat{A}, \hat{b}) do sistema $(\hat{b} = (0, 0, 1))$.

4.2 Considere o sistema SISO (A, b) com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma estratégia de realimentação de estado $u = fx$, com $f = (f_1, f_2, f_3)$, tal que o sistema de malha fechada $A + bf$ possua autovalores $-1 + i$, $-1 - i$, -4 .

4.3 Considere o sistema (A, B) com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que (A, B) é controlável;

b) Encontre uma estratégia de realimentação de estado $u = Fx$, tal que o sistema de malha fechada $A + BF$ possua autovalores -4 , -5 , -6 .

4.4 Construa um observador dinâmico para o sistema

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1),$$

tal que $A + LC$ possua autovalores -8 , -9 , -10 .

4.5 Encontre uma estratégia de realimentação F e um observador L para o sistema (A, B, C) com

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 1 \ 1),$$

tal que $A + BF$ possua autovalores -4 , -5 , -6 e $A + LC$ possua autovalores -8 , -9 , -10 .

Capítulo 5

Princípio do Máximo

Neste capítulo é analisado um conjunto de condições necessárias para otimalidade de soluções de problemas de controle ótimo. Tal resultado é conhecido na literatura como *princípio do máximo*¹ e muito se assemelha a um teorema de multiplicadores de Lagrange, formulado em espaços de dimensão infinita.

Com hipóteses adicionais de convexidade, o princípio do máximo pode ser demonstrado utilizando-se argumentos elementares de análise. Em particular, a condição de máximo é obtida a partir da equação de Euler–Lagrange. No caso geral (sem a hipótese de convexidade da Hamiltoniana), a demonstração da necessidade da condição de máximo é mais complicada e necessita de alguns resultados oriundos da teoria de otimização em espaços de dimensão infinita.

A autoria do princípio do máximo é controversa. A maioria dos autores credita a condição de máximo ao grupo liderado pelo matemático russo L.S. Pontryagin (1956). Entretanto, tal condição pode ser encontrada em um texto anterior, porém pouco divulgado, de M.R. Hestenes (1950). Para maiores detalhes consulte [Hes], [PBG], assim como o artigo de Hestenes² em [BaNe].

O capítulo é organizado da seguinte forma: Na Seção 5.1 apresentamos o princípio do máximo para problemas de controle ótimo com horizonte finito. Algumas variantes do resultado, correspondentes a diferentes condições de contorno, são também analisadas nesta seção. Na Seção 5.2 consideramos o princípio do máximo para problemas com horizonte infinito. Na Seção 5.3 são discutidas diversas aplicações, nas quais o princípio do máximo é utilizado na identificação de processos ótimos.

5.1 Problemas com Horizonte Finito

Começamos por discutir uma formulação bastante geral para problemas de controle ótimo com horizonte finito. Considere o problema de controle

$$P(t_0, z_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(z, u) := L_1(t_1, z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ t_1 \geq t_0; u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m), u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [t_0, t_1]; \\ z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s), u(s)) ds, t \in [t_0, t_1]; \psi(t_1, z(t_1)) = \theta \end{array} \right.$$

¹Também conhecido como princípio do mínimo, ou princípio de Pontryagin.

²HESTENES, M.R., *Variational theory and optimal control theory*, 1 – 22

onde

$$\begin{aligned} L &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, & L_1 &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ f &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, & \psi &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

e $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. O tempo inicial t_0 e a condição inicial z_0 são fornecidos, enquanto que o tempo final t_1 e a condição final são, a princípio, desconhecidos.

Note que o fato da dinâmica do sistema ser descrita por uma equação integral ao invés de diferencial, permite-nos considerar trajetórias admissíveis menos regulares. O conjunto das estratégias de controle admissíveis é

$$\mathcal{U}_{ad} := L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m).$$

Desta forma, as trajetórias correspondentes são funções absolutamente contínuas em $[t_0, t_1]$.

Definição 5.1.1 Sejam f, L as funções definidas acima. A aplicação

$$\begin{aligned} H &: [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, z, \lambda, u) &\mapsto \langle \lambda, f(t, z, u) \rangle + \eta L(t, z, u) \end{aligned}$$

é denominada *função de Hamilton* (note que a origem da constante η precisa ainda ser esclarecida). □ □ □

No teorema a seguir apresentamos o *princípio do máximo*. Por ser longa e técnica, a demonstração não é apresentada nestas notas. A argumentação utilizada na demonstração segue a linha das notas de aula de M. Brokate (veja [Br]).

Como referências auxiliares o leitor pode consultar [PBG], [Hes], [Ber], [Know], [MaSt], [Za], entre outros. A obtenção do princípio do máximo para problemas com tempo final fixo ($t_1 = T$ conhecido) é mais simples, podendo ser encontrada em [FIRi, Capítulo 2], [Ho, Capítulo 9] ou [Tr, Teorema 11.8].

Teorema 5.1.2 *Suponha que L, f são aplicações C^2 e que L_1, ψ são C^1 . Se $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{t}_1)$ é uma solução do problema $P(t_0, z_0)$, tal que*

$$\psi_z(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) \neq \theta \quad e \quad (L_1)_z(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) \neq \theta,$$

então existe uma função $\lambda : [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e constantes $\eta \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^p$ que satisfazem:

i) *Equação de estado*

$$\bar{z}(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, \bar{t}_1];$$

ii) *Equação adjunta*

$$\begin{cases} \lambda(t) = \lambda_1 + \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\partial H}{\partial z}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, & t \in [t_0, \bar{t}_1], \\ \lambda_1 := \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1))^* \mu; \end{cases}$$

iii) *Equação de evolução da função de Hamilton*

$$\begin{cases} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = H_1 - \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\partial H}{\partial t}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, & t \in [t_0, \bar{t}_1], \\ H_1 := -\eta \frac{\partial L_1}{\partial t}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)) + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}(\bar{t}_1, \bar{z}(\bar{t}_1)), \mu \right\rangle; \end{cases}$$

iv) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \text{ q.s. em } [t_0, \bar{t}_1];$$

v) *Condição de não acoplamento* $\eta + |\mu| \neq 0$.

A demonstração do Teorema 5.1.2 constitui-se na aplicação de um teorema de multiplicadores a um problema auxiliar, obtido de $P(t_0, z_0)$ por uma mudança de variáveis denominada transformação no tempo e cuja solubilidade está relacionada a de $P(t_0, z_0)$. As constantes η e μ surgem na demonstração como componentes de um vetor normal a um hiperplano, que separa conjuntos de nível associados à função objetivo J e à condição final $\psi(t, z(t)) = \theta$.

Observação 5.1.3 A denominação *princípio do máximo* é motivada pelo item iv) do Teorema 5.1.2, que, entretanto, refere-se à determinação de um mínimo. Note, porém, que a elementar substituição de J por $-J$ permite-nos trocar o problema de minimização por um de maximização, alterando assim o min da condição iv) para max. Sem dúvida, as condições mais interessantes do Teorema 5.1.2 são

$$\bullet \begin{cases} z' = H_\lambda(t, z, \lambda, u), & z(t_0) = z_0, \psi(t_1, z(t_1)) = 0, \\ \lambda' = -H_z(t, z, \lambda, u), & \lambda(t_1) = \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(t_1, z(t_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(t_1, z(t_1))^* \mu; \end{cases}$$

$$\bullet H(t, z, \lambda, u) = \min_{w \in \Omega} H(t, z(t), \lambda(t), w), \text{ q.s. em } [t_0, t_1].$$

Note que o par (z, λ) é solução de um sistema hamiltoniano para a função H . □ □ □

Observação 5.1.4 Analogamente aos problemas variacionais, os problemas de controle ótimo também podem ser formulados com diferentes tipos de condições de contorno. A cada um destes tipos corresponde uma variante do Teorema 5.1.2, que se diferencia deste apenas pelas condições de contorno da variável adjunta e da função de Hamilton. Enunciamos a seguir algumas variantes do problema $P(t_0, z_0)$ que surgem com maior frequência nas aplicações. Apresentamos também as condições necessárias correspondentes para cada problema.

Considere o problema $P(t_0, z_0)$ com t_1 fixo ($t_1 > t_0$) e $L_1 \equiv \theta$.

- Se a condição final é fixada ($z(t_1) = z_1$), não há nenhuma condição para $\lambda(t_1)$ (corresponde à escolha $\psi(t, z) := (t - t_1, z - z_1) \in \mathbb{R}^2$).
- Se a condição final é livre ($z(t_1)$ qualquer), a variável adjunta satisfaz $\lambda(t_1) = \theta$ (corresponde à escolha $\psi(t, z) := t - t_1 \in \mathbb{R}$).
- Se a condição final é da forma: $z(t_1) \geq z_1$ (no caso escalar), a variável adjunta satisfaz $\lambda(t_1) \geq 0$, ocorrendo a igualdade quando $z(t_1) > z_1$.

Considere o problema $P(t_0, z_0)$ com $L_1 \equiv \theta$. Neste caso, as condições para $\lambda(t_1)$ discutidas acima não se alteram e, além disso,

$$H(t_1, z(t_1), \lambda(t_1), u(t_1)) = 0.$$

Esta equação extra corresponde à variável adicional do problema, representada pelo tempo final desconhecido t_1 . □ □ □

O princípio do máximo pode, em alguns casos, ser utilizado para efetivamente determinar uma solução do problema $P(t_0, z_0)$. Para tanto, aplica-se a seguinte estratégia: Inicialmente explicitamos o controle u em função das variáveis z e λ , obtendo assim

$$u(\cdot) = U_*(\cdot, z(\cdot), \lambda(\cdot)).$$

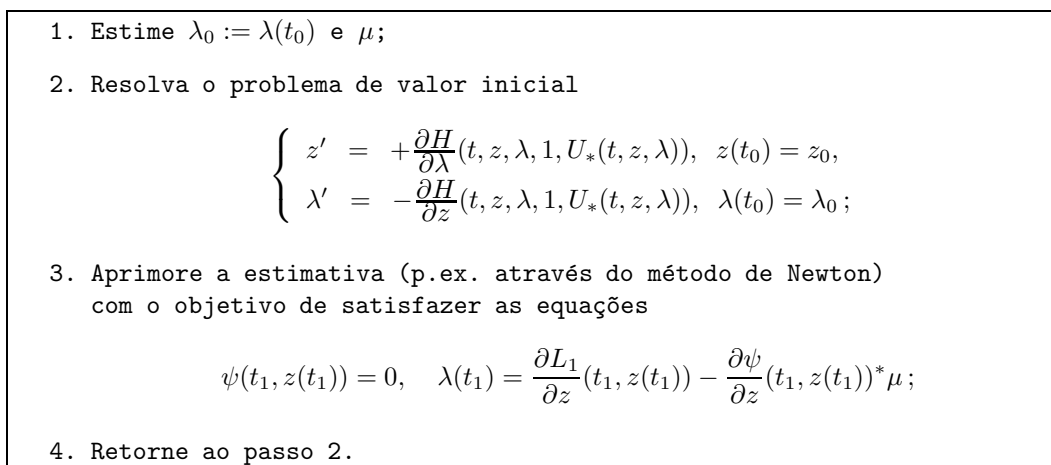


Figura 5.1: Algoritmo do método de *shooting* para sistema hamiltoniano

O próximo passo é substituir essa expressão no problema de valor de contorno da Observação 5.1.3 (eliminando a variável u):

$$z' = H_\lambda(t, z, \lambda, U_*), \quad z(t_0) = z_0, \quad \psi(t_1, z(t_1)) = 0; \tag{5.1}$$

$$\lambda' = -H_z(t, z, \lambda, U_*), \quad \lambda(t_1) = \eta \frac{\partial L_1}{\partial z}(t_1, z(t_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial z}(t_1, z(t_1))^* \mu; \tag{5.2}$$

$$H' = \frac{\partial H}{\partial t}(t, z, \lambda, U_*), \tag{5.3}$$

$$H(t_1, z(t_1), \lambda(t_1), U_*(t_1)) = -\eta \frac{\partial L_1}{\partial t}(t_1, z(t_1)) + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_1, z(t_1)), \mu \right\rangle$$

Este sistema é então resolvido, com o intuito de obter um candidato à solução do problema de controle $P(t_0, z_0)$. Entretanto, nem sempre é possível obter a representação $U_*(\cdot, z, \lambda)$ e nesses casos fala-se da existência de uma estratégia de *controle singular*.

O sistema resultante de (5.1), (5.2), (5.3) pela substituição $u(\cdot) = U_*(\cdot, z, \lambda)$ pode ser resolvido por um método do tipo *shooting*, conforme mostra o esquema na Figura 5.1 (supomos $\eta = 1$ no Teorema 5.1.2).

Observação 5.1.5 O problema de valor de contorno (5.1), (5.2), (5.3) possui, tomando o controle u fixo, $2n+1$ variáveis (z, λ, H) e $p+1$ parâmetros (η, μ). Temos assim $2n+p+2$ graus de liberdade, os quais estão sujeitos a $2n+p+1$ equações. Aparentemente, temos um grau de liberdade a mais. Note, porém, que a condição de não acoplamento v garante que η e μ não são ambos nulos, sendo portanto sempre possível simplificar o sistema (5.1), (5.2), (5.3) em relação a η ou a uma das componentes de μ . Sendo assim, o Teorema 5.1.2 pode ser formulado alternativamente como:

... existem $\lambda : [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta = 0$ ou $\eta = 1$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ que satisfazem i), ..., v).

□ □ □

Observação 5.1.6 É simples verificar que a equação de Euler–Lagrange do cálculo variacional pode ser obtida do princípio do máximo. De fato, o problema de minimização clássico do cálculo

variacional pode ser interpretado como

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_a^b L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a } z' = u(t). \end{cases}$$

Logo, a condição de máximo iv) do Teorema 5.1.2 implica em

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial u}[\langle \bar{\lambda}, \bar{u} \rangle + \eta L(t, \bar{z}, \bar{u})] = \bar{\lambda} + \eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u})$$

e, portanto,

$$\bar{\lambda} = -\eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u}). \quad (5.4)$$

O sistema hamiltoniano para as variáveis de estado e adjunta se escreve

$$\begin{cases} \frac{d\bar{z}}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \bar{u} \\ \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\eta \frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, \bar{u}) \end{cases} \quad (5.5)$$

De (5.4) e (5.5), temos

$$-\eta \frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, \bar{u}) = \frac{d}{dt} \left(-\eta \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar{z}, \bar{u}) \right)$$

ou

$$\frac{\partial L}{\partial z}(t, \bar{z}, (\bar{z})') - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'}(t, \bar{z}, (\bar{z})') \right) = 0.$$

□ □ □

5.2 Problemas com Horizonte Infinito

Analizamos nesta secção condições necessárias para problemas de controle ótimo com horizonte infinito. Os problemas de controle dessa natureza tem ganho importância nas últimas décadas devido aos modelos matemáticos oriundos das ciências econômicas e biológicas que os utilizam.

Os primeiros trabalhos a tratar de problemas de otimização com horizonte infinito são devidos aos economistas. Uma referência clássica é o artigo escrito em 1928 por F. Ramsey (veja [Ra]), que trata de problemas do tipo *consumo* \times *investimento* (veja Aplicação 5.3.5). A primeira extensa ao do princípio do máximo para problemas com horizonte infinito foi apresentada por H. Halkin em 1964 (veja [Ha]). Um apanhado do desenvolvimento da teoria pode ser encontrado em [CaHa]. Na abordagem aqui apresentada, seguimos os passos descritos em [Leit], que utiliza um conceito de otimalidade diferente dos encontrados em [Ha] e [CaHa].

Inúmeros modelos econômicos (de horizonte finito e infinito) são tratados, sob a ótica do controle ótimo e programação dinâmica, em [SeSy]. Nesta referência também são analisados problemas de exploração de recursos naturais. O leitor interessado em aplicações desta natureza deve consultar ainda [SeZh].

Aplicações a modelos biológicos podem ser encontradas em [Cl]. Um interessante problema relacionado à exploração ótima de recursos biorenováveis (pescaria ótima) é analisado em [CCM], e [BaLe].

A seguir analisamos um caso particular do problema abordado na Secção 5.1. Trata-se de problemas de controle ótimo com tempo final fixo. A abordagem nesta secção de tais problemas (de horizonte finito) é justificada pelo fato das condições necessárias para estes problemas serem utilizadas na demonstração do princípio do máximo para os problemas com horizonte infinito.

Suponha que no problema $P(t_0, z_0)$ o tempo final $t_1 = T$ e o estado final $z_1 = z_T$ são dados. Temos assim o seguinte problema de controle ótimo:

$$P_T(z_0) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^T L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad z(T) = z_T; \\ u \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, T]; \end{cases}$$

Argumentando como na Observação 5.1.4, obtemos um conjunto de condições necessárias para otimalidade de uma solução do problema $P_T(z_0)$:

Corolário 5.2.1 *Suponha que L, f são aplicações C^2 . Se (\bar{z}, \bar{u}) é uma solução do problema $P_T(z_0)$, então existe uma função $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta = 1$ ou $\eta = 0$ que satisfazem*

i) *Sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} (\bar{z})'(t) = H_\lambda(t, \bar{z}, \lambda, \bar{u}), \quad \text{q.s. em } [0, T], \\ \lambda'(t) = H_z(t, \bar{z}, \lambda, \bar{u}), \quad \text{q.s. em } [0, T], \\ \bar{z}(t_0) = z_0, \quad \bar{z}(T) = z_T; \end{cases}$$

ii) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \quad \text{q.s. em } [0, T];$$

iii) *Condição de não acoplamento $\eta + \|\lambda\|_\infty \neq 0$.*

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 5.1.2 e da Observação 5.1.4. ■

Analisamos agora os problemas com horizonte infinito. Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$P_\infty(z_0) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^\infty e^{-\delta t} L(z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(z(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \infty); \\ u \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, \infty); \end{cases}$$

onde as funções $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^m$ e a constante $\delta > 0$ são dados. Verificamos a seguir um resultado que fornece condições necessárias para otimalidade de uma solução de $P_\infty(z_0)$.

Teorema 5.2.2 *Suponha que L, f são aplicações C^2 . Se (\bar{z}, \bar{u}) é uma solução de $P_\infty(z_0)$, então existe uma aplicação $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e constantes $\eta = 0$ ou $\eta = 1$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem:*

i) *Equação de estado*

$$\bar{z}(t) = z_0 + \int_0^t f(s, \bar{z}(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [0, \infty);$$

ii) *Equação adjunta*

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial z}(s, \bar{z}(s), \lambda(s), \bar{u}(s)) ds, \quad t \in [0, \infty);$$

iii) *Condição de otimalidade*

$$H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), \bar{u}(t)) = \min_{u \in \Omega} H(t, \bar{z}(t), \lambda(t), u), \text{ q.s. em } [0, \infty).$$

Demonstração: Seja (\bar{z}, \bar{u}) um processo ótimo para $P_\infty(z_0)$. Dado $T > 0$, as funções $e^{-\delta t} L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfazem as condições do Corolário 5.2.1. Logo, este corolário nos fornece condições necessárias para otimalidade de cada problema

$$P_{T_k}(z_0) \begin{cases} \text{Minimizar } J(z, u) := \int_0^{T_k} e^{-\delta t} L(t, z(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s), u(s)) ds, t \in [0, T_k], z(T_k) = z_k := \bar{z}(T_k); \\ u \in L^1([0, T_k]; \mathbb{R}^m), u(t) \in \Omega \text{ q.s. em } [0, T_k]; \end{cases}$$

onde $T_k \rightarrow \infty$. Como consequência do princípio de otimalidade de Bellman, temos que $(\bar{z}, \bar{u})|_{[0, T_k]}$ é uma solução de $P_{T_k}(z_0)$. Juntando os fatos, podemos garantir a existência de $\eta_k \geq 0$, $\lambda_k : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que

- $\|\lambda_k\|_\infty + \eta_k > 0$;
- (\bar{z}, λ_k) é solução do sistema Hamiltoniano³

$$\begin{aligned} d\bar{z}(t) &= H_\lambda(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) dt, t \in [0, T_k] \\ d\lambda_k(t) &= -H_x(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) dt, t \in [0, T_k] \\ \bar{z}(0) &= z_0, \bar{z}(T_k) = z_k; \end{aligned}$$

- $H(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in \Omega} \{H(t, \bar{z}(t), \lambda_k(t), u)\}$, q.s. in $[0, T_k]$.

Considere agora a seqüência $\{\lambda_k(0), \eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Normalizando os multiplicadores de Lagrange, podemos supor que $|\lambda_k(0)| + \eta_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Tomando subsequências (se necessário), podemos garantir a existência de $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \geq 0$ satisfazendo

$$|\lambda_0| + \eta = 1, \lim_k \lambda_k(0) = \lambda_0, \lim_k \eta_k = \eta. \quad (5.6)$$

Seja agora $T > 0$ fixo. Logo $T_k > T$, para $k > k_0$ e como o sistema Hamiltoniano desfruta da propriedade de dependência contínua das condições iniciais, podemos garantir que existe $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que λ_k converge uniformemente para λ em $[0, T]$. Essa convergência implica nas desejadas condições de otimalidade para o problema $P_\infty(x_0)$, uma vez que $T > 0$ é arbitrário. ■

Observação 5.2.3 Duas diferenças básicas devem ser observadas na formulação do Teorema 5.2.2 em relação ao Teorema 5.1.2:

- Falta uma condição de contorno final para a variável adjunta λ (eventualmente uma condição de decaimento do tipo $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \theta$);
- Falta a condição de não acoplamento (neste caso $\eta + |\lambda_0| \neq 0$). □ □ □

Uma análise para problemas do tipo linear-quadrático com horizonte infinito é também possível via programação dinâmica. Através de um processo de limite, é possível obter a função valor resolvendo-se a equação algébrica de Riccati (veja [So, Capítulo 7]).

³Note que $H(t, z, \lambda_k, u) = \langle \lambda_k, F(t, z, u) \rangle + \eta_k L(t, z, u)$.

5.3 Aplicações do Princípio do Máximo

Nesta secção analisamos, à luz do princípio do máximo, alguns problemas de controle ótimo. Na Aplicação 5.3.1 é discutido formalmente um problema de tempo mínimo. A Aplicação 5.3.2 é uma extensão da primeira. Nela é analisada uma família maior de problemas, composta pelos denominados *problemas de tempo mínimo até a origem*.

Na Aplicação 5.3.3 o princípio do máximo é utilizado para verificar que uma estratégia do tipo bang-bang é a única estratégia ótima existente para um problema de alunissagem. Na Aplicação 5.3.4 consideramos um problema com controle singular.

Na Aplicação 5.3.5 consideramos um modelo econômico clássico, que foi formulado por F. Ramsey em 1928 (veja [Ra]). Utilizando a equação de Euler–Lagrange, obtemos a política ótima para um problema de *consumo* \times *investimento* com horizonte infinito.

Em [BMS] podem ser encontradas diversas aplicações do princípio do máximo a problemas aeroespaciais, dentre as quais citamos: Desenho ótimo de uma missão a Netuno; Ascensão ótima de um veículo espacial hipersônico; Alcance máximo de vôo para uma asa delta atravessando uma térmica. Em [Ho] são discutidas (entre outras) as seguintes aplicações: Oscilador harmônico com custo de combustível; controle de epidemias; Pescaria ótima; Contração do ventrículo esquerdo do coração; Compra e venda de ações.

Aplicação 5.3.1 (Tempo mínimo I) Considere a tarefa de encontrar uma estratégia \bar{u} (aceleração e frenagem) que permita levar, no menor tempo possível, um carro que se encontra na origem e em repouso, até uma parede distante de uma unidade. Ao chegar na parede o carro deve ter novamente velocidade nula.

Supondo que o carro de massa unitária e desprezando os atritos, temos o modelo:

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0, \bar{t}],$$

onde $x(t)$ representa o deslocamento, $\dot{x}(t)$ a velocidade e $\ddot{x}(t)$ a aceleração do veículo no tempo t . As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0; \\ x(\bar{t}) &= 1, & \dot{x}(\bar{t}) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos então escrever o problema na forma $P(t_0, z_0)$ como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \int_0^T 1 \, dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad z(0) = \theta; \\ \psi(T, z(T)) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z(T) = \theta \end{array} \right.$$

onde $T \geq 0$, $u \in L^1[0, T]$ e $u(t) \in \Omega := [-1, 1]$ q.s. em $[0, T]$. Como o sistema é autônomo, a aplicação $U_* = U_*(z, \lambda)$ não depende explicitamente do tempo. Do princípio do máximo, obtemos as seguintes condições necessárias:

$$\begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} z_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad z(0) = \theta, \quad z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda' &= - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda(T) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \\ H(t, z, \lambda, u) &= z_2 \lambda_1 + u \lambda_2 + \eta; \\ z_2 \lambda_1 + U_*(z, \lambda) \lambda_2 + \eta &= \min_{u \in [-1, 1]} \{z_2 \lambda_1 + u \lambda_2 + \eta\}, \quad \text{q.s. em } [0, T]; \\ \eta + |\mu_1| + |\mu_2| &\neq 0. \end{aligned}$$

A condição de optimalidade nos permite encontrar

$$U_*(z, \lambda) = \begin{cases} -\text{sign } \lambda_2 & , \lambda_2 \neq 0 \\ ? & , \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Calculando agora $z(t), \lambda(t)$ para $t \in [0, T]$, obtemos⁴

$$z_2(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad z_1(t) = \int_0^t \int_0^s u(r) dr ds, \quad t \in [0, T]; \quad (5.8)$$

$$\lambda_1(t) = \mu_1, \quad \lambda_2(t) = (T-t)\mu_1 + \mu_2, \quad t \in [0, T]. \quad (5.9)$$

Analisando (5.7), concluímos que basta identificar o sinal e os zeros da função λ_2 para obtermos a estratégia ótima de controle. Estudamos assim os seguintes casos:

- λ_2 não possui zeros: de (5.7), segue que $u(t) \equiv 1$ ou $u(t) \equiv -1$. Entretanto, essas estratégias não são admissíveis, pois as respectivas trajetórias não alcançam o estado final;
- λ_2 possui zeros em $[0, T]$: de (5.9), temos que λ_2 é uma função linear em t . Logo, λ_2 possui apenas um zero em $[0, T]$, o qual denominamos τ .

Temos assim duas famílias de candidatos a controle ótimo:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ -1, & t > \tau \end{cases} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}.$$

Note que com os controles da segunda família não é possível atingir o estado final $z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para nenhum $T > 0$. Substituindo a expressão restante em (5.8), temos

$$z(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\tau^2 \\ \tau \end{pmatrix}; \quad z(T) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}T^2 + 2\tau T - \tau^2 \\ 2\tau - T \end{pmatrix}.$$

Da condição de contorno $z(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtemos para o par (τ, T) o sistema não linear

$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2}T^2 + 2\tau T - \tau^2 \\ 0 = 2\tau - T \end{cases}$$

cujas soluções são $\tau = 1, T = 2$, como se verifica facilmente. Portanto, a solução do problema de controle é

$$\bar{T} = 2, \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

□ □ □

Aplicação 5.3.2 (Tempo mínimo II) Consideramos agora uma variante da aplicação anterior. Suponha que no tempo $t = 0$ nosso carro se encontra na posição $a \in \mathbb{R}$ com velocidade $b \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é levá-lo até a origem no menor tempo possível, de forma que ao chegar ao destino, o carro tenha velocidade nula.

Temos agora o seguinte problema de controle

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \int_0^T 1 dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad z(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \\ \psi(T, z(T)) := z(T) = \theta \end{cases}$$

⁴Note que λ é calculado *para trás* no tempo.

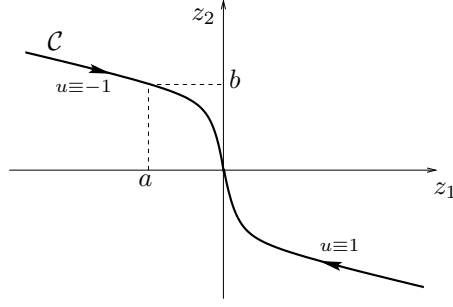


Figura 5.2: Trajetórias correspondentes aos controles ótimos $\bar{u} \equiv 1$ ou $\bar{u} \equiv -1$

onde $T \geq 0$, $u \in L^1[0, T]$ e $u(t) \in \Omega := [-1, 1]$ q.s. em $[0, T]$. As condições necessárias fornecidas pelo princípio do máximo são as mesmas, com excessão das condições de contorno para a variável de estado

$$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad z(T) = \theta.$$

$U_*(z, \lambda)$ é novamente dada pela equação (5.7) e os multiplicadores de Lagrange por (5.9). Portanto, λ_2 é linear e muda de sinal no máximo uma vez em $[0, T]$. Sendo assim, basta estudar os seguintes casos:

1º Caso: \bar{u} não muda de sinal em $[0, T]$.

- Se $\bar{u} \equiv 1$, temos

$$z_2(t) = b + t, \quad z_1(t) = a + bt + \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0, T].$$

Como $z(T) = \theta$, tais estratégias são admissíveis apenas para condições iniciais do tipo $(a, b) = (T^2/2, -T)$, com $T > 0$.

- Se $\bar{u} \equiv -1$, temos

$$z_2(t) = b - t, \quad z_1(t) = a + bt - \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0, T].$$

Como $z(T) = \theta$, tais estratégias são admissíveis apenas para condições iniciais do tipo $(a, b) = (-T^2/2, T)$, com $T > 0$.

A curva \mathcal{C} na Figura 5.2 é composta pelas condições iniciais (a, b) , para as quais as estratégias $\bar{u} \equiv 1$ ou $\bar{u} \equiv -1$ são ótimas. As respectivas trajetórias correspondem à parte da curva \mathcal{C} limitada por (a, b) e pela origem.

2º Caso: \bar{u} muda de sinal em $\tau \in (0, T)$.

No caso anterior vimos que, se $\bar{u} \equiv 1$, então $z_2(t)^2 = 2z_1(t) + const$; enquanto que $\bar{u} \equiv -1$ implica em $z_2(t)^2 = -2z_1(t) + const$. Portanto, as trajetórias correspondentes a tais controles são necessariamente paralelas a um dos arcos de parábola mostrados na Figura 5.3. De onde concluímos que a trajetória ótima é necessariamente composta por dois arcos: cada um pertencente a uma das famílias na Figura 5.3 (lembre que \bar{u} muda de sinal uma única vez no intervalo $[0, T]$).

Note que a parte final da trajetória ótima é necessariamente como na Figura 5.2 (caso contrário a trajetória não seria admissível). Para determinar a parte inicial da trajetória, observe que, dada uma condição inicial $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única curva pertencente às famílias mostradas na Figura 5.3, que intercepta tanto o ponto (a, b) quanto a curva \mathcal{C} (o caso $a > 0$, $b > 0$ é mostrado na Figura 5.4). O princípio do máximo nos permite concluir que existe uma única trajetória associada a controles do tipo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ -1, & t > \tau \end{cases} \quad \text{ou} \quad \bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

que é admissível para a condição inicial (a, b) . Tal trajetória é composta por dois arcos: um da curva \mathcal{E} limitado por (a, b) e pelo ponto P e outro da curva \mathcal{C} limitado por P e pela origem. Para calcular τ (instante em que trocamos o controle de -1 para 1) não é necessário calcular as constantes μ_1, μ_2 na equação (5.9). No caso $a > 0, b > 0$, basta descobrir para qual $\tau > 0$ a curva $(z_1(t), z_2(t)) = (a + bt - t^2/2, b - t)$ satisfaz a condição

$$z_2(\tau) < 0, \quad z_2(\tau)^2 = 2z_1(\tau).$$

Um cálculo simples mostra que τ é dado por uma das raízes $b \pm \sqrt{b^2/2 - a}$. □ □ □

Aplicação 5.3.3 (Alunissagem) Considere o problema de controlar a descida de uma espaçonave na Lua, utilizando para isso a menor quantidade possível de combustível. Em um modelo simplificado, temos⁵

- t : tempo;
- $h(t)$: altura da espaçonave;
- $v(t)$: velocidade da espaçonave;
- $m(t)$: massa da espaçonave + combustível;
- $u(t)$: empuxo dos motores da espaçonave.

Seja M a massa da espaçonave sem combustível, F a quantidade inicial de combustível, h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial, u_{max} o empuxo máximo dos motores da nave ($0 \leq u(t) \leq u_{max}, t \geq 0$), g a constante gravitacional da Lua (considerada constante) e k a constante de proporcionalidade entre o empuxo e a taxa de queima do combustível. As variáveis de estado (h, v, m) satisfazem a seguinte dinâmica:

$$\begin{cases} h' = v(t) \\ v' = -g + u(t)/m(t) \\ m' = -ku(t) \end{cases}$$

Definindo $z(t) = (h(t), v(t), m(t))$, temos o sistema não linear

$$\begin{cases} z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ -g + u/z_3 \\ -ku \end{pmatrix} =: f(t, z, u) \\ z(0) = (h_0, v_0, M + F), \quad z(T) = (0, 0, ?) \end{cases} \quad (5.10)$$

A condição final segue da hipótese que um pouso 'suave' ocorre quando $h(T) = 0$ e $v(T) = 0$, sendo para m somente relevante que $m(T) \geq M$. Como o custo a ser minimizado corresponde ao gasto de

⁵Este modelo é também discutido em [FIRi], [Ho] e [Know].

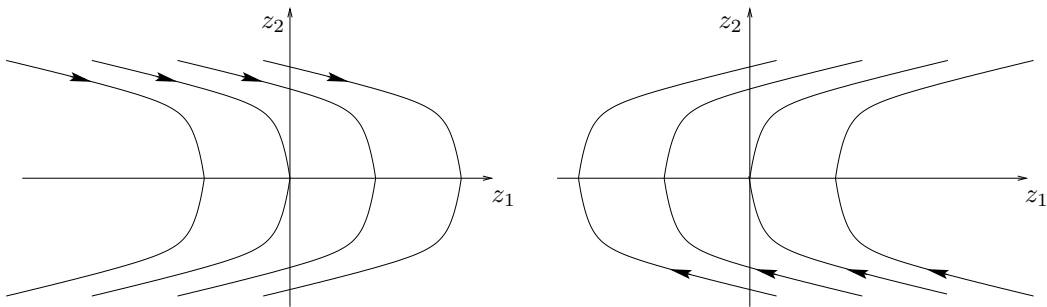


Figura 5.3: Trajetórias correspondentes a controles constantes

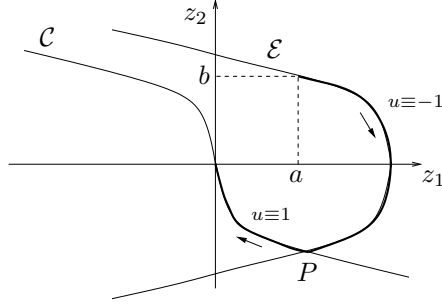


Figura 5.4: Trajetória ótima para a condição inicial $z(0) = (a, b)$

combustível, temos que maximizar

$$m(T) = M + F - k \int_0^T u(t) dt .$$

O problema de controle ótimo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(T, z, u) = \int_0^T u(t) dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in \{L^1[0, T] \mid u(t) \in \Omega := [0, u_{max}] \text{ q.s. em } [0, T]\}, \\ z' = f(z, u), z(0) = (h_0 \ v_0 \ M + F) \in \mathbb{R}^3, \\ \psi(T, z(T)) = (z_1(T) \ z_2(T)) = \theta \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

A função de Hamilton é

$$H(t, z, \lambda, u) = \langle \lambda, u \rangle + \eta L(t, z, u) = \lambda_1 z_2 + \lambda_2 (-g + u/z_3) - \lambda_3 k u + \eta u .$$

Minimizando a função de Hamilton em relação a u obtemos

$$U_*(z, \lambda) = \begin{cases} 0 & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 > 0 \\ ? & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 = 0 \\ u_{max} & , \eta + \lambda_2/z_3 - k\lambda_3 < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Tomamos por simplicidade $u_{max} = 1$. A fim de tornar o problema fisicamente coerente, supomos ainda

$$1 = \text{empuxo máximo} > \text{força gravitacional} = (M + F)g,$$

isto é $1/(M + F) > g$. É razoável considerar que existe uma estratégia ótima do tipo bang-bang, i.e. da forma

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, \xi] \\ 1 & , t \in [\xi, T] \end{cases} \quad (5.12)$$

Calculamos inicialmente a trajetória associada à estratégia \bar{u} . Como $\bar{u} \equiv 1$ em $[\xi, T]$, usamos o sistema (5.10) e as condições de contorno $z_1(T) = z_2(T) = 0$ e $z_3(\xi) = M + T$ a fim de determinar z no instante $t = \xi$. Obtemos assim

$$\begin{cases} z_1(\xi) = -\frac{1}{2}g(T - \xi)^2 - \frac{M+F}{k^2} \ln \left(\frac{M+F-k(T-\xi)}{M+F} \right) - \frac{T-\xi}{k} \\ z_2(\xi) = g(T - \xi) + \frac{1}{k} \ln \left(\frac{M+F-k(T-\xi)}{M+F} \right) \\ z_3(\xi) = M + F \end{cases}$$

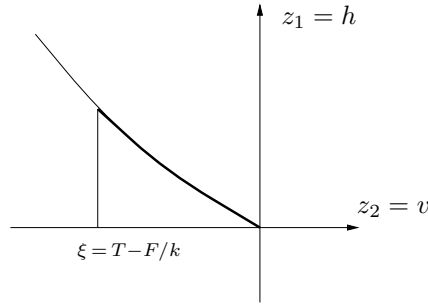


Figura 5.5: Condições iniciais (h, v) que são levadas pelo controle $\bar{u} \equiv 1$ à condição final $(0, 0, m(T))$ com $m(T) \geq M$.

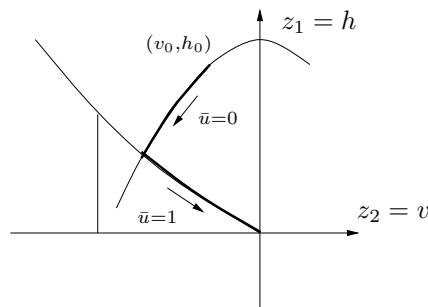


Figura 5.6: Trajetória correspondente à estratégia bang-bang \bar{u} .

Traçando o gráfico de $z_1(\xi)$ por $z_2(\xi)$, obtemos a curva da Figura 5.5, que é formada pelos estados da forma $z(\xi) = (h(\xi), v(\xi), M + F)$ que são levados pelo controle $\bar{u}(t) = 1$, $t \in [\xi, T]$ no estado final $z(T) = (0, 0, m(T))$ com $m(T) \geq M$. Note que o comprimento dessa curva é limitado pois, como $\bar{u} \equiv 1$, temos $m' = -k$ e o combustível se esgotará após F/k unidades de tempo. Temos assim a limitação $T - \xi \leq F/k$ (além de $T - \xi \geq 0$, obviamente).

Como inicialmente $\bar{u} \equiv 0$, a nave se encontra em *queda livre* durante o intervalo de tempo $[0, \xi]$. A trajetória correspondente é

$$\begin{cases} z_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 \\ z_2(t) = -gt + v_0 \\ z_3(t) = M + F \end{cases} \quad t \in [0, \xi].$$

Explicitando $z_1 (= h)$ em função de $z_2 (= v)$, obtemos:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2g}[v^2(t) - v_0^2], \quad t \in [0, \xi].$$

A curva $(v(t), h(t))$ é uma parábola no plano de fase $v \times h$. Unindo os dois trechos da trajetória correspondente a \bar{u} , obtemos a curva mostrada na Figura 5.6. Segundo essa trajetória, a nave cai em queda livre até que o estado (v, h) alcance a curva da Figura 5.5. Nesse momento os motores são acionados na potência máxima até um estado final admissível ser atingido ($\psi(T, z(T)) = \theta$).

Observe que se a intersecção das duas curvas na Figura 5.6 ocorre em um ponto $(v(\xi), h(\xi))$ com $\xi < T - F/k$, a quantidade de combustível não é suficiente para realizar um pouso *suave*. Enquanto

que se a condição inicial (v_0, h_0) se encontra abaixo da curva na Figura 5.5, mesmo empregando empuxo máximo $u(t) = 1, t \in [0, T]$, o solo lunar é atingido com $v(T) < 0$.

Através do princípio do máximo verificamos agora que a estratégia de controle definida em (5.12) é um candidato a controle ótimo. Suponha $\lambda(0) = (l_1 \ l_2 \ l_3)$. Substituindo na equação adjunta

$$\begin{cases} \lambda'_1 = 0 \\ \lambda'_2 = -\lambda_1 \\ \lambda'_3 = \lambda_2 u / z_3^2 \end{cases}$$

temos:

$$\lambda_1(t) = l_1, \ t \in [0, T]; \quad \lambda_2(t) = l_2 - l_1 t, \ t \in [0, T]; \quad \lambda_3(t) = l_3, \ t \in [0, \xi].$$

Como $z_3(t) = M + F - k(t - \xi), t \in [\xi, T]$, podemos calcular λ_3 no intervalo final de tempo, obtendo

$$\lambda_3(t) = l_3 + \int_{\xi}^t \frac{l_2 - l_1 s}{[k(\xi - s) + M + F]^2} ds, \ t \in [\xi, T].$$

Defina agora $r(t) := \eta + \lambda_2(t)/z_3(t) - k\lambda_3(t), t \in [0, T]$. De (5.11) sabemos que a escolha do controle \bar{u} no tempo t depende de $\text{sign}(r(t))$. Portanto, como a estratégia de controle \bar{u} *salta* de 0 para 1 em $t = \xi$, temos obrigatoriamente

$$r(\xi) = \eta + \frac{\lambda_2(\xi)}{z_3(\xi)} - k\lambda_3(\xi) = 0.$$

Escolhendo $\eta = 1$ (que satisfaz condição de transversalidade), reescrevemos a equação acima como

$$1 + \frac{l_2 - l_1 \xi}{M + F} - k l_3 = 0.$$

A escolha de \bar{u} em (5.12) implica em $r(t) > 0, t \in [0, \xi)$. Portanto, $l_1 > 0$, necessariamente.

O princípio do máximo fornece-nos ainda uma condição inicial para a equação adjunta:

$$\lambda(T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z}(T, z(T))^* \mu = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que $\lambda_3(T) = 0$. Obtemos assim para l_1, l_2, l_3 o sistema sub-determinado de equações lineares

$$\begin{cases} 1 + (M + F)^{-1}(l_2 - l_1 \xi) - k l_3 = 0 \\ l_3 + \int_{\xi}^T \frac{l_2 - l_1 s}{[k(\xi - s) + M + F]^2} ds = 0 \end{cases}$$

Considerando λ_2 como parâmetro, o sistema se reescreve como

$$\begin{cases} (M + F)^{-1} \xi l_1 + k l_3 = 1 + l_2 (M + F)^{-1} \\ \mathcal{P} l_1 - l_3 = \mathcal{Q} l_2 \end{cases}$$

onde $\mathcal{P} = \int_{\xi}^T s [k(\xi - s) + M + F]^{-2} ds$ e $\mathcal{Q} = \int_{\xi}^T [k(\xi - s) + M + F]^{-2} ds$ são constantes positivas. Resolvendo o novo sistema obtemos:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1 + ((M + F)^{-1} + k\mathcal{Q})l_2] / [\xi(M + F)^{-1} + k\mathcal{P}] \\ \mathcal{P}[1 + ((M + F)^{-1} + k\mathcal{Q})l_2] / [\xi(M + F)^{-1} + k\mathcal{P}] - \mathcal{Q}l_2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Note que para $t \in [\xi, T)$, temos

$$\begin{aligned} r(t) &= 1 + (l_2 - l_1 t)/z_3(t) - k\lambda_3(t) \\ &< 1 + l_2/M - k l_3 + (\mathcal{P} - \xi/(M + F))l_1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Substituindo em (5.14) as expressões encontradas em (5.13) para l_1 e l_3 , obtemos uma restrição linear para escolha de l_2 . Outra restrição (também linear) para l_2 é dada por $l_1 > 0$ e (5.13). Como o problema assim colocado possui solução não única, é possível encontrar uma condição inicial (l_1, l_2, l_3) , de forma que a função r satisfaça

$$\begin{cases} r(t) > 0, & t \in [0, \xi) \\ r(t) < 0, & t \in (\xi, T] \end{cases}$$

provando que \bar{u} satisfaz as condições do princípio do máximo.

Verificamos agora que \bar{u} é o único candidato fornecido pelo princípio de Pontryagin. A função $r(t)$ obtida de (5.11) determina quando ocorrem *saltos* na estratégia de controle. Note ainda que, como $\lambda_1 \equiv l_1$, então $\lambda'_2 \equiv -l_1$ e temos

$$\begin{aligned} r'(t) &= (\lambda'_2 z_3 - \lambda_2 z'_3) z_3^{-2} - k\lambda'_3 \\ &= \lambda'_2/z_3 - \lambda_2(-ku)z_3^{-2} - k\lambda_2 u z_3^{-2} \\ &= -l_1/z_3(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Analizamos separadamente as situações possíveis:

- $l_1 \neq 0$: Como $z_3(t) = m(t) > 0$, então r é monótona. Se $l_1 > 0$, obtemos um controle do tipo \bar{u} . Se $l_1 < 0$, obtemos uma estratégia oposta, i.e. inicialmente $u = 1$ e depois $u = 0$. Com essa estratégia não é possível obter um pouso *suave*. De fato, ou (v_0, h_0) se situa abaixo ou acima do gráfico na Figura 5.5. No primeiro caso, já vimos que $v(T) < 0$. No segundo caso, como u é da forma

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau) \\ 0, & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

obtemos do sistema adjunto

$$v(T) - v(\tau) = \int_{\tau}^T v'(t) dt = \int_{\tau}^T -g dt = -g(T - \tau).$$

Logo, uma condição necessária para $v(T) = 0$ é que $T = v(\tau)/g + \tau$. Novamente do sistema adjunto obtemos

$$\begin{aligned} -h(\tau) &= h(T) - h(\tau) = \int_{\tau}^T h'(t) dt = \int_{\tau}^T v(t) dt \\ &= \int_{\tau}^T g(T - t) dt = \frac{g}{2}(T - \tau)^2, \end{aligned}$$

isto é $h(\tau) = -v^2(\tau)/2g < 0$. Portanto, a transição de 1 para 0 na estratégia de controle ocorre abaixo da superfície da Lua, e o pouso obviamente não é *suave*.

- $l_1 = 0$: Neste caso, $r' = 0$ e r é constante. Se $r \neq 0$, os possíveis candidatos são $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$. O primeiro controle obviamente não permite pouso *suave*. Já o segundo será ótimo somente se (v_0, h_0) pertence à curva na Figura 5.5, quando a estratégia se torna idêntica a \bar{u} . Por fim, se $r = 0$, temos

$$1 + l_2 \frac{1}{z_3(t)} + k\lambda_3(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

isto é, as funções $\{1, z_3^{-1}, \lambda_3\}$ são linearmente dependentes. Mas isto é uma contradição pois

$$z_3(t) = M + F - k \int_0^t u(s) ds, \quad \lambda_3(t) = l_2 \int_T^t u(s) z_3(s)^{-2} ds.$$

Portanto, o único controle admissível que satisfaz as condições do princípio do máximo é \bar{u} definido em (5.12). □ □ □

Aplicação 5.3.4 (Controle singular) Considere o problema escalar de controle

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \frac{1}{2} \int_0^3 z(t)^2 dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in L^1[0, 3], \quad u(t) \in \Omega := [-1, 1] \text{ q.s. em } [0, 3], \\ z' = u, \quad z(0) = z(3) = 1. \end{cases}$$

O tempo final $T = 3$ e a condição final para a trajetória $z(T) = 1$ são fixados através da condição:

$$\psi(T, z(T)) = \begin{pmatrix} 1 - z \\ T - 3 \end{pmatrix} = \theta \in \mathbb{R}^2.$$

Do princípio do máximo, obtemos as condições necessárias:

$$\begin{aligned} z' &= u, \quad z(0) = z(3) = 1; \\ \lambda' &= -\eta z, \quad \lambda_1 = \mu_1; \\ H(t, z, \lambda, u) &= \lambda u + \frac{1}{2} \eta z^2, \quad H_1 = \mu_2; \\ \eta + |\mu_1| + |\mu_2| &\neq 0. \end{aligned}$$

A condição de máximo implica em $U_*(z, \lambda) = -\text{sign } \lambda$. Note que $\eta = 0$ não pode ocorrer, pois implica em $\lambda' = 0$. Logo, $u \equiv 1$ ou $u \equiv -1$, mas ambas as estratégias não são admissíveis. Suponha então $\eta = 1$. Logo $\lambda'(0) = -1$. Supondo $\lambda(0) \leq 0$, temos:

- Se $\lambda(0) \leq 0$ e $\lambda(t) < 0$, $t \in [0, 3]$, então $u \equiv 1$, o que implica em $z(3) = 4$ (contradizendo a condição de contorno final).
- Se $\lambda(0) \leq 0$, $\lambda(t_1) = 0$ para algum $t_1 > 0$ e $\lambda(t) < 0$, $t \in (0, t_1)$, então $\lambda'(t_1) \geq 0$. Mas

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in (0, t_1) \Rightarrow z(t) > 0, \quad t \in (0, t_1] \Rightarrow \lambda'(t) < 0, \quad t \in (0, t_1],$$

contradizendo a conclusão $\lambda'(t_1) \geq 0$.

Concluimos assim que $\lambda(0) > 0$. De forma análoga prova-se que $\lambda(3) < 0$. Portanto, a função λ possui pelo menos um zero em $(0, 3)$. Seja t_1 o menor e t_2 o maior zero de λ em $(0, 3)$. Provamos agora que $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$:

- Note que $t_1 \neq t_2$, pois se λ possui apenas um zero, então $z(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0, 3/2] \\ t-2, & t \in [3/2, 3] \end{cases}$, que obviamente não é uma trajetória ótima;
- Em $[0, t_1)$ temos: $u(t) = -1$, $z(t) = 1 - t$, $\lambda(t) = \lambda(0) - t + \frac{1}{2}t^2$. Como $\lambda(t_1) = 0$, então $t_1 = 1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda(0)}$. Se t_1 assume o valor da maior raiz, temos $t_1 > 1$ e a trajetória associada a λ não é ótima, pois $\bar{z}(t) := \begin{cases} z(t), & z(t) \geq 0 \\ 0, & z(t) < 0 \end{cases}$ satisfaz

$$\int_0^3 \bar{z}(t)^2 dt < \int_0^3 z(t)^2 dt.$$

Logo, $t_1 = 1 - \sqrt{1 - 2\lambda(0)} \leq 1$.

- Se $t_1 < 1$, então $\lambda'(t_1) = -z(t_1) < 0$. Seja $\hat{t} > 1$, tal que $\lambda(t) < 0$, $t \in (t_1, \hat{t})$ e $\lambda(\hat{t}) = 0$. Logo, $\lambda'(\hat{t}) \geq 0$.
De $\lambda(t) < 0$, segue $u(t) \equiv 1$, $t \in (t_1, \hat{t})$. Como $z(t_1) > 0$ e $z'(t) = u(t) = 1$, $t \in (t_1, \hat{t})$, temos $z(t) \geq 1 - t_1 > 0$, $t \in [0, \hat{t}]$. Então $\lambda'(\hat{t}) = -z(\hat{t}) < 0$ (contradição).

Concluimos assim que $t_1 = 1$. De modo análogo, prova-se que $t_2 = 2$. Provamos agora que $\lambda(t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$. De fato, se $\lambda(t) > 0$ (o caso < 0 é análogo) para algum $t \in (t_1, t_2)$, então existem $\hat{t}_1, \hat{t}_2 \in [t_1, t_2]$ tais que $\lambda(t) > 0$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ e $\lambda(\hat{t}_1) = \lambda(\hat{t}_2) = 0$. Logo, $u(t) = -1$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ e portanto $\lambda''(t) = (-z(t))' = -u(t) = 1$, $t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$, o que é claramente uma contradição. Portanto, a estratégia ótima de controle tem de ser

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in (1, 2) \\ +1, & t \in [2, 3] \end{cases} .$$

(Note que a trajetória $z \equiv 0$ é um extremal singular do problema e a trajetória ótima \bar{z} é do tipo: bang-singular-bang.) □ □ □

Aplicação 5.3.5 (Consumo \times Investimento) Tratamos a seguir um problema clássico da economia, que foi um dos primeiros a ser considerado sob a ótica do cálculo variacional. Consideramos o seguinte problema macroeconômico: Como equacionar a relação entre consumo e investimento, a fim de otimizar o desenvolvimento econômico?

Suponha que a economia de uma nação é representada pelas variáveis

- $K(t)$: Capital no tempo t ;
- $C(t)$: Consumo;
- $Y(t)$: Produção (produto interno);
- $K'(t)$: Investimento (variação do Capital);

ao longo do intervalo de tempo $t \in [0, \infty)$. Considere ainda o seguinte modelo simplificado:

- i) $Y = g(K)$, onde $g' > 0$ e $g'' \leq 0$;
- ii) $C = Y - K'$ (parte da produção é consumida e o restante é reinvestido);
- iii) $K(0) = K_0$ (o capital inicial é conhecido);
- iv) $U = U(C)$ é a utilidade do capital, onde $U' > 0$, $U'' < 0$;
- v) $\delta > 0$ é o fator de desconto.

O objetivo é encontrar uma política ótima de investimento para o problema:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(C(t)) dt \\ \text{sujeito a} & K' = g(K) - C, \quad K(0) = K_0. \end{cases}$$

Este problema foi originalmente formulado e resolvido por Ramsey em 1928 (veja [Ra]). A hipótese $C = g(K) - K'$ permite-nos analisar este problema utilizando cálculo variacional. Note que a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$K'' - g'(K)K' + \frac{U'(g(K) - K')}{U''(g(K) - K')}(\delta - g'(K)) = 0 .$$

No caso geral esta equação não pode ser resolvida analiticamente. Fazemos aqui a hipótese simplificada:

$$U(r) = \frac{1}{1-q} r^{1-q}, \quad g(r) = br,$$

onde $b > 0$, $q \in (0, 1)$. Neste caso particular a equação de Euler–Lagrange fica simplificada, na forma de uma equação que sabemos resolver:

$$qK'' + (\delta - b - qb)K' + b(b - \delta)K = 0.$$

Calculando as raízes do polinômio característico, temos $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = a := q^{-1}(b - \delta)$. Portanto, as soluções que satisfazem a condição inicial $K(0) = K_0$ são da forma:

$$\bar{K}(t) = (K_0 - A)e^{at} + Ae^{bt}, \quad t \geq 0,$$

onde A é um parâmetro livre. Suponha agora que $b > a$, i.e. $\delta > (1 - q)b$. Neste caso, as hipóteses do modelo:

$$C(t) = g(K(t)) - K'(t) > 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) \geq 0$$

são satisfeitas respectivamente para $A \geq 0$ e $A < K_0$. Para determinar o parâmetro $A \in [0, K_0)$ é necessária uma condição de contorno para a equação da dinâmica – por exemplo $K'(0)$ ou $K(\infty)$. Como tal condição não é explicitamente fornecida, é preciso analisar a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman, que para este problema autônomo se escreve como

$$-\delta V(x) + \min_{u \in \Omega} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, g(x) - u \right\rangle + \frac{1}{1-q} u^{1-q} \right\} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(note que $\delta = b - qa$). É fácil verificar que $V(x) := (1 - q)/(b - a)^q x^{1-q}$, $x \geq 0$ é solução da equação acima. Note ainda que se $A = 0$ a condição

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} V(\bar{K}(t)) = 0$$

é satisfeita, pois $a(1 - q) < 0$ por hipótese. Portanto, $V(x)$ e a trajetória $\bar{K}(t) = K_0 e^{at}$ satisfazem as condições do teorema, de onde concluímos que uma estratégia ótima de consumo é dada por

$$\bar{C}(t) = (b - a)K_0 e^{at}, \quad t \geq 0.$$

□ □ □

Exercícios

5.1 Considere o problema de Bolza

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 dt + z_1(1)^2 + z_2(1)^2 \\ \text{sujeito a} & \\ u \in L^1[0, 1], & z_1' = z_2, \quad z_2' = u, \quad z_1(0) = z_2(0) = 0. \end{cases}$$

- Formule o princípio do máximo para o problema acima.
- Obtenha o processo ótimo.

5.2 Considere o problema de controle ótimo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \int_0^T [z_1(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in L^1[0, T], z'_1 = z_2, z'_2 = -z_2 + u, z_1(0) = 1, z_2(0) = 0. \end{array} \right.$$

- a) Formule o princípio do máximo para o problema acima.
 b) Obtenha o processo ótimo.

5.3 Considere o problema de controle ótimo escalar

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \frac{1}{2} \int_0^1 [3z(t)^2 + u(t)^2] dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in L^1[0, 1], z' = -z + u, z(0) = 1. \end{array} \right.$$

- a) Formule o princípio do máximo para o problema acima.
 b) Obtenha o processo ótimo.

5.4 (Problema de Investimento) Suponha que um determinado produto é fabricado com a taxa $z(t)$. No tempo $t > 0$ uma fração $u(t)$ da produção é reinvestida para aumentar a produção, sendo o restante vendido para geração de lucro. O objetivo é determinar uma política de investimento ótima, de forma a maximizar o lucro total no horizonte fixo de tempo $[0, T]$. Temos assim o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \int_0^T (1 - u(t))z(t) dt \\ \text{sujeito a} \\ z' = uz, z(0) = z_0 > 0, z(t) \geq 0, u \in \hat{C}[0, T] \end{array} \right.$$

- a) Reescreva o problema como um problema variacional com restrições lagrangeanas: $y'(t) \geq 0$, $y'(t) \leq y(t)$.
 b) Obtenha condições necessárias para o novo problema.
 c) Encontre a taxa ótima de produção \bar{y} .

5.5 (Problema do Café) Uma xícara cheia de café à temperatura de 100°C deve ser esfriada a temperatura de 0°C por adição de uma quantidade fixa de creme de leite. Uma equação aproximada para evolução da temperatura z da mistura é dada por

$$z' = -z - 25u - uz/4.$$

As condições de contorno são $z(0) = 100$, $z(T) = 0$.

- a) Obtenha condições necessárias para o problema de tempo ótimo sujeito às restrições $0 \leq u(t) \leq 1$, $t \in [0, T]$, $\int_0^T u(t) dt = 1$, impostas ao fluxo externo de líquido u .
 b) Use o fato $z' < 0$ para obter um problema equivalente com intervalo de tempo fixo. O que se pode afirmar sobre a unicidade da solução obtida no item a).
 (Sugestão: A nova variável livre é $s = z$.)

Bibliografia

- [Al] ALT, W., *Stabilität mengenwertiger Abbildungen mit Anwendungen auf nichtlineare Optimierungsprobleme*, Bayreuther Mathematische Schriften, 3, 1979
- [An] ANAND, D.K., *Introduction to Control Systems. 2nd ed.*, Pergamon Press, Oxford, 1984
- [AtFa] ATHANS, M. E FALB, P.L., *Optimal Control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966
- [BaNe] BALAKRISHNAN, A.V. E NEUSTADT, L.W., EDS., *Computing Methods in Optimization Problems*, Proceedings of a conference held at University of California, Los Angeles, January 1964, Academic Press, London, 1964
- [BaCa] BARDI, M. E CAPUZZO-DOLCETTA, I., *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 1997
- [Bar] BARNETT, S., *Matrices in Control Theory with Applications to Linear Programming*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971
- [BaLe] BAUMEISTER, J. E LEITÃO, A., *Optimal exploitation of renewable resource stocks: Necessary conditions*, *Optimal Control Appl. Meth.*, a ser publicado
- [BLS1] BAUMEISTER, J., LEITÃO, A. E SILVA, G.N., *Optimal control problems with infinite horizon whose control laws contain measures: Maximum principle*, Proceedings of the 3rd International Conference on Nonlinear Dynamics, Campos do Jordão, Brazil, July 2000, a ser publicado
- [BLS2] BAUMEISTER, J., LEITÃO, A. E SILVA, G.N., *Value function for problems with infinite horizon*, *J. Math. Anal. Appl.*, a ser publicado
- [Be] BELLMAN, R.E., *Introduction to the Mathematical Theory of Control Process, Vol I: Linear equations and quadratic criteria*, Academic Press, New York, 1967
- [BeDr] BELLMAN, R.E. E DREYFUS, S.E., *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1962
- [Ber] BERKOVITZ, L.D., *Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New York, 1974
- [Bo] BOLTYANSKI, W.G., *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*, Carl Hanser Verlag, München, 1972
- [Br] BROKATE, M., *Kontrolltheorie*, Vorlesungskript, Universität Hamburg, 1984
- [Bro] BRONSON, R., *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Coleção Schaum, Editora Mc Graw Hill

- [BD] BOYCE, E.A. E DIPRIMA, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1999
- [BMS] BULIRSCH, R., MIELE, A., STOER, J. E WELL, K.H., EDS., *Optimal control: Calculus of Variations, Optimal Control Theory and Numerical Methods*, International Series of Numerical Mathematics, 111, Birkhäuser, Basel, 1993
- [CaHa] CARLSON, D.A. E HAURIE, A.B., *Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications*, Springer Verlag, Heidelberg, 1987
- [Cl] CLARK, C.W., *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources. 2nd ed.*, John Wiley and Sons, New York, 1990
- [CCM] CLARK, C.W., CLARKE, F.H. E MUNRO, G.R. *The optimal exploitation of renewable resource stocks: Problems of irreversible investment*, *Econometrica*, **47** (1979), 25 – 47
- [CLSW] CLARKE, F.H., LEDYAEV, YU.S., STERN, R.J. E WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1998
- [Cod] CODDINGTON, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1961; New York, Dover, 1989
- [CrLi] CRANDALL, M.G. E LIONS, P.L., *Viscosity solutions of Hamilton–Jakobi Equations*, *Trans. of the American Mathematical Society*, **277** (1983), 1 – 42
- [FIRi] FLEMING, W.H. E RISHEL, R.W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer Verlag, Berlin, 1975
- [FISo] FLEMING, W.H. E SONER, H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer Verlag, New York, 1993
- [Fö1] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen I: Grundlagen und harmonische Balance*, Oldenbourg Verlag, München, 1969
- [Fö2] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen II: Anwendung der Zustandsebene*, Oldenbourg Verlag, München, 1970
- [Fö3] FÖLLINGER, O., *Nichtlineare Regelungen III: Ljapunow-Theorie und Popow-Kriterium*, Oldenbourg Verlag, München, 1970
- [Gan] GANTMACHER, F.R., *Applications of the Theory of Matrices*, Intersciences Publishers, New York, 1959
- [Gol] GOLDENSTINE, H., *A History of the Calculus of Variations, from 17th through the 19th Century*, Springer Verlag, New York, 1980
- [Gon] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*, Projeto Euclides, 7, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979
- [Gr] GROETSCH, C.W., *Generalized Inverses of Linear Operators*, Dekkeric, New York, 1977
- [Ha] HALKIN, H., *Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons*, *Econometrica* **42** (1974), 267 – 272
- [Hes] HESTENES, M.R., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, London, 1966

- [Heu] HEUSER, H., *Funktionalanalysis. 3. Aufl.*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1992
- [HeLa] HERMES, H.R. E LASALLE, J.P., *Functional Analysis and Time-Optimal Control*, Academic Press, New York, 1969
- [Ho] HOCKING, L.M., *Optimal Control: An Introduction to the Theory with Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1991
- [Hon] HONIG, C.S., *Aplicações da Topologia à Análise*, Projeto Euclides / IMPA, Rio de Janeiro, 1976
- [Is] ISIDORI, A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction. 2nd ed.*, Springer Verlag, Berlin, 1989
- [Je] JETSCHKE, G., *Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1989
- [KIF] KNOBLOCH, H.W., ISIDORI, A. E FLOCKERZI, D., *Topics in Control Theory*, DMV Seminar, 22, Birkhäuser, Basel, 1993
- [KnKw] KNOBLOCH, H.W. E KWAKERNAAK, H., *Lineare Kontrolltheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1985
- [Know] KNOWLES, G., *An Introduction to Applied Optimal Control*, Academic Press, San Francisco, 1981
- [Kra] KRABS, W., *Einführung in die Kontrolltheorie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978
- [Kre] KREYZIG, R., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978
- [LeMa] LEE, E.B. E MARKUS, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons, London, 1967
- [Leig] LEIGH, J.R., *Functional Analysis and Linear Control Theory*, Academic Press, London, 1980
- [Leit] LEITÃO, A., *On optimal control problems with infinite horizon*, Proceedings of the 3rd International Conference on Nonlinear Dynamics, Campos do Jordão, Brazil, July 2000, a ser publicado
- [Lei] LEITMANN, G., *The Calculus of Variations and Optimal Control: An Introduction*, Plenum Press, London, 1981
- [Lim] LIMA, E.L., *Álgebra Linear*, Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 2001
- [Lio] LIONS, J.L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Heidelberg 1971
- [LiYo] LI, X. E YONG, J., *Optimal control theory for infinite dimensional systems*, Birkhäuser, Basel, 1994

- [MaSt] MACKI, J. E STRAUSS, A., *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer Verlag, Heidelberg, 1981
- [Mo] MORGAN, F., *Geometric Measure Theory: A Beginner's guide*, Academic Press, Boston, 1988
- [Mu] MURRAY, J.M., Existence theorems for optimal control and calculus of variations problems where the state can jump, *SIAM J. Control and Optimization*, **24** (1986), 412 – 438
- [Pi] PIEHLER, J., *Einführung in die dynamische Optimierung*, B.G. Teubner, Leipzig, 1966
- [Pin] PINCH, E.R., *Optimal Control and the Calculus of Variations*, Oxford University Press, New York, 1997
- [PBG] PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKIJ, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. E MISHCHENKO, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, 1962 (edição original em russo, 1961)
- [Ra] RAMSEY, F.P., *A mathematical theory of saving*, *Economic Journal*, **38** (1928), 543 – 549
- [Ri] RISHEL, R.W., *An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures*, *SIAM J. Control*, **3** (1965), 191 – 205
- [Ru1] RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1973
- [Ru2] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966
- [Sc] SCHECK, F., *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos. 3rd ed.*, Springer Verlag, Berlin, 1999
- [SeSy] SEIERSTAD, A. E SYDSÆTER, K., *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [SeZh] SETHI, S.P. E THOMPSON, G.L., *Optimal Control Theory: Applications to Management Science*, Martinus Nijhoff Publishing, Boston, 1981
- [SHB] SCHMIDT, W.H., HEIER, K., BITTNER, L. E BULIRSCH, R., EDS., *Variational Calculus, Optimal Control and Applications*, Proceedings of the 12th International Conference in Honour of L. Bittner and R. Kloetzler, Trassenheide, Germany, September, 1996, International Series of Numerical Mathematics, 124, Birkhäuser, Basel, 1998
- [SFG] SKOWRONSKI, J.M., FLASHNER, H. E GUTTALU, R.S., EDS., *Mechanics and control*, Proceedings of the 3rd Workshop on Control Mechanics, in Honor of the 65th Birthday of George Leitmann, January, 1990, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 151, Springer Verlag, Berlin, 1991
- [SiVi] SILVA, G.N. E VINTER, R.B., *Necessary conditions for optimal impulsive control problems*, *SIAM J. Control Optimization*, **35** (1997), 1829 – 1846
- [So] SONTAG, E.D., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1998
- [Sot] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979
- [Sn] SNIEDOVICH, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, New York, 1992

- [Tr] TROUTMAN, J.L., *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity. 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1996
- [ViPe] VINTER, R.B. E PEREIRA, F.M.F.L., *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories*, SIAM J. Control and Optimization, **26** (1988), 205 – 229
- [Wa1] WALTER, W., *Analysis II. 2. Aufl.*, Springer Verlag, Berlin, 1991
- [Wa2] WALTER, W., *Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Aufl.*, Springer Verlag, Berlin, 1996
- [We] WERNER, J., *Optimization: Theory and Applications*, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1984
- [Za] ZABCZYK, J., *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1992
- [ZoKu] ZOWE, J. E KURCYUSZ, S., *Regularity and stability for the mathematical programming problem in Banach spaces*, Appl. Math. Optimization, **5** (1979), 49 – 62