

LEIS DE CONSERVAÇÃO COM APLICAÇÕES AO TRÁFEGO NAS CIDADES

ARTHUR V. F. DE AZEVEDO & CESAR S. ESCHENAZI

PREFÁCIO

O objetivo destas notas é fazer um primeiro estudo de leis de conservação, introduzindo, entre outros, os conceitos de onda de choque, onda de rarefação e solução fraca, além de introduzir o tratamento numérico às leis de conservação lineares. Como aplicação desses conceitos descrevemos os fenômenos ondulatórios que aparecem na solução de equações que modelam o fluxo de trânsito.

Por se tratar de um estudo introdutório dirigido a estudantes que concluíram os cursos de cálculo, incluindo nesse rol as primeiras disciplinas de equações diferenciais, apresentamos os conceitos acima mencionados somente para o caso de leis de conservação escalares. Por entender que um dos objetivos da Bienal da SBM é permitir que estudantes ainda no início de seus cursos tomem conhecimento de tópicos mais avançados com tratamento adequado para o seu nível, propusemos este mini-curso a fim de possibilitar o contato com as equações não lineares que aparecem naturalmente na modelagem de fenômenos realísticos.

Alguns tópicos que não foram tratados nestas notas tais como condição de entropia e método de viscosidade, bem como outros fenômenos ondulatórios, podem ser encontrados em [5] com a mesma abordagem destas notas.

Finalmente, gostaríamos de agradecer aos comitês organizador e científico da II Bienal da SBM a oportunidade de apresentar este mini-curso.

Belo Horizonte/Brasília
Setembro de 2004.

Este trabalho recebeu apoio parcial da FEMAT-Fundação de Estudos em Ciências Matemáticas.

SUMÁRIO

Prefácio	1
1. Leis de Conservação -Exemplos de Leis de Conservação	3
1.1. Leis de Conservação	3
1.2. Exemplos de Leis de Conservação	6
2. O Método das Características:	9
2.1. Equação de Advecção Homogênea:	9
2.2. Equação de Advecção Não Homogênea:	11
2.3. Leis de Conservação Lineares:	12
2.4. Leis de Conservação Não Lineares:	13
3. Ondas de Choque:	16
4. Ondas de Rarefação:	24
5. Soluções Fracas de Leis de Conservação:	29
6. Introdução ao Método das Diferenças Finitas	32
6.1. Introdução	32
6.2. Esquemas numéricos	33
6.3. Convergência, Consistência e Estabilidade	37
6.4. A Condição CFL	40
Referências	41

1. LEIS DE CONSERVAÇÃO - EXEMPLOS DE LEIS DE CONSERVAÇÃO

1.1. **Leis de Conservação.** Nestas notas começaremos o estudo de sistemas de equações diferenciais parciais da forma

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, e $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Estas equações são geralmente denominadas *leis de conservação* em analogia a exemplos de sistemas que surgem na física, tais como conservação de massa, conservação de energia e conservação de momento. Por se tratar de um estudo introdutório nos limitaremos ao estudo de leis de conservação escalares, $n = 1$, que permite introduzir de forma intuitiva os conceitos de onda de choque e onda de rarefação, presentes no estudo de fenômenos de ondas não lineares.

Definição: Uma *Lei de Conservação* é uma equação que avalia de todas as formas possíveis como uma porção de uma entidade física pode variar. Esta avaliação é um dos princípios básicos da modelagem matemática e pode ser aplicada a uma grande variedade de entidades físicas tais como massa, momento, energia, população e etc.

Suponha que um meio unidimensional, ao longo do eixo- x , contém uma quantidade Q de alguma substância que pode mover-se ou fluir. Vamos obter uma lei de conservação geral que descreve a porção de Q no meio, no tempo t .

Seja $u(x, t)$ a densidade ou concentração de Q na posição x no tempo t . Seja S uma seção qualquer do meio com extremidades α e β , como mostra a figura 1. Q pode variar em S de duas formas:

1. Q entra (ou sai) de S através dos extremos α e β
2. Q é adicionado (ou removido) ao meio na seção S .

Se denotarmos por Q_α a taxa com que Q entra ou sai de S pelo extremo α , por Q_β a taxa com que Q entra ou sai de S por β , por Q_{int} a taxa com que Q é adicionado ou removido de S e por $\frac{dQ}{dt}$ a taxa de variação de Q em S , segue-se que:

$$(1) \quad \frac{dQ}{dt} = Q_\alpha + Q_\beta + Q_{int}$$

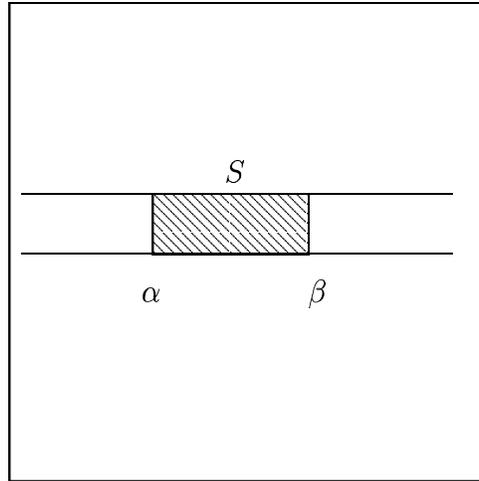


Figura 1: Uma seção S do meio unidimensional com extremidades α e β .

Lembrando que $u(x, t)$ é a densidade de Q ao longo do meio, tem-se que o total de Q em S é dado por $\int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx$. Assim, a taxa de variação de Q em S é dada por

$$(2) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx$$

A taxa com que Q entra em S através de um dos seus extremos será descrita por uma função de fluxo, que denotaremos por $\phi(x, t)$. $\phi(x, t) > 0$ indica que o fluxo está na direção do crescimento de x e $\phi(x, t) < 0$ indica o contrário.

A taxa com que Q entra em S através de um dos seus extremos será descrita por uma função de fluxo, que denotaremos por $\phi(x, t)$. $\phi(x, t) > 0$ indica que o fluxo está na direção do crescimento de x e $\phi(x, t) < 0$ indica o contrário. Assim, a taxa com que Q entra em S por $x = \alpha$ é $\phi(\alpha, t)$. Se $\phi(\alpha, t) > 0$, temos que o fluxo está no sentido esquerda-direita e, se $\phi(\alpha, t) < 0$, temos que o fluxo está no sentido direita-esquerda.

A taxa com que Q entra em S por $x = \beta$ é $-\phi(\beta, t)$. O sinal negativo é necessário pois, se $\phi(\beta, t) > 0$, indica perda de Q em S e, se $\phi(\beta, t) < 0$, indica que Q está aumentando em S .

Segue-se que a taxa com que Q entra em S através de seus extremos é

$$(3) \quad \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t).$$

Representaremos por $f(x, t)$ a taxa com que Q está sendo adicionada ao (ou removida do) meio na posição x no tempo t . Uma tal função f é denominada função fonte. Valores positivos dessa função indicam que Q está sendo adicionado (ou gerado) na posição x , no tempo t e valores negativos significam o contrário. Assim a taxa total com que Q está sendo adicionado em S é dado por:

$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx.$$

Substituindo-se as equações (2), (3), (4) na equação (1) obtemos:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t) + \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx.$$

A equação (5) é denominada *forma integral da lei de Conservação*.

A equação (5) pode ser reescrita como:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \phi_x(x, t) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)) dx = 0.$$

Se as funções $u_t(x, t)$, $\phi_x(x, t)$ e $f(x, t)$ são contínuas em S e α e β quaisquer, o fato dessa integral ser nula implica que o integrando $u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)$ é nulo, ou seja,

$$(6) \quad u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t).$$

A equação (6) é denominada *forma diferencial da Lei de Conservação*. Nestas notas trabalharemos apenas com a forma diferencial das leis de conservação.

A equação (6) relaciona 3 funções: a função densidade, a função de fluxo e a função fonte. As duas primeiras são as funções incógnitas e a função fonte geralmente é determinada pelo problema físico modelado. Uma segunda equação relacionando $u(x, t)$ e $\phi(x, t)$ é dada a partir de evidências experimentais ou a partir de hipóteses sobre o problema físico modelado. Esta segunda relação entre u e ϕ é denominada *equação constitutiva*. Em geral nossos modelos consistem de duas partes: A lei de conservação e a equação constitutiva.

A equação constitutiva frequentemente fornece o fluxo ϕ como função da densidade u , isto é, $\phi = \phi(u)$. Nesse caso, a equação (6) se escreve como

$$(7) \quad u_t(x, t) + \phi'(u)u_x = f(x, t).$$

1.2. Exemplos de Leis de Conservação . Nesta seção deduziremos a lei de conservação e a equação constitutiva para dois problemas, Reação química em um tubo e fluxo de trânsito. Esses dois problemas dão origem, respectivamente, a leis de conservação linear e não linear cujas soluções serão estudadas nas próximas seções.

Exemplo 1: Reação química em um tubo.

Considere um tubo longo no qual inserimos um produto químico A por um dos seus extremos, dentro do tubo ocorre uma reação e um produto químico B é recolhido na outra extremidade do tubo, como mostra a figura 2. Se denotarmos por $u(x, t)$ a concentração (massa por unidade de comprimento) do produto A na posição x , no tempo t , segue-se da seção anterior que a lei de conservação geral para $u(x, t)$ é dada por

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t),$$

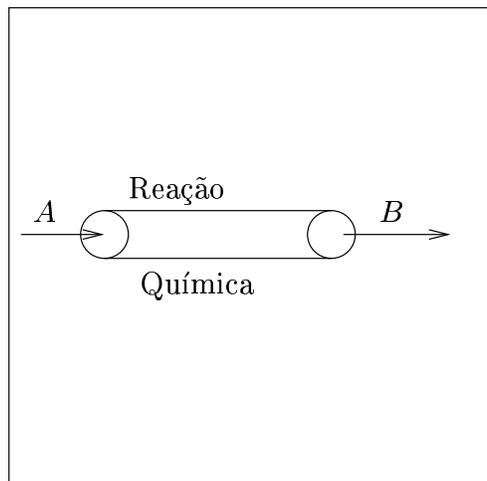


Figura 2: Esquema da reação química em cadeia do exemplo 1.

onde $\phi(x, t)$ é a taxa (massa por unidade de tempo) com que o produto A passa pela posição x , no tempo t e $f(x, t)$ é a taxa com que o produto A (massa/por tempo por unidade de comprimento) desaparece na posição x , no tempo t , devido a reação química.

A fim de modelar a lei de conservação para a reação acima vamos supor que:

- 1- A reação que ocorre no interior do tubo move-se da esquerda para a direita com velocidade constante a .
- 2- A taxa com que o produto A se transforma no produto B no interior do tubo é proporcional à concentração de A .

A primeira hipótese implica que o fluxo $\phi(x, t) = au(x, t)$ e a segunda implica que $f(x, t) = -ku(x, t)$, onde k é uma constante positiva e o sinal negativo indica que o produto A está desaparecendo. Com isso a lei de conservação para a reação química é a seguinte:

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = -ku(x, t).$$

Observação : A relação $\phi(x, t) = au(x, t)$ é um exemplo de equação constitutiva obtida a partir da hipótese que fizemos para a modelagem do problema. Este tipo de função de fluxo descreve um processo de *advecção* ou *convecção* no qual a mudança no valor de $u(x, t)$ ocorre devido ao movimento do meio.

Exemplo 2: Fluxo de Trânsito:

A popularização do uso de automóveis e a falta de infra-estrutura das cidades para comportar o aumento “repentino” de tráfego, tornaram os problemas de congestionamentos cada vez mais agudos. Com o objetivo de amenizar as conseqüências desses problemas, a partir de meados do século passado estudos científicos procuram responder algumas perguntas tais como: Quanto tempo um sinal (semáforo) pode ficar fechado (luz vermelha) sem comprometer o fluxo de trânsito das vias? Como desenvolver um sistema progressivo de sinais de trânsito (as chamadas “onda verde”) em grandes vias urbanas? Onde construir entradas e saídas das vias principais? As respostas a essas e a muitas outras perguntas relacionadas permitem entender e solucionar, parcial ou totalmente, os problemas gerados pelo complexo fenômeno do tráfego.

Nestas notas trataremos de problemas de tráfego mais simples como o fluxo de trânsito em uma rua de mão única com apenas uma faixa, a formulação matemática desse problema ocorreu no final dos anos 50. Estudos mais detalhados desse problema podem ser encontrados em [3, 9].

Vamos considerar o trânsito em uma via de mão única com apenas uma faixa em um trecho que não tem entradas e saídas. Vamos representar por $u(x, t)$ a densidade de carros (número de carros por quilômetro) na posição x no tempo t . Esta função em princípio é uma função discreta pois carros são objetos discretos, contudo, vamos supor $u(x, t)$ é uma representação contínua da densidade de tráfego. A lei de conservação geral para a densidade de tráfego $u(x, t)$ é dada por

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t).$$

A função fonte $f(x, t)$ neste caso representa a taxa de carros que entram ou saem do trecho da via analisado. Como por hipótese não existem entradas e saídas laterais no trecho analisado temos $f(x, t) = 0$.

A função de fluxo $\phi(x, t)$ representa a taxa com que os carros passam na posição x no tempo t . Para um observador fixo ao longo da via, a taxa com que os carros passam por ele depende da densidade de tráfego u e da velocidade v . Se v é medido em km/hora temos que o fluxo ϕ é dado por

$$\phi = u(\text{carros/km}).v (\text{km/hora}) = uv \text{ carros/hora}.$$

A velocidade v depende de vários fatores tais como condições climáticas, densidade de tráfego, hora do dia, entre outras. Por simplicidade vamos supor que a velocidade v dos carros depende somente da densidade de tráfego, ou seja, quanto maior o número de carros menor a velocidade.

Para deduzir nosso modelo, suponha que se a densidade de tráfego é nula ($u = 0$) ou quase nula a velocidade máxima que cada carro pode atingir é v_1 . Suponha além disso, que a densidade máxima u_1 de carros/km só é atingida quando o trânsito estiver totalmente parado, ou seja, $v = 0$. Dessa forma a velocidade v é uma função linear de u e é dada por

$$v = v_1 - \frac{v_1}{u_1}u, \quad 0 \leq u < u_1.$$

Segue-se que a função de fluxo $\phi = uv$ é dada pela expressão

$$\phi(u) = v_1\left(u - \frac{u^2}{u_1}\right).$$

Calculando ϕ_x e substituindo na lei de conservação geral obtemos que a lei de conservação que modela a densidade de tráfego com aproximação linear da velocidade é dada por:

$$(8) \quad u_t + v_1\left(1 - \frac{2u}{u_1}\right)u_x = 0.$$

2. O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS:

Nesta seção usaremos o conceito de curvas características para construir soluções do problema de valor inicial

$$(9) \quad \begin{cases} u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x, t) \end{cases}$$

A geometria das soluções geradas por curvas características nos permite tratar o problema (9) de forma simples mesmo nos casos não lineares que, em geral são de tratamento difícil.

Definição: Características são curvas especiais no plano (x, t) que transmitem o perfil do dado inicial $u(x, 0)$ no tempo, isto é, são curvas ao longo das quais $u(x, t)$ é constante.

2.1. Equação de Advecção Homogênea: O caso mais simples de leis de conservação que aparece é quando a equação constitutiva é da forma $\phi(x, t) = au(x, t)$, a constante. Uma lei de conservação com este tipo de equação constitutiva é denominada *equação de advecção*. Para esta ϕ e $f(x, t) = 0$ o problema (9) se escreve como

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Começamos considerando a curva $(x(t), t)$ com ponto inicial $(x_0, 0)$ no plano (x, t) . A taxa de variação de u ao longo dessa curva, é dada por

$$(10) \quad \frac{du(x, t)}{dt} = u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt} + u_t(x(t), t).$$

Observe que se $\frac{dx}{dt} = a$, o lado direito de (10) é a equação de advecção. Segue-se que

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = u_t(x(t), t) + au(x(t), t) = 0,$$

ou seja, u é constante ao longo desta curva particular e, portanto, o valor de u em cada ponto da curva é o mesmo que $u(x_0, 0) = u_0(x_0)$.

Observação: Ao longo da característica a equação diferencial parcial se transforma em uma equação diferencial ordinária.

Para o caso considerado, a curva característica é obtida resolvendo-se o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

o que dá, $x(t) = at + x_0$. Assim as características para a equação de advecção homogênea são retas paralelas no plano xt com inclinação $\frac{1}{a}$.

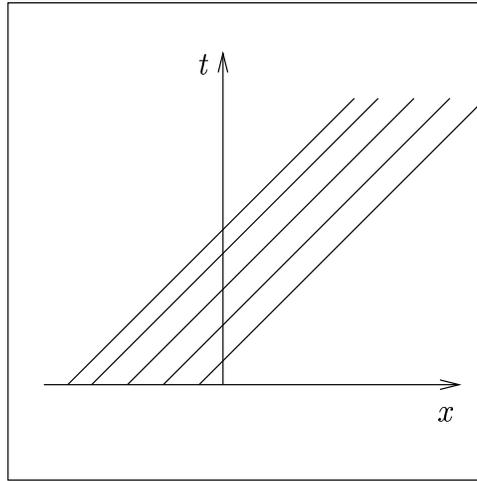


Figura 3: Curvas Características da Equação de Advecção .

Para sabermos a solução num determinado ponto (x_*, t_*) do plano procedemos como segue:

1. Encontramos a curva característica passando pelo ponto dado.
2. Encontramos o ponto $(x_0, 0)$, interseção da característica com o eixo x , e calculamos $u_0(x_0)$.

O ponto x_0 é dado por $x_0 = x - at$, isto é, $u(x, t) = u_0(x - at)$.

Exemplo 1: Ache a solução de

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

usando o método das características

Solução: Ao longo da curva característica $(x(t), t)$ tem-se

$$\frac{du}{dt} = u_t + \frac{dx}{dt}u_x.$$

Pondo $\frac{dx}{dt} = 2$ com $x(0) = x_0$, temos que a curva característica é dada por $x(t) = 2t + x_0$. Ao longo desta curva (reta) $u(x, t)$ é constante e seu valor em qualquer ponto é dado por

$$u(x, t) = u_0(x_0, 0) = u_0(x_0) = e^{-x_0^2} = e^{-(x-2t)^2},$$

pois $x_0 = x - 2t$.

2.2. Equação de Advecção Não Homogênea: Nesta seção usaremos o método das características para resolver o problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = f, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

O método de construção da solução do problema não homogêneo é análogo ao da seção anterior: Se $(x(t), t)$ é uma curva no plano xt , segue-se que a taxa de variação da função $u(x, t)$ ao longo da curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt}.$$

Se $\frac{dx}{dt} = a$, o lado direito da última equação é a equação de advecção, o que leva ao problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(x(t), t) = f(x(t), t) \\ u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) \end{cases}$$

Exemplo: Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = -u, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \end{cases}$$

usando o método das características

Solução: Pelo exemplo da seção anterior sabemos que as curvas características para essa equação são dadas por $x = 2t + x_0$. A taxa de variação de $u(x, t)$ ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -u.$$

Resolvendo-se essa equação obtemos $u(x(t), t) = Ce^{-t}$. Lembrando que $C = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = \frac{1}{1+x_0^2}$ tem-se que $u(x, t) = \frac{1}{1+x_0^2}e^{-t}$. Usando o fato de que $x_0 = x - 2t$ tem-se

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - 2t)^2}e^{-t}.$$

Exercício: Resolva os problemas abaixo usando o método das características.

a.

$$\begin{cases} u_t + 4u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \arctg(x), \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} u_t + 4u_x = 1, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{arctg}(x), \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = k, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

2.3. Leis de Conservação Lineares: Nesta seção usaremos o método das características para resolver problemas de valor inicial de leis de conservação lineares da forma

$$(11) \quad \begin{cases} u_t + a(x, t)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x_0), \end{cases}$$

Contrariamente aos casos estudados nas duas seções anteriores aqui o coeficiente a pode não ser constante, isto é, $a = a(x, t)$. Nestes problemas a característica com ponto inicial $(x_0, 0)$ é obtida resolvendo-se o problema:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

O fato de a ser não constante implica que as características não são necessariamente retas como nos caso de equação de advecção. Contudo, como veremos abaixo a solução $u(x, t)$ permanece constante ao longo das curvas características.

Se $(x(t), t)$ é uma curva característica, a taxa de variação de u ao longo desta curva é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt}.$$

Como $(x(t), t)$ é uma característica tem-se que $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$ e, dessa forma, o lado direito da última equação é a lei de conservação considerada em (11). Segue-se que $\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0$, ou seja, $u(x, t)$ é constante ao longo das curvas características.

o valor da função $u(x, t)$, solução do problema (11), em um ponto (x_*, t_*) no plano xt é obtido da seguinte forma:

1. Encontre a característica passando por (x_*, t_*) e determine o ponto $(x_0, 0)$, interseção da característica com o eixo x .
2. Usando x_0 tem-se que $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$.

Exemplo: Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

- a. Mostre que as curvas características com ponto inicial $(x_0, 0)$ são dadas por $x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}$.
- b. Encontre a solução $u(x, t)$ do problema.

Solução:

a. As curvas características para o problema dado são obtidas resolvendo-se o problema $\frac{dx}{dt} = tx$ com $x(0) = x_0$. Usando-se o método da separação de variáveis tem-se que a solução de $\frac{dx}{dt} = tx$ é dada por $x(t) = ae^{\frac{t^2}{2}}$. Como $a = x(0) = x_0$, tem-se que as curvas características são dadas por $x(t) = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}$.

b. Sabemos que ao longo das características $\frac{du}{dt} = 0$. Integrando-se ambos os lados em relação a t temos que $u(x, t) = k$, k constante. O valor de k é obtido fazendo-se $t = 0$, isto é, $k = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$. Assim, $u(x, t) = \frac{1}{1+x_0^2}$, do item a tem-se que $x_0 = x e^{-\frac{t^2}{2}}$. Dessa forma a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + x^2 e^{-t^2}}.$$

2.4. Leis de Conservação Não Lineares: Nesta seção vamos considerar o caso mais geral, ou seja, estudaremos leis de conservação em que a equação constitutiva é da forma $\phi = \phi(u)$. Usando a regra da cadeia na lei de conservação geral, $u_t + \phi_x = 0$, obtemos que esta se escreve como $u_t + \phi'(u)u_x = 0$. Pondo $\phi'(u) = a(u)$, temos $u_t + a(u)u_x = 0$. Vamos supor ainda que $a(u)$ é não constante o que significa que a equação é não linear, resumindo nesta seção usaremos o método das características para resolver o seguinte problema

$$(13) \quad \begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

com $a(u)$ não constante.

A curva característica é obtida resolvendo-se o problema

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u(x, t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Observe que como não conhecemos a função $u(x, t)$ não é possível se determinar a curva característica. Contudo, seja qual for a função $u(x, t)$, sabemos que ela será constante ao longo da curva $(x(t), t)$ solução de (14) uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx}{dt} \\ &= u_t(x(t), t) + a(u(x(t), t))u_x(x(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Segue-se que o valor de u ao longo da característica é o mesmo valor de u no ponto inicial $(x_0, 0)$, ou seja, $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$. Dessa forma o problema (14) se reescreve como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u_0(x_0)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

que tem solução $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$. Como no caso da equação de advecção as características são retas que não são necessariamente paralelas pois a inclinação dessas retas é dada por $\frac{1}{a(u_0(x_0))}$ que depende do valor da função u no ponto inicial $(x_0, 0)$.

Observação: O fato das retas características não serem paralelas pode ocasionar interseção entre as mesmas, isto significa que a solução por características só é válida até o tempo t de interseção. Este tipo de problema será tratado na próxima seção.

O procedimento para se determinar o valor da solução u em um ponto (x_*, t_*) do plano é:

- a. Construir as características $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$, usando a velocidade $a(u)$ e o dado (perfil) inicial $u_0(x_0)$.
- b. Determinar o ponto inicial, $(x_0, 0)$, da característica passando por (x_*, t_*) , resolvendo-se $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$ para x_0 .
- c. Use o x_0 encontrado para calcular $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$.

Exemplo: Para $\phi = \frac{u^2}{2}$, a lei de conservação geral se escreve como $u_t + uu_x = 0$, denominada *equação de Burgers sem viscosidade*. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Solução: A velocidade característica é $a(u) = u$, assim, $a(u_0(x_0)) = u_0(x_0)$ a característica começando em $(x_0, 0)$ é obtida resolvendo-se (14) com $u_0(x_0)$ em lugar de $a(u(x, t))$ o que dá:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{if } x_0 \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x_0}t} + x_0 & \text{if } x_0 > 0, \end{cases}$$

Para $x \leq 0$, a característica passando pelo ponto (x, t) é uma reta vertical com ponto inicial $(x, 0)$. Nesse caso a condição inicial dá $u(x, t) = u(x, 0) = 0$.

Para $x > 0$, a abscissa do ponto de partida, $(x_0, 0)$ é obtida resolvendo-se $x = e^{-\frac{1}{x_0}t} + x_0$ para x_0 ; contudo, neste caso, isto não pode ser feito explicitamente. Independentemente, o valor de u no ponto (x, t) é calculado por $u(x, t) = u(x_0, 0) = e^{-\frac{1}{x_0}t}$.

Assim, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x_0}t} & \text{if } x > 0, \quad x_0 + e^{-\frac{1}{x_0}t} = x, \end{cases}$$

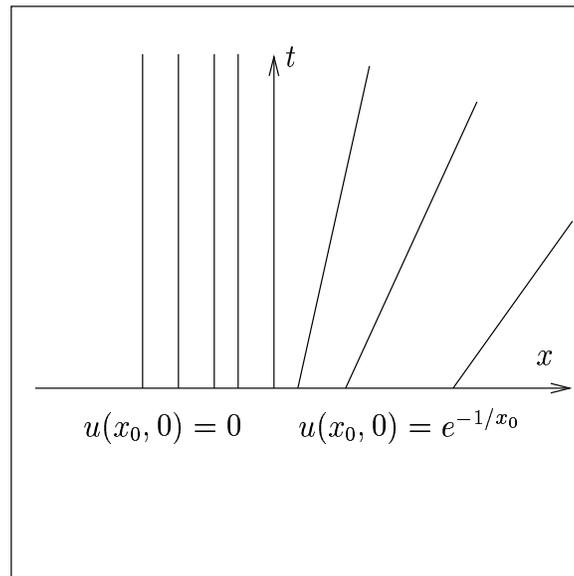


Figura 4: Características da equação de Burgers com dado inicial do exemplo

3. ONDAS DE CHOQUE:

Na seção anterior vimos que as características para o problema:

$$(15) \quad \begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

com $a(u)$ não constante, são geralmente retas não paralelas com inclinação $a(u_0(x_0))$. Como observamos no final daquela seção o fato das retas serem não paralelas implica que pode haver interseção entre as características, o que significa que a solução do problema a partir do ponto de interseção não está bem definida. Em outras palavras podemos usar o método das características para construir a solução $u(x, t)$ começando em $t = 0$ mas terminando no tempo $t = t_i$, correspondente ao primeiro ponto de interseção das características. Nosso objetivo nessa seção é estender a solução $u(x, t)$ além do tempo t_i permitindo que $u(x, t)$ seja uma função contínua por partes. Esta solução descontínua é denominada *onda de choque*.

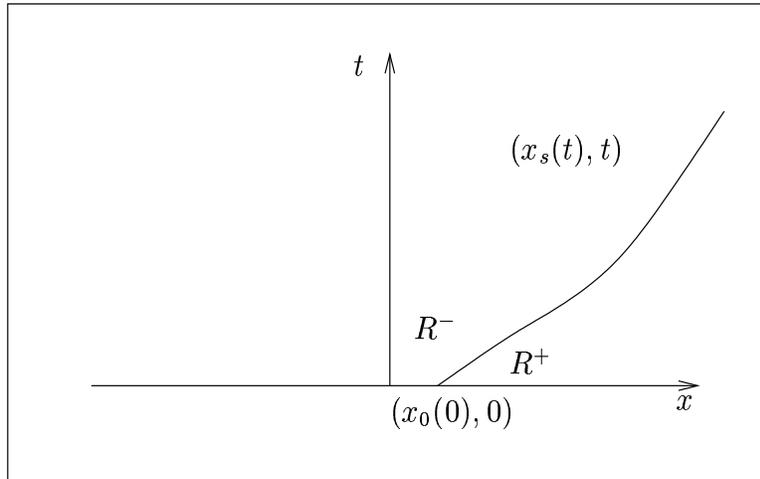


Figura 5: A curva $(x_s(t), t)$ que divide o plano xt em duas regiões.

Para descrever essas soluções, seja $(x_s(t), t)$ uma curva no plano xt que divide o semiplano $t > 0$ em duas partes, R^+ a direita de $x_s(t)$ e R^- a esquerda de $x_s(t)$, como mostra a figura 5.

Definição: Uma função $u(x, t)$ é denominada solução contínua por partes do problema (15) descontinuidade do tipo salto ao longo da curva $(x_s(t), t)$, se $u(x, t)$ tem as seguintes propriedades:

- 1- $u(x, t)$ tem derivadas primeiras contínuas em R^+ e R^- e satisfaz o problema

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in R^-, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x < x_s(0), \end{cases}$$

em R^- e o problema

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in R^+, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x > x_s(0), \end{cases}$$

em R^+

2. Em cada ponto (x_0, t_0) da curva $(x_s(t), t)$ os limites de $u(x, t)$ com $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, $(x, t) \in R^-$ e $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, $(x, t) \in R^+$ existem mas não são necessariamente iguais.

Embora a solução de uma lei conservação por características deixe de existir a partir da interseção de duas ou mais características, o processo físico modelado pela lei de conservação não se encerra necessariamente. Estenderemos a solução $u(x, t)$ além do tempo t_i permitindo que ela seja contínua por partes mas de forma que continue a obedecer a lei de conservação, isto é, de forma que seja fisicamente relevante.

Suporemos que as características do problema (15) começam a se interseccionar em $t = 0$. Para estender a solução obtida pelo método das características desenhamos uma curva $(x_s(t), t)$ pela região de cruzamento das características para separá-las. Embora existam muitas curvas com esta propriedade, a curva correta será selecionada pela lei de conservação, em outras palavras, a curva correta é a que satisfaz as propriedades físicas do fenômeno modelado.

De fato, suponha que $u(x, t)$ é uma solução contínua por partes do problema (15) com descontinuidade do tipo salto ao longo de $x_s(t)$. Segue-se que u satisfaz a $u_t + a(u)u_x = 0$ em R^+ e R^- , mas suas derivadas primeiras deixam de existir em pontos da curva. Para se entender o que acontece em pontos da curva $(x_s(t), t)$, usaremos a forma integral da lei de conservação (5) com $f = 0$, ou seja, usaremos a forma integral da lei de conservação sem fontes que é dada por

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t).$$

Fixando-se um ponto $(x_s(t), t)$ na curva, tome α e β tais que $\alpha < x_s(t) < \beta$. A integral em (16) pode ser escrita como

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = \int_{\alpha}^{x_s(t)^-} u(x, t) dx + \int_{x_s(t)^+}^{\beta} u(x, t) dx,$$

onde $x_s(t)^-$ e $x_s(t)^+$ são, respectivamente, os limites à esquerda e à direita do ponto $(x_s(t), t)$.

Substituindo-se esta última expressão em (16) e usando a regra da cadeia para calcular as derivadas envolvidas, a lei de conservação se escreve como

$$\int_{\alpha}^{x_s(t)^-} u_t(x, t) dx + u(x_s^-, t) \frac{dx_s}{dt} + \int_{x_s(t)^+}^{\beta} u_t(x, t) dx - u(x_s^+, t) \frac{dx_s}{dt} = \phi(\alpha, t) - \phi(\beta, t)$$

fazendo-se $\alpha \rightarrow x_s^-(t)$ e $\beta \rightarrow x_s^+(t)$ tem-se

$$(u(x_s^+, t) - u(x_s^-, t)) \frac{dx_s}{dt} = \phi(x_s^+(t), t) - \phi(x_s^-(t), t),$$

ou, equivalentemente,

$$(17) \quad \frac{dx_s}{dt} = \frac{\phi(x_s^+(t), t) - \phi(x_s^-(t), t)}{u(x_s^+, t) - u(x_s^-, t)}.$$

Isto mostra que a curva $(x_s(t), t)$ deve ser tal que sua derivada satisfaz a relação (17) dada pela forma integral da lei de conservação. A equação diferencial (17) é conhecida como *condição de salto de Rankine-Hugoniot* para $u(x, t)$, denotada por R-H, e $\frac{dx_s}{dt}$ representa a velocidade de propagação da descontinuidade, denominada *velocidade de choque*, que denotaremos por s .

Por simplicidade denotaremos o lado direito de (17) por

$$\frac{[\phi]}{[u]} = \frac{\phi^+ - \phi^-}{u^+ - u^-}$$

Definição: Uma solução contínua por partes $u(x, t)$ de (13) com salto ao longo de uma curva $x_s(t)$ satisfazendo a condição de salto de Rankine-Hugoniot é denominada uma *onda de choque solução da lei de conservação*. A curva $x_s(t)$ é denominada *caminho de choque*.

Exemplo 1: Determine uma onda de choque solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Solução: As características para o problema são dadas por $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$, o que dá

$$x_s(t) = \begin{cases} 2t + x_0 & \text{if } x_0 \leq 0 \\ t + x_0 & \text{if } x_0 > 0, \end{cases}$$

começam a se cortar na origem do plano xt , por este motivo vamos considerar o ponto inicial do caminho de choque como sendo o ponto $(0, 0)$. Para encontrar o caminho de choque usamos a condição de salto de Rankine-Hugoniot e resolvemos o problema de valor inicial

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[\phi]}{[u]}, \quad x(0) = 0,$$

com $\phi(u) = \frac{u^3}{3}$. Observe que como $[\phi] = \frac{1}{3}(u^{+3} - u^{-3})$ e $[u] = u^+ - u^-$, temos

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{3} \left(\frac{u^{+3} - u^{-3}}{u^+ - u^-} \right) = \frac{1}{3} (u^{+2} + u^+ u^- + u^{-2}),$$

lembrando que $u^+ = 1$ e $u^- = 2$, a última igualdade se escreve como $\frac{dx}{ds} = 7/3$, o que implica $x_s(t) = \frac{7}{3}t$. Como anteriormente, as soluções para $(x, t) \in R^-$ e $(x, t) \in R^+$ são encontradas pelo método das características. Isso leva a

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{if } x < \frac{7}{3}t \\ 1 & \text{if } x > \frac{7}{3}t, \end{cases}$$

Exemplo 2: Tráfego no sinal fechado.

Vamos supor uma via como a considerada no modelo do exemplo 2 da seção 1.2, com as seguintes condições:

- 1- Os carros que já estão parados estão alinhados com densidade máxima u_1 carros /km.
- 2- Os carros que chegam têm densidade uniforme u_0 carros/km. Como u_1 é máxima tem-se $0 < u_0 < u_1$.

Para esse problema, como vimos na seção 1.2, a função de fluxo é dada por $\phi = uv$, onde v é definida por $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$, e v_1 é a

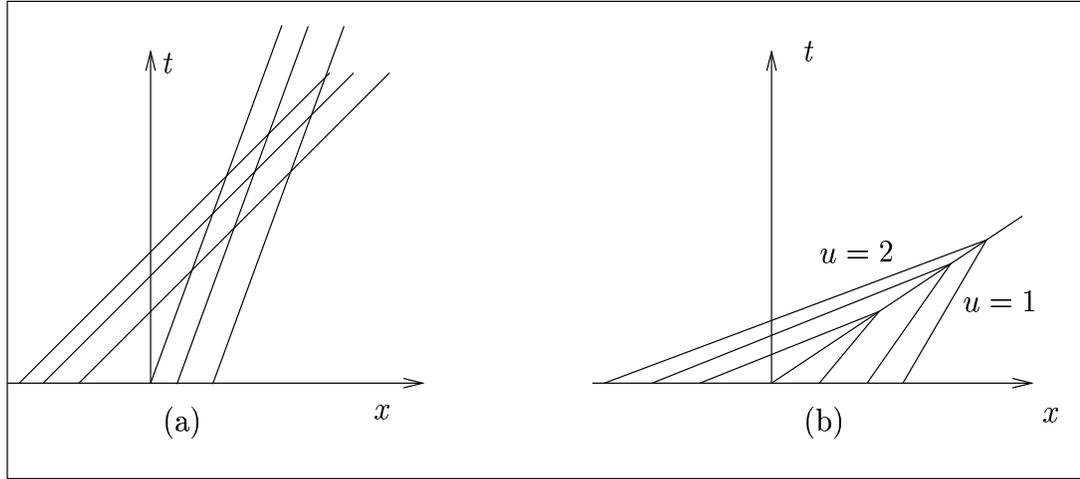


Figura 6: (a) Características do exemplo 1, (b) Caminho de choque para o exemplo 1

velocidade máxima na via, o fluxo é dado por

$$\phi = v_1 \left(u - \frac{u^2}{u_1} \right).$$

A lei de conservação para esse problema é a lei definida pela equação (8), e o problema de valor inicial que resolveremos é:

$$\begin{cases} u_t + v_1 \left(1 - \frac{2u}{u_1} \right) u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{if } x < 0 \\ u_1 & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

as características são dadas por $x(t) = a(u(x_0, 0))t + x_0$. Para este problema, $a(u) = v_1 \left(1 - \frac{2u}{u_1} \right)$, isto é

$$x(t) = \begin{cases} v_1 \left(1 - \frac{2u_0}{u_1} \right) t + x_0 & x_0 < 0 \\ -v_1 t + x_0 & x_0 > 0, \end{cases}$$

Observe que a característica pode ter inclinação positiva ou negativa dependendo de $v_1 \left(1 - \frac{2u}{u_1} \right)$ ser positivo ou negativo. Se $u_0 < \frac{u_1}{2}$ a inclinação é positiva e se $u_0 > \frac{u_1}{2}$ a inclinação é negativa.

Os diagramas das características são mostrados na figura 8.

Como as características se cruzam na origem, o caminho de choque é obtido resolvendo-se o problema de valor inicial:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{[\phi]}{[u]}, \quad x_s(0) = 0,$$

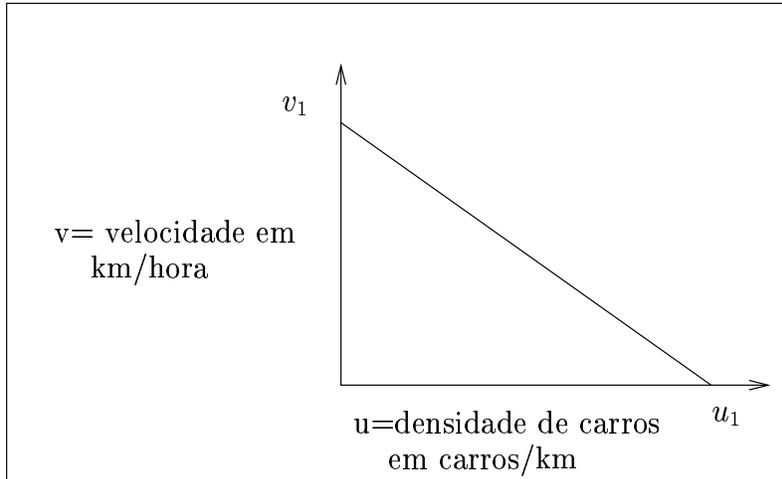


Figura 7: Gráfico da função de fluxo com a modelagem linear do exemplo 2 .

para calcular $\frac{[\phi]}{[u]}$ lembramos que $[\phi] = \phi(u^+) - \phi(u^-)$ e $[u] = u^+ - u^-$. Assim,

$$[\phi] = v_1\left(u^+ - \frac{u^{+2}}{u_1}\right) - v_1\left(u^- - \frac{u^{-2}}{u_1}\right) = v_1(u^+ - u^-) - \frac{v_1}{u_1}(u^{+2} - u^{-2}),$$

o que implica em,

$$\frac{[\phi]}{[u]} = v_1 - \frac{v_1}{u_1}(u^+ + u^-).$$

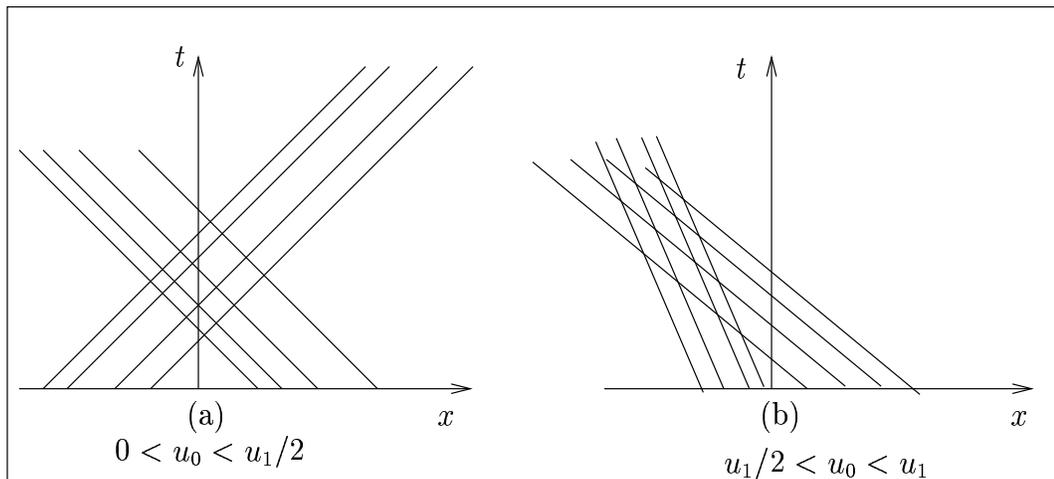


Figura 8: Características para o exemplo do tráfego na luz vermelha.

Para esse problema $u^+ = u_1$ e $u^- = u_0$, substituindo esses valores em $\frac{d[\phi]}{[u]}$ tem-se que $\frac{dx_s}{dt} = -v_1 \frac{u_0}{u_1}$. Integrando em relação a t , temos que o caminho de choque é a reta $x_s(t) = -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$. A interpretação física para o caminho de choque obtido é que a velocidade com que a última fila de carros parados se propaga para trás é $v_1 \frac{u_0}{u_1}$ km/hora. A solução para pontos (x, t) com $x < -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$ e para pontos (x, t) com $x > -v_1 \frac{u_0}{u_1} t$ são obtidas como anteriormente pelo método das características. Dessa forma $u(x, t)$ é da forma

$$(18) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_0 & x < -v_1 \frac{u_0}{u_1} t \\ u_1 & x > -v_1 \frac{u_0}{u_1} t. \end{cases}$$

O caminho de choque para o caso $0 < u_0 < u_1/2$ é mostrado na figura 9

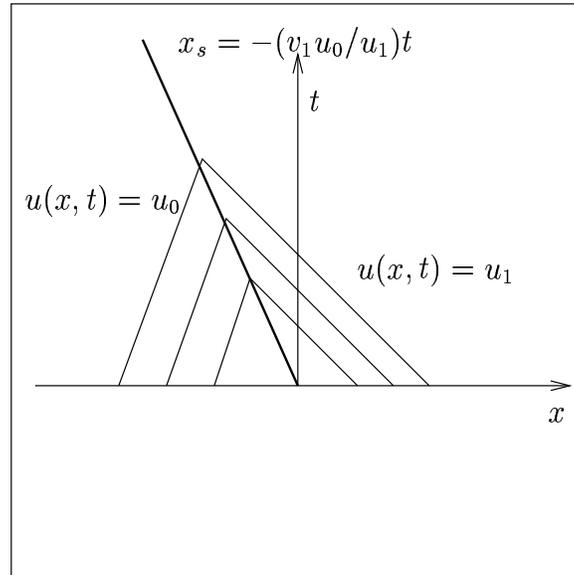


Figura 9: Caminho de choque para o caso $0 < u_0 < u_1/2$

Exemplo 3: Considerando o exemplo 2, suponha que a densidade de tráfego máxima é $u_1 = 300$ carros/km e que a velocidade máxima ao longo da via é $v_1 = 45$ km/hora. Suponha além disso que a velocidade com que o fluxo de trânsito chega na última linha de carros parados é $v = 15$ km/hora. Resolva o problema de valor inicial para esses dados

Solução:

Observe que para esse exemplo não foi dada a densidade de carros do fluxo de tráfego que chega na última linha de automóveis parados, pelo

exemplo 2, a velocidade com que os carros chegam na última linha de carros parados é $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$. Segue-se daí que $15 = 45(1 - \frac{u_0}{300})$ o que implica $u_0 = 200$ carros/km. Ainda segundo o exemplo 2, temos que o caminho de choque é a reta $x_s(t) = -30t$ o que significa que a velocidade com que a última linha de carros parados se propaga para trás é de 30 km/hora. A solução (18) para este exemplo se escreve como:

$$u(x, t) = \begin{cases} 200 & x < -30t \\ 300 & x > -30t. \end{cases}$$

Exercícios:

Exercício 1: Resolva o problema de valor inicial para a equação de Burgers sem viscosidade

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0 \\ 0 & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Exercício 2: Suponha que a velocidade do tráfego que chega na última linha de carros parados é 30 km/hora.

- a. Considere a velocidade com a última linha de carros parados se propaga para trás em direção ao tráfego que chega. Sem calcular o caminho de choque você diria que esta velocidade seria maior ou menor do que a velocidade de 30 km/hora do exemplo 3?
- b. Determine o caminho de choque e a onda de choque do problema de valor inicial do exemplo 2 para esses dados e represente a solução no plano xt . Qual a diferença entre a velocidade do caminho de choque da solução desse exercício para a do exemplo 3?

Exercício 3: Suponha que a velocidade dos carros é modelada por $v = v_1(1 - \frac{u^2}{u_1^2})$.

- a. Esboce o gráfico de v como uma função da densidade de tráfego u . Compare com o gráfico do modelo de velocidade do exemplo 2, qual dos dois modelos é mais realista?
- b. Encontre a onda de choque solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{if } x < 0 \\ u_1 & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

com função de fluxo ϕ modelada por $\phi = uv = v_1(u - \frac{u^3}{u_1^2})$. Faça um esboço da solução no plano xt .

c. Resolva o item **b** com os dados do exemplo 3.

4. ONDAS DE RAREFAÇÃO:

Além da interseção das características uma outra particularidade das equações não lineares é a possibilidade de existir regiões do plano xt onde essas curvas não estão definidas. O objetivo desta seção é modificar o método das características nessas regiões de modo que possamos obter soluções do problema em todo o plano xt . Essa modificação irá gerar o que chamamos de *ondas de rarefação*. Por simplicidade introduziremos as ondas de rarefação usando o exemplo abaixo.

Exemplo: Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \leq 0 \\ 0 & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Faça um esboço das características no plano xt .

Solução: As características para a equação de Burgers são dadas por $x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0$. Assim,

$$x(t) = \begin{cases} -t + x_0 & \text{if } x_0 \leq 0 \\ x_0 & \text{if } x_0 > 0 \end{cases}$$

A figura 10 mostra que na região R dada por $-t < x < 0$, não existem características. Vamos completar a solução na região R construindo ondas de rarefação.

Suponha que o dado inicial seja modificado de modo que tenhamos uma transição suave entre $u = -1$ e $u = 0$ numa vizinhança de comprimento ϵ de $x = 0$. Esta modificação irá gerar características que

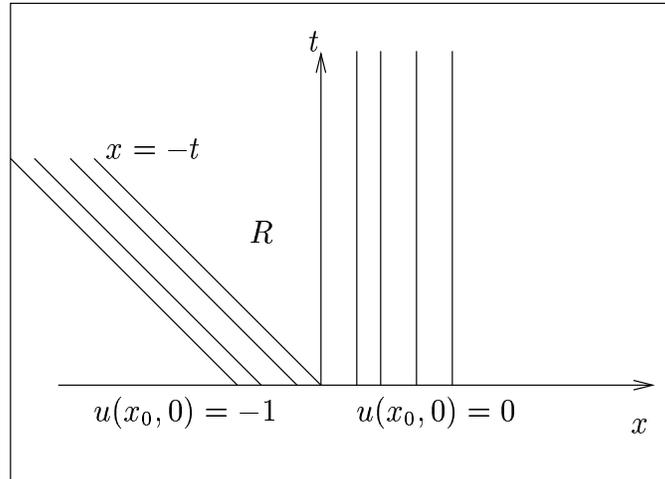


Figura 10: A Região R do plano xt onde as características não estão definidas.

fazem uma transição das retas de inclinação -1 para as retas de inclinação 0 . Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ encontraremos uma solução da lei de conservação na região $-t < x < 0$ com um “leque de características”. Este “leque” é formado por retas pela origem, isto é, retas da forma $x = at$, $-1 < a < 0$. Como estas retas são características a função u é constante ao longo de cada uma delas, portanto, devemos ter u como função da constante a , isto é, $u(x, t) = g(a) = g(\frac{x}{t})$. Isto indica que na região $-t < x < 0$, onde inicialmente parecia não haver solução, devemos procurar uma solução da equação de Burgers que seja da forma $u(x, t) = g(\frac{x}{t})$.

Vamos considerar $u(x, t) = g(\frac{x}{t})$, usando a regra da cadeia temos $u_t(x, t) = \frac{-x}{t^2}g'(\frac{x}{t})$ e $u_x(x, t) = \frac{1}{t}g'(\frac{x}{t})$. Substituindo-se u_t e u_x na equação de Burgers e pondo $\frac{1}{t}g'(\frac{x}{t})$ em evidência obtemos

$$\frac{1}{t}g'(\frac{x}{t})(g(\frac{x}{t}) - \frac{x}{t}) = 0,$$

isto implica que $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$ ou $g'(\frac{x}{t}) = 0$, o que significa $g(\frac{x}{t})$ constante.

Vamos mostrar que $g(\frac{x}{t})$ não é a função constante. De fato, pelo método das características temos que $u(x, t) = -1$ se $x < -t$ e $u(x, t) = 0$ se $x > 0$, se $g(\frac{x}{t}) = K$, K constante, temos que a solução do problema é dada por

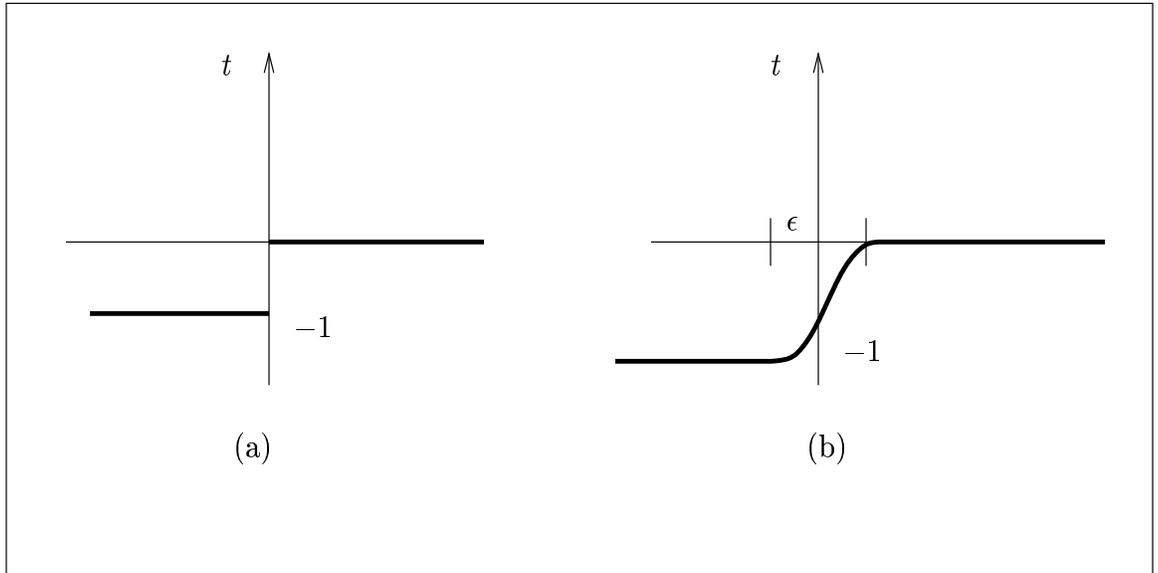


Figura 11: (a) Gráfico do dado inicial; (b) Dado inicial modificado numa vizinhança da origem.

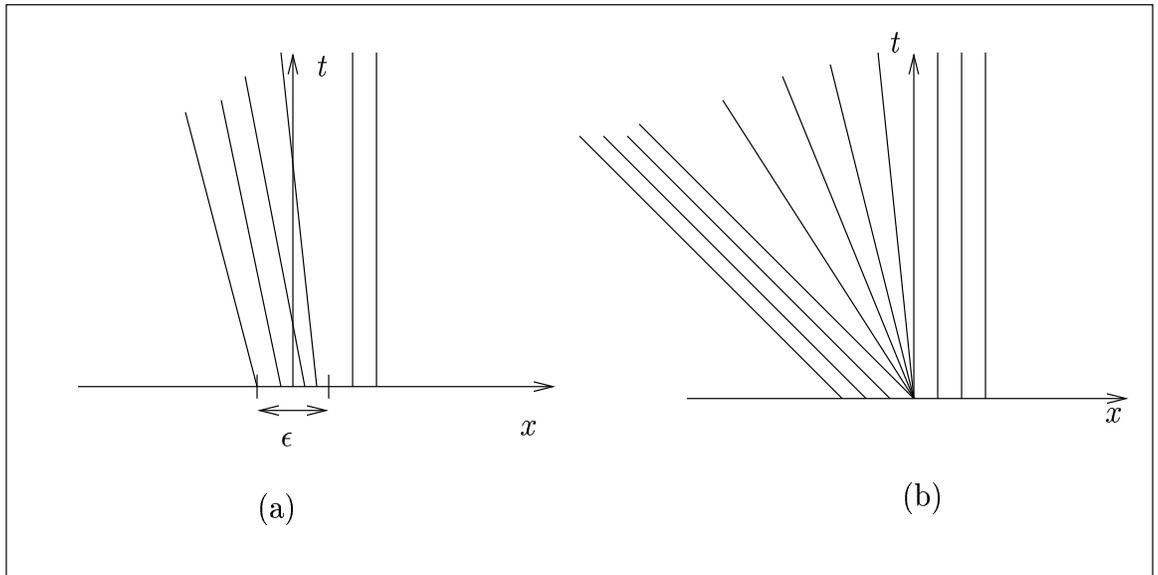


Figura 12: As Características para o dado inicial modificado (a) geram o leque de características (b) quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -t \\ K & \text{if } -t < x < 0 \\ 0 & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

ou seja, $u(x, t)$ é uma função contínua por partes. Segue-se que $u(x, t)$ deve satisfazer a condição de salto de Rankine-Hugoniot, se consideramos a condição R-H ao longo da reta $x = -t$ temos $\frac{dx_s}{dt} = \frac{K+1}{2}$ e se consideramos a condição R-H ao longo da reta $x = 0$ temos $\frac{dx_s}{dt} = \frac{K}{2}$, o que significa que a função $u(x, t)$ não satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot. Logo $g(\frac{x}{t})$ não é constante, assim $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$ e a solução do problema é dada por

$$(19) \quad u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{if } -t < x < 0 \\ 0 & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

Como aplicação usaremos as idéias do exemplo anterior no problema do fluxo de trânsito quando o sinal (semáforo) passa de fechado para aberto ou, o que é a mesma coisa, na mudança da luz vermelha para a luz verde.

Exemplo: Suponha que num sinal fechado, localizado na posição $x = 0$, os carros estão alinhados de tal forma que a densidade máxima de u_1 carros/km tenha sido atingida. Suponha ainda que não existe tráfego à frente do sinal (o que significa que a densidade é zero nesta região) e que o sinal abre no tempo $t = 0$. Seguindo a seção 3, usaremos o modelo de velocidade linear $v = v_1(1 - \frac{u}{u_1})$, onde v_1 é a velocidade máxima permitida na via, conseqüentemente a função de fluxo é $\phi = v_1(1 - \frac{u^2}{u_1})$. Em resumo, temos o seguinte problema de valor inicial que descreve o tráfego após a abertura do sinal:

$$\begin{cases} u_t + v_1(1 - \frac{2u}{u_1})u_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_1 & \text{if } x \leq 0 \\ 0 & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

As características para esse problema de valor inicial são dadas por $x(t) = a(u(x_0, 0))t + x_0$, com $a(u) = v_1(1 - \frac{2u}{u_1})$. Se $x_0 < 0$, $a(u(x_0, 0)) = -v_1$ e se $x_0 > 0$, $a(u(x_0, 0)) = v_1$. Segue-se que as características são dadas por:

$$x(t) = \begin{cases} -v_1 t + x_0 & \text{if } x_0 \leq 0 \\ v_1 t + x_0 & \text{if } x_0 > 0, \end{cases}$$

Observe que como o tempo começa a ser contado a partir da abertura do sinal, temos $x(0) = 0$. Assim as caracteísticas que interseam a

origem são as retas $x(t) = -v_1 t$ e $x(t) = v_1 t$, como mostra a figura 13, a região entre as duas retas não tem características.

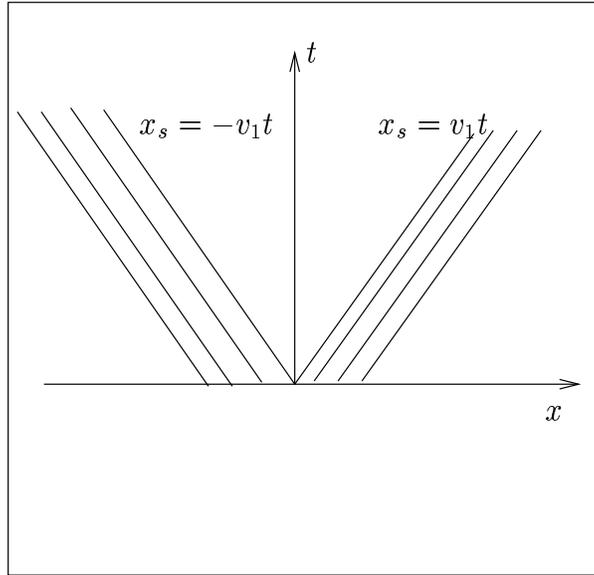


Figura 13: A região sem características quando o sinal passa da luz vermelha para a luz verde.

Antes de construirmos a onda de rarefação vamos analisar a solução na região onde temos características. Se $x > 0$ só existem retas características se $x \geq v_1 t$ e nesta região a densidade é zero pois $u(x, t) = 0$. Isto significa dizer que nenhum carro atingiu esta região. De fato, se um carro é o primeiro da fila, quando o sinal abre ele leva um tempo $t = \frac{x}{v_1}$ para atingir o ponto x , portanto, não existe carro no ponto x para $t < \frac{x}{v_1}$. A reta $x(t) = v_1 t$ pode ser interpretada como sendo a onda que propaga para a região de densidade nula a informação que o sinal abriu.

Vamos agora analisar a solução na região $x < 0$, as retas características só existem para $x \leq -v_1 t$, nesta região a densidade de carros é máxima pois $u(x, t) = u_1$. Isto significa que após a abertura do sinal existe um intervalo de tempo em que o carro permanece parado. De fato, se um carro está parado na posição x , quando o sinal abre, ele leva um tempo $t = \frac{-x}{v_1}$ para andar. A reta $x(t) = -v_1 t$ pode ser interpretada como sendo a onda que propaga para a região de densidade máxima a informação que o sinal abriu.

Seguindo o exemplo 1, a solução na região $-v_1 t < x < v_1 t$ é $u(x, t) = \frac{x}{t}$, lembrando-se que $\frac{x}{t}$ é a inclinação das características temos que a

onda de rarefação é dada por

$$\frac{x}{t} = a(u(x, 0)) = v_1 \left(1 - \frac{u}{v_1}\right).$$

Resolvendo essa equação para u , obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_1 \left(1 - \frac{x}{v_1 t}\right).$$

Segue-se então que a solução $u(x, t)$ do problema tem a expressão:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{if } x \leq -v_1 t \\ \frac{1}{2} u_1 \left(1 - \frac{x}{v_1 t}\right) & \text{if } -v_1 t < x < v_1 t \\ 0 & \text{if } x \geq v_1 t, \end{cases}$$

Se consideramos um carro que em $t = 0$ está na posição $x = -x_0$, o diagrama das características no plano xt pode ser interpretado como segue: o carro permanece parado até a onda propagação da informação de sinal aberto chegue a ele. Isto leva um tempo $t = \frac{x_0}{v_1}$.

Após esse tempo o carro anda na região em “leque”, onde sua velocidade cresce continuamente até atingir a velocidade máxima v_1 .

Exercício: No exemplo 2 acima, considere $v_1 = 60$ km/hora e $u_1 = 300$ carros/km, obtenha a solução do problema e faça o diagrama das características no plano xt .

5. SOLUÇÕES FRACAS DE LEIS DE CONSERVAÇÃO:

Nesta seção introduziremos o conceito de solução fraca de um problema de valor inicial para lei de conservação. A noção de solução fraca permitirá que consideremos solução do problema funções $u(x, t)$ que não são necessariamente contínuas ou diferenciáveis. Antes de passarmos ao estudo das soluções fracas vamos definir o que entendemos ser uma solução clássica do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde $\phi(x, t)$ tem derivadas primeira contínuas e $u_0(x)$ é contínua.

Definição: Uma função $u(x, t)$ é uma *solução clássica* deste problema de valor inicial se:

- a- u é contínua para todos x e $t > 0$,
- b- u_x e u_t existem e são contínuas para todos x e $t > 0$,
- c- u satisfaz $u_t + \phi_x = 0$ para todos x e $t > 0$,

d- $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo x .

Para estender o conceito de solução, isto é, permitir que funções que não são necessariamente contínuas ou diferenciáveis sejam soluções, usaremos algumas funções especiais denominadas *funções teste* para estudar a solução de $u_t + \phi_x = 0$ nas regiões do plano xt onde o conceito de solução clássica deixa de valer.

Definição: Uma função real $T(x, t)$ é denominada uma *função teste* se:

- a- T_t e T_x existem e são contínuas para todo (x, t) ,
- b- Existe um retângulo R $0 \leq t \leq T$, $a \leq x \leq b$ no semiplano $t \geq 0$ tais que $T(x, y) = 0$ fora de R e sobre as linhas $t = T$, $x = a$, e $x = b$.

Exemplo: A função

$$T(x, t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2-t^2}} & \text{if } x^2 + t^2 < 1, \\ 0 & \text{if } x^2 + t^2 \geq 1, \end{cases}$$

é um exemplo de função teste. De fato, se (x, t) se aproxima do círculo $x^2 + t^2 = 1$ pelo interior deste, temos que a exponencial de $T(x, t)$ tende a zero o que leva esta função ter derivadas T_t e T_x contínuas sobre o círculo.

Para generalizar a noção de solução, suponha que $u(x, t)$ é solução clássica do problema

$$(20) \quad \begin{cases} u_t + \phi_x = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

e seja $T(x, t)$ uma função teste qualquer. Segue-se que a função $T(x, t)u(x, t)$ se anula em qualquer ponto (x, t) fora de um círculo no plano xt , isto é, o produto isola uma parte de $u(x, t)$. Multiplicando-se a equação diferencial $u_t + \phi_x = 0$ por $T(x, t)$ e integrando em x e $t \geq 0$ temos

$$(21) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t)T(x, t) + \phi_x(x, t)T(x, t)) dx dt = 0.$$

A integral acima pode ser escrita como

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t)T(x, t) + \phi_x(x, t)T(x, t)) dx dt = I_1 + I_2,$$

onde $I_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t)T(x, t) dx dt$ e $I_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi_x(x, t)T(x, t) dx dt$.

Mudando a ordem de integração em I_1 obtemos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} u_t(x, t) T(x, t) dt \right] dx.$$

Aplicando integração por partes na integral mais interno obtemos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(x, t) T(x, t) \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} u_t(x, t) T_t(x, t) dt \right] dx.$$

A primeira parcela entre os colchetes se escreve como $-u_0(x)T(x, 0)$ pois $u(x, t)T(x, t) = 0$ para $t \rightarrow \infty$ e $u(x, 0) = u_0(x)$. Dessa forma temos que I_1 é dada por

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) T(x, 0) dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) T_t(x, t) dx dt.$$

Aplicando integração por partes na integral mais interna de I_2 , obtemos que I_2 se escreve como

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left[\phi(x, t) T(x, t) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) T_x(x, t) dx \right] dt.$$

Como $T(x, t) = 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$ tem-se que I_2 se escreve como

$$I_2 = - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) T_x(x, t) dx dt.$$

Substituindo-se a integral em (21) pela soma de I_1 com I_2 obtemos

$$(22) \quad \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t) T_t(x, t) + \phi(x, t) T_x(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) T(x, 0) dx = 0$$

Definição: Uma função $u(x, t)$ é uma *solução fraca* de (20) se $u(x, t)$ satisfaz (22) para toda função teste $T(x, t)$.

Observação:

- 1- Como (22) não envolve as derivadas u_x e u_t da função u , uma solução fraca pode ser descontínua.
- 2- A equação (22) é denominada *forma fraca* de (20).

Exemplo 1: Ache a forma fraca do problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Solução: A função de fluxo para essa lei de conservação é $\phi(u) = \frac{u^2}{2}$. Substituindo-se essa função de fluxo e o valor inicial $u(x, 0)$ em (22) obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(x, t)T_t(x, t) + \frac{u^2}{2}T_x(x, t)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}T(x, 0) dx = 0,$$

que é a forma fraca do problema de valor inicial dado para toda função teste $T(x, t)$.

Exercício 1: Ache a forma fraca dos seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \text{a- } & u_t + (e^u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0, \end{cases} \\ \text{b- } & u_t + u^2 u_x = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}. \\ \text{c- } & u_t + v_{max}(1 - \frac{2u}{u_{max}})u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_{max} & \text{if } x \leq 0 \\ u_0 & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 2: Seguindo os passos para obter (22) mostre que a forma fraca do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \phi_x = f & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(x, t)T_t(x, t) + \phi(x, t)T_x(x, t) - f(x, t)T(x, t)) dx dt \\ + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)T(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

6. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

6.1. Introdução. Nem sempre é possível obter soluções explícitas de problemas envolvendo equações diferenciais. Isto é bastante frustrante quando desejamos informações sobre o comportamento dessas soluções.

Uma forma de minimizar o problema é utilizar os chamados esquemas numéricos. Eles têm como objetivo valores aproximados da solução em certos pontos de seu domínio.

Nesta seção faremos uma breve introdução a tais esquemas numéricos, obtidos via os chamados métodos de diferenças finitas, aplicados a leis de conservação escalares unidimensionais lineares do tipo

$$(23) \quad u_t + au_x = 0,$$

e satisfazendo condições iniciais do tipo

$$(24) \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

onde em $u = u(x, t)$, x representa variável espacial e $t (\geq 0)$ representa o tempo.

Esta seção está baseado nas referências [6] e [8].

6.2. Esquemas numéricos. A construção de um esquema numérico começa pela definição de uma malha de pontos no plano (x, t) . Para tanto, tomamos h e k números positivos pequenos e consideramos a malha obtida pelos pontos $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ (Fig. 14), onde m e n são inteiros arbitrários. No caso de leis de conservação, consideramos apenas $n \geq 0$.

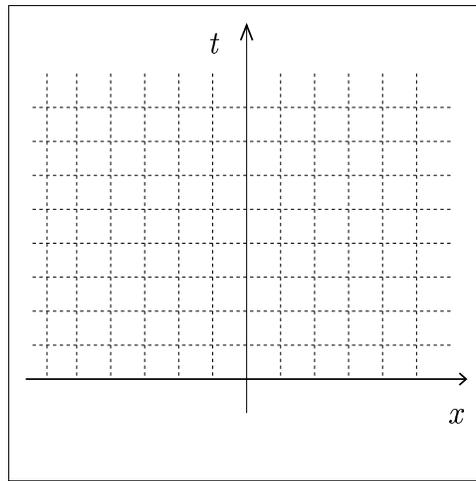


Figura 14: Malha de pontos no plano (x, t) .

Para uma função v definida nos pontos da malha, denotaremos por $v_m^n = v(mh, nk)$ o valor aproximado de u nos pontos (mh, nk) ($v_m^n \approx u(mh, nk)$).

A idéia básica dos esquemas numéricos é aproximar derivadas por diferenças finitas. Uma maneira de fazer isto é

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial x} u(mh, nk) \approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h}.$$

Usando série de Taylor, podemos entender como a aproximação acima foi obtida e podemos obter outras mais. De fato, da fórmula de Taylor temos

$$(T1) \quad u((m+1)h, nk) = u(mh, nk) + \frac{\partial}{\partial x} u(mh, nk)h + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(mh, nk)h^2 + o(h^2),$$

ou
(T2)

$$u((m-1)h, nk) = u(mh, nk) - \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk)h + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(mh, nk)h^2 + o(h^2),$$

onde $o(h^2)$ significa que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$.

De (T1) e (T2) podemos obter, dentre outros

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk) &= \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h} + o(1) \\ &\approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{h}, \end{aligned}$$

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}u(mh, nk) &= \frac{u((m+1)h, nk) - u((m-1)h, nk)}{2h} + o(h) \\ &\approx \frac{u((m+1)h, nk) - u(mh, nk)}{2h}, \end{aligned}$$

De (26) e (27) vemos que a aproximação em (27) é melhor que a aproximação em (26), no sentido de $o(h)$ tender para zero mais rápido que $o(1)$.

De modo análogo, podemos obter aproximações para $\frac{\partial}{\partial t}u(mh, nk)$.

Usando as aproximações acima podemos obter vários esquemas de diferenças finitas. Alguns exemplos para a equação $u_t + au_x = 0$, onde a é uma constante seguem abaixo.

E1) Esquema para frente no tempo e no espaço:

$$(28) \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0.$$

E2) Esquema para frente no tempo e para trás no espaço:

$$(29) \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0.$$

E3) Esquema “leapfrog”:

$$(30) \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

E4) Esquema Lax-Friedrichs:

$$(31) \quad \frac{v_m^{n+1} - \frac{v_m^n + v_{m-1}^n}{2}}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

Conhecendo a solução aproximada v_m^l ($l \leq n$) para certos níveis de tempo, via os esquemas de diferenças finitas é possível obter v_m^{n+1} para o nível seguinte. Por exemplo, no esquema (28), denotando $\lambda = \frac{k}{h}$,

$$(32) \quad v_m^{n+1} = (1 + a\lambda)v_m^n - a\lambda v_{m+1}^n,$$

no esquema de Lax-Friedrichs (31),

$$(33) \quad v_m^{n+1} = \frac{1}{2}[(1 - a\lambda)v_{m+1}^n - (1 + a\lambda)v_{m-1}^n]$$

e no esquema de leapfrog (30),

$$(34) \quad v_m^{n+1} = v_m^{n-1} + a\lambda(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n).$$

Esquemas que envolvem v apenas em dois níveis de tempo são chamados *esquemas de passo simples* ou *passo um*, enquanto esquemas que envolvem v apenas em três ou mais níveis de tempo são chamados *esquemas de passo múltiplo*.

Esquemas de passo múltiplo precisam de um procedimento inicial para determinar valores de v em tempos iniciais. Por exemplo, para o esquema de leapfrog usualmente é empregado um esquema de passo simples para determinar v para $n = 1$ e, após, para $n > 1$, aplicado o esquema de passo múltiplo.

Como podemos ver, obter um esquema de diferenças finitas não é uma tarefa difícil. Mas, até agora, não temos garantia que os valores de v_m^n obtidos a partir desses esquemas representam boas aproximações para $u(x_m, t_n)$. De fato, vejamos um exemplo.

Exemplo 6.1. *Dado o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & \text{em } -5 < x < 5, \\ u_0(x, 0) = \begin{cases} 2, & \text{se } -5 \leq x < 0 \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 5, \end{cases} \end{cases}$$

encontre uma aproximação para u , no tempo $t = 1$, usando o esquema de Lax-Friedrichs.

Solução 1. *Considerando uma malha com $h = 0,1$ e $k = 0,2$, usando um programa em Maple podemos obter v_m^5 dada pela distribuição de pontos apresentada na Fig. 15. Neste caso temos $\lambda = 2$ em (33).*

Solução 2. *Considerando uma malha com $h = 0,1$ e $k = 0,02$, usando um programa em Maple podemos obter v_m^{50} dada pela linha pontilhada apresentada na Fig. 16. Neste caso temos $\lambda = 0,2$ em 33.*

Solução 3. *Usando o método das características, obtemos a solução apresentada pela linha contínua na Fig. 16.*

Observação. Como podemos ver, a primeira solução não é aceitável, enquanto a segunda solução tem um comportamento bem mais próximo do desejado.

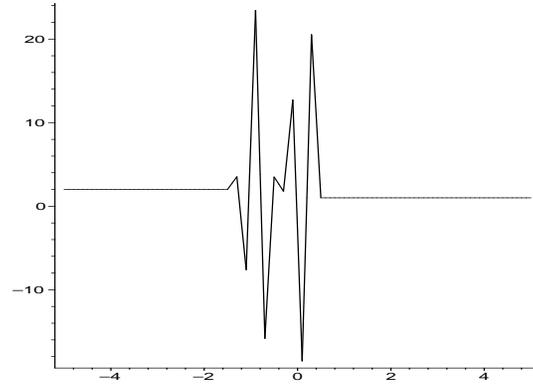


Figura 15: Solução numérica com $h = 0,1$ e $k = 0,2$.

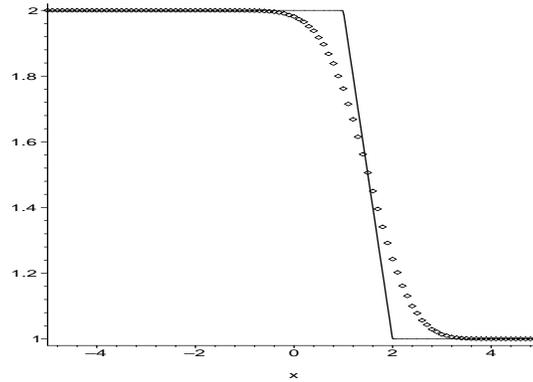


Figura 16: Solução numérica com $h = 0,1$ e $k = 0,02$.

O exemplo acima ilustra o fato de que não basta simplesmente obtermos um esquema numérico para obtermos uma aproximação aceitável para a solução do problema de valor inicial.

Na próxima subseção vamos procurar entender os motivos da diferença entre as duas soluções numéricas apresentadas no exemplo acima.

Exercício 6.1. Resolva numericamente o problema de valor inicial do exemplo 6.1, considerando $u(-10, t) = 2$, usando os seguintes esquemas de diferenças finitas:

- Para frente no tempo e no espaço com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.1$;
- Para frente no tempo e no espaço com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.2$;
- Para Lax-Friedrichs com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.1$;
- Para Lax-Friedrichs com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.2$;
- Para Lax-Friedrichs com $\lambda = 2.0$ e $h = 0.1$;
- Para Lax-Friedrichs com $\lambda = 2.0$ e $h = 0.2$;
- Para leapfrog com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.1$;
- Para leapfrog com $\lambda = 0.8$ e $h = 0.2$;

Quando for preciso, na fronteira direita, use a condição $v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n+1}$, onde $x_M = 3$.

Para iniciar o esquema de leapfrog, use o esquema para frente no tempo e no espaço.

6.3. Convergência, Consistência e Estabilidade. Ao utilizarmos um esquema numérico, buscamos encontrar uma aproximação para a solução da equação diferencial correspondente. Em outras palavras, gostaríamos que a aproximação v_m^n fosse cada vez melhor quando h e k estivessem cada vez mais próximos de zero. Esquemas que satisfazem esta condição são chamados *esquemas convergentes*. Mais precisamente,

Definição 6.1. Um esquema de diferenças finitas de passo simples é chamado convergente se a solução v_m^n obtida é tal que:

- a- v_m^0 converge para $u_0(x)$ quando $mh \rightarrow x$ com $h \rightarrow 0$,
- b- v_m^n converge para $u(x, t)$ quanto $(mh, nk) \rightarrow (x, t)$ com $h, k \rightarrow 0$.

A definição de esquemas de passos múltiplos convergente é análoga, lembrando que condições em níveis iniciais de tempo estão relacionadas com esquemas numéricos de menor número de passos. Não abordaremos este assunto nestas notas.

Provar que um esquema numérico converge, em geral, não é uma tarefa fácil. Porém, dois outros conceitos mais simples de serem provados ajudam neste trabalho. Antes de apresentá-los vamos introduzir as notações

$$(35) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = Pu = u_t + au_x = 0$$

para representar uma equação diferencial parcial linear e $P_{hk}v = 0$ para denotar uma equação de diferenças finitas. Por exemplo, em (28)

$$P_{hk}v = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h}$$

Introduzidas as notações, o primeiro conceito a ser apresentado é:

Definição 6.2. Um esquema de diferenças finitas $P_{hk}v = 0$ é chamado consistente com a equação diferencial parcial $Pu = 0$ se, para qualquer função suave $\Phi(x, t)$, temos que $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi - P_{hk}\Phi$ converge pontualmente para zero, em cada ponto da malha, quando $h, k \rightarrow 0$.

Exemplo 6.2. Do esquema (29), temos

$$(36) \quad \begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi &= \Phi_t + a\Phi_x \\ P_{hk}\Phi &= \frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{k} + a \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{h}, \end{aligned}$$

onde $\Phi_m^n = \Phi(mh, nk)$, como anteriormente.

Da série de Taylor em (mh, nk) , temos

$$(37) \quad \begin{aligned} \Phi_m^{n+1} &= \Phi_m^n + \Phi_t(mh, nk)k + \Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k^2}{2} + O(k^3) \\ \Phi_{m-1}^n &= \Phi_m^n - \Phi_x(mh, nk)h + \Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h^2}{2} + O(h^3). \end{aligned}$$

Logo,

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{k} &= \Phi_t(mh, nk) + \Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k}{2} + O(k^2) \\ \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{h} &= \Phi_x(mh, nk) - \Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h}{2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$(39) \quad P\Phi - P_{hk}\Phi = -\Phi_{tt}(mh, nk)\frac{k}{2} + O(k^2) + a\Phi_{xx}(mh, nk)\frac{h}{2} + O(h^2),$$

que tende a zero quando $h, k \rightarrow 0$.

Exercício 6.2.

- Mostre que o esquema (28) é consistente;
- Mostre que o esquema de Lax-Friedrichs é consistente, se $h^2/k \rightarrow 0$.

O segundo conceito a ser introduzido é:

Definição 6.3. Um esquema de diferenças finitas $P_{hk}v_m^n = 0$ é chamado estável em uma região Ω , se para todo T positivo existe um inteiro J e uma constante C_T tais que

$$(40) \quad h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2,$$

para $0 \leq nk \leq T$, com $(h, k) \in \Omega$.

Exemplo 6.3. Usando o esquema (28), podemos escrever

$$v_m^{n+1} = (1 + a\lambda)v_m^n - a\lambda v_{m+1}^n = \alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n,$$

onde $\alpha = 1 + a\lambda$ e $\beta = -a\lambda$.

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta|(2|v_m^n||v_{m+1}^n|) + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\}. \end{aligned}$$

Lembrando que $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ implica que $2xy \leq x^2 + y^2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^{n+1}|^2 &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta|(|v_m^n|^2 + |v_{m+1}^n|^2) + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|\alpha|^2 |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta| |v_m^n|^2 + |\alpha||\beta| |v_{m+1}^n|^2 + |\beta|^2 |v_{m+1}^n|^2\} \\ &= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \end{aligned}$$

Logo, se $|\alpha| + |\beta| = |1 + a\lambda| + |a\lambda| \leq 1$, o esquema (28) é estável. Em outras palavras, se $-1 \leq a\lambda \leq 0$, o esquema (28) é estável.

A quantidade $\sqrt{h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2}$ tem uma interpretação bastante interessante. Ela define uma norma, chamada norma L^2 da função v^n , denotada por $\|v^n\|_h$, que mede o “tamanho” de v^n . Usando esta notação, podemos escrever (40) como

$$(41) \quad \|v_m^n\|_h^2 \leq C_T \sum_{j=0}^J \|v_m^j\|_h^2.$$

A relação entre convergência, consistência e estabilidade é obtida pelo importante teorema de equivalência de Lax-Richtmyer. Para enunciar esse resultado, precisamos introduzir a seguinte definição:

Definição 6.4. *Um problema de valor inicial para a equação diferencial parcial é chamado bem posto se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *A solução do problema existe.*
- (b) *A solução é única.*
- (a) *A solução depende continuamente do dado inicial do problema.*

Para maiores detalhes sobre o conceito de problema bem posto, veja livros de equações diferenciais parciais como [10], [4], etc.

Teorema 6.1. *Dado um problema de valor inicial bem posto para uma equação diferencial parcial $Pu = 0$, um esquema de diferenças finitas consistente para $Pu = 0$ é convergente se, e somente se, ele é estável.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [8]. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados, por exemplo, em [7].

Agora que conhecemos os conceitos de convergência, consistência e estabilidade e sabemos como eles estão relacionados, vamos ver um

exemplo que ilustra a necessidade da estabilidade para garantir a convergência de um esquema consistente.

Exemplo 6.4. *Dado o problema de valor inicial*

$$(42) \quad \begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{se } x \notin [-1, 1], \end{cases} \end{cases}$$

utilizando o esquema (28) tente obter uma aproximação para a solução de (42) no tempo $t = 0.25$.

Solução. *O esquema (28) pode ser escrito como*

$$(43) \quad v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{k}{h}(v_{m+1}^n - v_m^n) = (1 + \lambda)v_m^n - \lambda v_{m+1}^n$$

Tomando $h = 0.1$ $k = 0.05$ o que implica $\lambda = 0.5$, e utilizando um programa em Maple, obtemos o gráfico da solução aproximada mostrado na Fig. 17

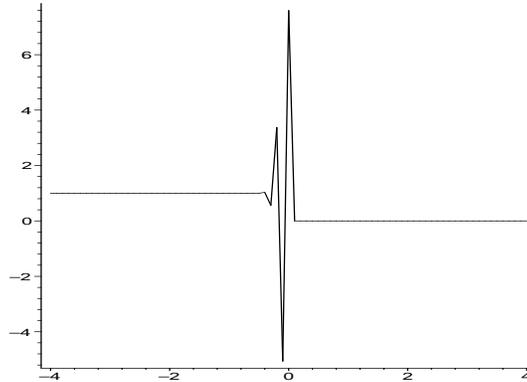


Figura 17: Solução numérica com $h = 0, 1$ e $k = 0, 2$.

Por outro lado, via o método das características, sabemos que a solução do problema acima é dada por um deslocamento no dado inicial.

Portanto, embora o esquema (28) seja consistente, como mostrado no exercício 6.2, a solução numérica obtida usando (43) não converge para a solução de (42).

6.4. A Condição CFL. Courant, Friedrichs and Lewy, em um artigo escrito em 1928 [1] e traduzido para o inglês em 1967 [2], usaram o método de diferenças finitas como uma ferramenta analítica para provar existência de soluções de certas equações diferenciais parciais.

A idéia básica do trabalho deles é definir uma seqüência de soluções aproximadas (via equações de diferenças finitas), provar que elas convergem quando a malha é refinada, e então mostrar que a função limite deve satisfazer a equação diferencial parcial, obtendo a existência de uma solução.

Quando estavam provando a convergência dessas seqüências eles identificaram que uma condição necessária para estabilidade é que o domínio de dependência do esquema numérico deve conter o domínio de dependência da equação diferencial parcial, pelo menos no limite quando $h, k \rightarrow 0$. Esta condição é conhecida como *condição CFL*.

Exemplo 6.5. Para o esquema numérico (28), v_m^n depende dos pontos que estão entre $(mh, 0)$ e $((m+n)h, 0)$ e o domínio de dependência da solução analítica é o ponto $(x_m - at_n, 0) = (mh - ank, 0)$, pois $u(x_m, t_n) = u_0(x_m - at_n)$.

Como podemos ver, a condição CFL não é satisfeita no exemplo 6.4

Na verdade, vale o seguinte teorema:

Teorema 6.2. Considere um esquema da forma $v_m^{n+1} = \alpha v_{m-1}^n + \beta v_m^n + \gamma v_{m+1}^n$ para $u_t + au_x = 0$, com α, β e γ não nulos. Uma condição necessária e suficiente para ele ser estável é

$$(44) \quad |a\lambda| \leq 1.$$

REFERÊNCIAS

- [1] R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy. Uber die partiellen differenzgleichungen der mathematisches physik. *Math. Ann.*, 100:32–74, 1928.
- [2] R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal*, 11:215–234, 1967.
- [3] R. Haberman. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*. SIAM, 1998.
- [4] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [5] R. Knobel. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, volume 3 of *Student Mathematical Library, IAS/PARK CITY MATH SUBSERIES*. AMS, 1999.
- [6] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1992.
- [7] R. D. Richtmyer and K. W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. John Wiley & Sons, New York–London–Sydney, 1967.
- [8] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Chapman & Hall, New York, 1989.
- [9] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, 1976.
- [10] E. C. Zachmanoglou. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1976.

CESAR S. ESCHENAZI, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, BELO HORIZONTE, MG

E-mail address: cesar@mat.ufmg.br

ARTHUR V. F. DE AZEVEDO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, 70910-900 BRASÍLIA, DF, BRAZIL

E-mail address: arthur@mat.unb.br