Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade

Eliezer Batista

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina,
CEP:88 040-900, Florianópolis, SC.

Conteúdo

Introdução

A presente obra consiste em um conjunto de notas elaboradas para a ministração de um mini-curso denominado "Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade", apresentado na Segunda Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, realizado na cidade de Salvador, Bahia, entre os dias 25 e 29 de outubro de 2004. O conteúdo destas notas destina-se basicamente para professores dos ensinos fundamental e mádio, alunos de licenciatura e interessados em matemática em geral. Almejamos com estas notas contribuir para um aprimoramento do ensino de geometria, tão debilitado no ensino básico nos dias atuais. Para isto, tentaremos apresentar os conceitos de uma maneira que possa ser implementada nos ensinos fundamental e médio (respeitando-se, obviamente os níveis de maturidade de cada fase escolar). Também proporemos problemas e atividades que visam motivar os estudantes ao estudo da geometria como algo belo e desafiador.

O cálculo de áreas de figuras planas remonta aos primórdios da própria civilização. A organização social e econômica das primeiras sociedades organizadas estava intimamente relacionado com o cultivo e a propriedade da terra. Sendo assim, muito cedo surgiu a necessidade de técnicas para se medir com precisão as extensões de terra, pois terra significa antes de tudo riqueza e poder. Existem registros bastante antigos de técnicas de medidas de área desenvolvidas pelos egípcios e por civilizações mesopotâmicas. Estas técnicas desenvolvidas pelas primeiras civilizações tinham um caráter particular e circunstancial, não havia procedimentos gerais para todos os casos, basicamente os exemplos eram numéricos e tratados de maneira "ad hoc". Foi somente com a cultura grega que a ciência matemática adquiriu um certo grau de rigor e generalidade, possibilitando uma conceituação precisa dos elementos envolvidos e a obtenção de resultados mais profundos e abrangentes.

Na obra "Os Elementos" do matemático Euclides de Alexandria podemos encontrar vários resultados relativos a áreas de figuras planas. A primeira menção à palavra área ocorre na proposição 34 do livro 1, seguindo-se várias outras proposições sobre áreas de paralelogramos, culminando na belíssima demonstração do teorema do Pitágoras (proposição 47, livro 1). O livro 2 dos Elementos também possui uma enorme quantidade de resultados relativos a áreas muitos deles utilizados para se obter resultados que evitassem o conceito de proporção. Muito embora a própria definição de área não seja mencionada nos Elementos, depreende-se desta obra que a noção de área era muito mais qualitativa que quantitativa, no sentido que se referia à região delimitada por uma figura do que propriamente um valor numérico atribuido à região. Esta, aliás, era uma característica da matemática grega como um todo, a representação dos números prioritariamente por uma via geométrica.

Ao longo da história da matemática, o estudo de áreas sempre desempenhou um papel relevante. Ainda na antigüidade, o matemático Arquimedes explorou ao máximo todos os recursos e técnicas disponíveis em sua época para calcular áreas de figuras não triviais, como círculos e arcos de parábolas. O método utilizado por Arquimedes e outros geometras da antigüidade para o cálculo de áreas é conhecido como método da exaustão, cujo fundamento reside na própria estrutura dos números reais. Um avanço significativo no cálculo de áreas de figuras planas curvilíneas pode ser dado com o advento do cálculo integral, no final do século XVII. O cálculo integral é o método, por excelência de cálculo de áreas de figuras curvilíneas. No entanto, uma conceituação precisa do que vem a ser área somente estabelecido com precisão no final do século XIX. Até esta ocasião, o cálculo integral, embora extremamente útil e poderoso, não repousava sobre sólidos fundamentos. Nomes como Riemann e Lebesgue figuram entre aqueles que contribuiram de forma significativa para fundamentar o conceito de integral, que por sua vez está relacionado com o conceito de área. A teoria abstrata que cuida desta fundamentação teórica é conhecida como teoria da medida.

De igual modo, o cálculo de volumes desempenhou desde muito cedo um papel importante na civilização. Assim como no cálculo de áreas, podemos encontrar registros nas civilizações antigas de métodos sobre cálculo de volumes. Euclides também dedicou os livros XI e XII dos "Elementos" para considerações de volumes de figuras sólidas. Novamente, o volume era algo qualitativo, representando muito mais o sólido em si que propriamente um número a ele relacionado. E por fim, o cálculo de volumes de figuras em geral pode ser desenvolvido ao máximo com o advento do cálculo integral e colocado sobre sólidos fundamentos com a teoria da medida.

A diferença básica entre áreas e volumes reside no fato que o conceito de área possui uma formulação muito mais elementar e geométrica envolvendo a decomposição de uma figura plana em outras mais elementares. Existem três conceitos que são equivalentes para uma classe de figuras planas denominadas polígonos: Área, equidecomponibilidade e equicomplementabilidade. Definindo, dois polígonos são equidecomponíveis se ambos podem ser divididos no mesmo conjunto de polígonos (em particular, triângulos) congruentes, isto é, se pudermos transformar um polígono no outro apenas movendo suas partes componentes. Por sua vez, dois polígonos são equicomplementáveis se existir um conjunto de polígonos congruentes (em particular, triângulos) que justapostos às figuras iniciais produzirão dois polígonos congruentes. O teorema central destas notas é que são equivalentes as seguintes afirmativas:

1. Dois polígonos possuem a mesma área.
2. Dois polígonos são equidecomponíveis.
3. Dois polígonos são equicomplementáveis.

A pergunta natural a ser feita é se existe uma caracterização puramente geométrica para volumes de sólidos. Em seu pronunciamento no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, no ano de 1900, o matemático alemão David Hilbert propôs uma série de 23 problemas que seriam, na sua opinião os problemas que definiriam os rumos da matemática do século XX. O terceiro problema por ele enunciado trata exatamente desta questão, citando o próprio Hilbert[5]

> ...[*especificar*] dois tetraedros, de bases e alturas iguais, que não possam, de maneira nenhuma, ser divididos em tetraedros congruentes, e que não possam ser combinados com tetraedros congruentes para formas dois poliedros que possam, eles mesmos, ser divididos em tetraedros congruentes.

Enfim, O problema de Hilbert consistia em encontrar dois tetraedros com mesmo volume e que não fossem equidecomponíveis nem tampouco equicomplementáveis. Se um resultado semelhante ao exposto para áreas fosse válido para sólidos, seria possível dar uma demonstração elementar da proposição 5 do livro XII dos "Elementos" de Euclides que afirma que duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume. Com isto, poder-se-ia definir o volume de qualquer poliedro sem a necessidade de recorrer a argumentos de continuidade.

O terceiro problema de Hilbert foi resolvido por Max Dehn, aluno de Hilbert, ainda em 1900. Vamos apresentar aqui uma versão um pouco mais moderna do teorema de Dehn utilizando para isto um pouco da linguagem da álgebra linear. Certamente este tópico fugirá um pouco do escopo do ensino médio, não significando porém que as idéias e a problemática envolvendo a definição de volume não deva ser discutida em sala de aula, pelo menos de forma qualitativa.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: No capítulo 1, apresentaremos a definição de área e calcularemos as áreas de figuras elementares. No capítulo 2, mostraremos a relação entre área e semelhança e exploraremos o uso de áreas na resolução de problemas geométricos. No capítulo 3, demonstraremos o resultado principal, conhecido como teorema de Bolyai-Gerwien, que estabelece a equivalência entre os conceitos de área, equidecomponibilidade e equicomplementabilidade. Também apresentaremos refinamentos deste resultado, como o teorema de Hardwiger-Glur, que trata da equidecomponibilidade com as peças possuindo lados paralelos. Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos a conceituação de volume e a solução de Dehn para o terceiro problema de Hilbert.

Capítulo 1

Áreas de Figuras Planas

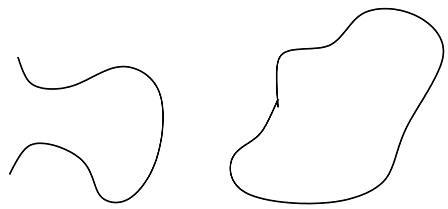
Nosso propósito neste capítulo é oferecer uma perspectiva geométrica para o conceito de área que possa ser ao mesmo tempo rigoroso e prático do ponto de vista do ensino de matemática elementar. Em primeiro lugar, vamos introduzir a definição de área através de axiomas simples e diretos. Em seguida, com a ajuda das propriedades de área, calcularemos as áreas de figuras geométricas elementares, o quadrado, o retângulo, o paralelogramo, o triângulo e o trapézio. Medir a área de uma figura significa basicamente compará-la com uma unidade padrão que é o quadrado de lado unitário.

De todas as figuras elementares, a que envolve mais sutilezas no cálculo de sua área é exatamente a mais básica de todas: o quadrado. Para provarmos que a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado temos que lidar corretamente com segmentos de comprimento irracional. O tratamento de números irracionais é, em geral, evitado nos ensinos fundamental e médio. Mas embora o assunto realmente apresente uma certa complexidade técnica, podemos apresentá-lo de uma maneira concisa e acessível ao estudante de ensino básico. Esta introdução a este capítulo delicado da matemática pode ser tão mais motivadora a medida que estiver relacionada com a geometria. Pensando nisto, apresentamos uma demonstração que utiliza o mínimo de resultados sobre números reais, a maioria deles de caráter fortemente intuitivo.

Por fim, apresentaremos algumas diretrizes gerais para o cálculo de áreas de qualquer figura plana. Neste ponto, devo salientar que o princípio norteador destes procedimentos de cálculo de áreas é a decomposição em figuras elementares, o cálculo das áreas individuais destas figuras e a soma de todas as áreas parciais. Este princípio de decomposição está, em certo sentido, subjacente ao próprio conceito de área, como veremos nos capítulos posteriores.

1.1 Definição de Área

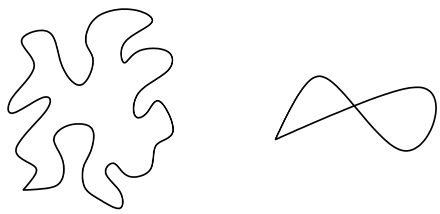
Antes de tentarmos definir a noção de área, devemos especificar os objetos geométricos para os quais esta definição será apropriada. Primeiramente, vamos limitar nossa discussão a apenas sub-conjuntos de pontos no plano. Em segundo lugar, os sub-conjuntos do plano em questão são regiões delimitadas por uma ou várias curvas fechadas e simples. Uma curva fechada é uma curva que não possui extremidades. Veja na figura 1 abaixo um exemplo de curva aberta e um exemplo de curva fechada.



(a) (b)

Figura 1.1: A curva (a) é um exemplo de curva aberta, suas extremidades são os pontos A e B mostrados. A curva (b) é um exemplo de curva fechada.

Uma curva é dita se simples se não possuir pontos de auto intersecção. A figura 2 abaixo nos mostra um exemplo de curva não simples e um exemplo de curva simples.



(a) (b)

Figura 1.2: A curva (a) é um exemplo de curva simples, enquanto a curva (b) é uma curva não simples simples, pois possui auto intersecções. Note que o conceito de curva simples não está relacionado com a complexidade do traço da mesma.

A propriedade mais importante de uma curva simples e fechada pode ser formulada no seguinte teorema:

Teorema 1.1.1 *(Jordan) Uma curva fechada e simples divide o plano em duas regiões disjuntas.* □

Este teorema, embora de fácil enunciado e de um forte apelo intuitivo, é extremamente difícil de provar e envolve conceitos que vão além do escopo do presente texto. Com este resultado poderemos nos referir de forma inequívoca a qual região estaremos atribuindo um valor de área. A partir deste ponto, sempre que nos referirmos a uma curva, subentenda-se, a menos que se diga o contrário, que a curva é fechada e simples. Dito isto, podemos agora definir o que vem a ser uma área:

Definição 1.1.2 *A área de uma região Σ delimitada por uma ou várias curvas é um número real positivo $A(\Sigma)$ satisfazendo às seguintes condições:*

1. *Duas regiões congruentes possuem a mesma área.*
2. *Se duas regiões Σ_1 e Σ_2 se intersectarem no máximo por pontos em sua fronteira, isto é, sua intersecção não possui pontos interiores, então $A(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2)$.*
3. *A área de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.*

Algumas observações se fazem necessárias a respeito dos ítens na definição acima: Em primeiro lugar, devemos entender o que vem a ser uma congruência entre duas figuras. A noção de congruência é a forma mais exata de dizermos que duas figuras são iguais, que pode ser sintetizada na definição abaixo.

Definição 1.1.3 *Duas figuras Σ_1 e Σ_2 são ditas serem congruentes se existe uma correspondência 1 a 1 entre os seus pontos, dada por uma aplicação $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ tal que para quaisquer dois pontos $X, Y \in \Sigma_1$ tenhamos que a medida do segmento $\overline{\phi(X)\phi(Y)}$ seja igual a do segmento $\overline{XY}$.*

Dito de outra forma, duas figuras são congruentes se conseguirmos superpor ambas através de um processo que preserve as medidas de segmentos entre os pontos da figura, isto implicará também que as medidas de ângulos serão de igual modo preservadas. Pode-se mostrar que uma congruência pode ser obtida através de uma seqüência finita de rotações, translações e, eventualmente, reflexões no plano.

Em segundo lugar, devemos entender o que vem a ser um ponto interior. Já vimos que uma curva γ divide o plano em duas regiões distintas. Mais precisamente, tomando-se todos os pontos do plano que não pertencem a γ estão divididos em dois sub-conjuntos distintos. Pode-se verificar sem muita dificuldade que se um ponto pertence a um destes sub-conjuntos do complementar à curva γ no plano existe um círculo ao redor deste ponto no qual todos os seus pontos ainda pertencerão ao mesmo conjunto. Como uma convenção, estipularemos que se a curva for orientada no sentido anti horário, a região que se encontrar sempre à esquerda da curva será chamada interior e a região que se encontrar sempre à sua direita será chamada exterior, como nos mostra a figura abaixo:

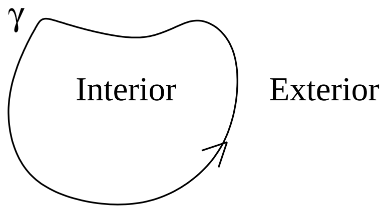


Figura 1.3: Região interior e exterior definida por uma curva fechada e simples.

Proposição 1.1.4 *A área de uma figura é sempre maior que a área de qualquer figura contida em seu interior.*

Dem. Considere uma figura Σ delimitada por uma curva γ, e seja uma curva δ contida no interior de Σ. Podemos definir duas figuras a partir de Σ: Uma figura Σ_1, delimitada por δ, e outra figura Σ_2, delimitada pelas curvas γ e δ, como ilustrado na figura abaixo.

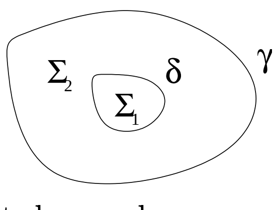


Figura 1.4: Regiões delimitadas por duas curvas, sendo que uma delas está na região interior definida pela outra.

Pelo ítem 2 da definição de área, temos que a área de Σ é igual à soma da área de Σ_1 e da área de Σ_2. Assim, a área de Σ será maior que a área de qualquer uma das regiões individuais Σ_1 ou Σ_2. ∎

Assim, se duas figuras tiverem algum ponto de sua região interior em comum, a área da união entre as duas figuras será menor que a soma das áreas de cada uma das figuras individuais. Isto se deve ao fato explicado no parágrafo anterior, afinal se as regiões interiores das duas figuras possuem um ponto em comum, existe um círculo ao redor deste ponto contido na intersecção entre as regiões. Logo, ao efetuarmos a soma das áreas das duas figuras, a área deste círculo comum será contada duas vezes, enquanto que na área da união, a área deste círculo será contada uma única vez.

O ítem 2 da definição de área ainda nos diz que para calcularmos a área de uma figura complexa, sempre podemos decompor a mesma em figuras mais simples que saibamos calcular sua área, a área total será a soma das áreas parciais. Em outras palavras, a área é uma grandeza aditiva. Este será o princípio norteador de todas as discussões que serão feitas neste trabalho.

1.2 Cálculo de Áreas de Figuras Elementares

O ítem 3 na definição de área é o que necessitamos para efetuarmos os cálculos de área. Seguiremos, para demonstrarmos os próximos resultados, a referência [8].

Teorema 1.2.1 *A área de um quadrado de lado a é igual a a^2.*

Dem. Iniciaremos com um quadrado de lado inteiro n. Se subdividirmos seus lados em n segmentos de comprimento unitário, teremos ao todo n^2 quadrados de lado unitário decompondo o quadrado original, conforme exemplificado na figura abaixo. Todos estes quadrados de lado unitário se intersectam no máximo por uma aresta e portanto, pelo ítem 2 da definição de área, a área do quadrado é igual à soma das áreas dos quadrados de lado 1 , logo $A(\Sigma) = n^2.1 = n^2$.

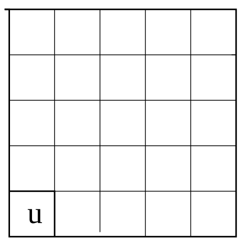


Figura 1.5: Área de um quadrado de lado inteiro.

Seja agora um quadrado cuja medida do lado é um número racional $\frac{m}{n}$. Obviamente, será impossível dividir este quadrado em um número inteiro de quadrados de lado unitário. Assim, devemos utilizar uma nova medida padão de área para compararmos o quadrado unitário e o quadrado em questão. Seja um quadrado Λ de lado igual a $\frac{1}{n}$. Pelo exposto no caso anterior, é fácil verificar que o quadrado de lado unitário é decomposto em n^2 quadrados congruentes a Λ, e portanto de mesma área, assim

$$1 = n^2.A(\Lambda), \quad \Rightarrow \quad A(\Lambda) = \frac{1}{n^2}.$$

Agora, um segmento de medida $\frac{m}{n}$ pode ser decomposto em m segmentos de medida $\frac{1}{n}$. Portanto, um quadrado Σ de lado $\frac{m}{n}$ possui m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$, concluimos então que

$$A(\Sigma) = m^2.A(\Lambda) = m^2.\frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Resta-nos mostrar que o resultado continua válido para quadrados de lado com medida irracional. Para isto, vamos utilizar alguns fatos a respeito das propriedades dos números reais:

Lema 1.2.2 *Dados dois números reais positivos x e y, temos que $x < y$ se, e somente se $x^2 < y^2$.* $\square$

Lema 1.2.3 *Dado dois números reais quaisquer x e y, sempre existe um número racional entre eles.* $\square$

Lema 1.2.4 *Dado um número real positivo a existe um único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Este número é denominado raiz quadrada de a.* $\square$

Como conseqüência do segundo lema, podemos concluir que arbitrariamente próximos a qualquer número irracional a, podemos encontrar números racionais r e s tais que $r < a < s$. Assim, um quadrado Σ de lado a ficará sempre no interior de um quadrado de lado racional s, cuja área é igual a s^2, e terá em seu interior um quadrado de lado r, e portanto com área r^2, conforme nos mostra a figura abaixo:

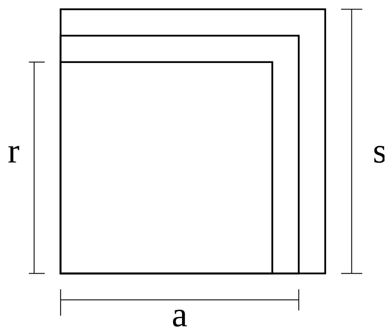


Figura 1.6: Aproximação da um quadrado de lado irracional por quadrados de lado racional, por excesso e por falta.

Assim, teremos

$$r^2 < A(\Sigma) < s^2.$$

Por outro lado, temos pelo primeiro lema que $r^2 < a^2 < s^2$, para quaisquer racionais r e s tais que $r < a < s$. Suponhamos então que a área $A(\Sigma)$ seja igual a um número $b < a^2$. Pelo terceiro lema, existirá a raiz quadrada de b, que será denotada por $\sqrt{b}$, que será um número menor que a. E pelo terceiro lema existirá um número racional r entre $\sqrt{b}$ e a. Assim, devido a todas as informações expostas anteriormente, $b < r^2 < A(\Sigma)$, o que é uma contradição, pois supusemos que $A(\Sigma) = b$. Da mesma forma, podemos verificar que a área do quadrado Σ não pode ser um número maior que a^2. Portanto $A(\Sigma) = a^2$.

Com isto exaurimos todas as possibilidades para a medida do lado de um quadrado, em todos os casos temos que a área do quadrado é numericamente igual ao quadrado da medida do lado. ■

A partir deste teorema fundamental, podemos calcular as áreas de outras figuras planas fundamentais.

Proposição 1.2.5 *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de seus lados.*

Dem. Considere um retângulo de lados a e b. Vamos mostrar que sua área é igual a $a.b$. Para isto, construamos um quadrado de lado $(a+b)$, cuja área é, pelo teorema anterior, igual a $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$. Por outro lado, o quadrado de lado $(a+b)$ é constituido de um quadrado de lado a, e portanto de área igual a a^2, um quadrado de lado b, e portanto de área igual a b^2, e dois retângulos Σ de lados a e b, conforme ilustrado na figura abaixo.

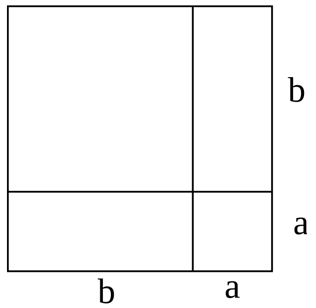


Figura 1.7: Cálculo da área de um retângulo.

Portanto, podemos concluir que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2 = a^2 + 2.A(\Sigma) + b^2, \qquad \Rightarrow \qquad A(\Sigma) = a.b.$$

■

Podemos agora determinar a área de um paralelogramo, isto é, um quadrilátero que possui seus lados opostos paralelos. Antes um pouco de nomenclatura: Se tomarmos um dos lados do paralelogramo como referência, denominaremos este lado por base do paralelogramo. Dada uma base, a medida de qualquer segmento perpendicular à base e que liga um ponto da base a um ponto do lado oposto que lhe é paralelo é denominada altura do paralelogramo.

Proposição 1.2.6 *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida de sua altura.*

Dem. Considere um paralelogramo $ABCD$, e tome como base o segmento $\overline{CD}$. Sejam agora $\overline{DH}$ e $\overline{BK}$ duas alturas deste paralelogramo, conforme ilustrado na figura abaixo.

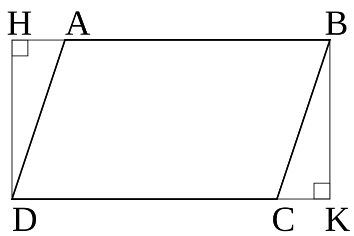


Figura 1.8: Cálculo da área de um paralelogramo.

Os triângulos ΔBKC e ΔDHA são triângulos retângulos em K e H, respectivamente. Além do mais, temos que as hipotenusas destes dois triângulos são congruentes, pois são os lados opostos paralelos de um paralelogramo.

Também temos que os catetos $\overline{BK}$ e $\overline{DH}$ são congruentes, logo $\Delta BKC \equiv \Delta DHA$, pelo caso de congruência entre triângulos retângulos com as hipotenusas e um dos catetos congruentes. Assim, pelo primeiro ítem na definição de área, podemos concluir que $A(\Delta BKC) = A(\Delta DHA) = A_1$.

Agora, considere o quadrilátero $HBKD$ da figura 8, pela congruência dos triângulos retângulos acima mencionados, temos que $HA = KC$, também temos que $AB = CD$, pois são lados opostos e paralelos de um paralelogramo. Portanto, temos que $HB = HA + AB = KC + CD = KD$, também sabemos que $DH = BK$, logo o quadrilátero $HBKD$ é um paralelogramo. Além disto, devido ao fato de os ângulos $\widehat{K}$ e $\widehat{H}$ serem ângulos retos, temos que $HBKD$ é de fato um retângulo, assim, podemos escrever

$$A(HBKD) = KD.BK = (KC + CD).BK = KC.BK + CD.BK.$$

Por outro lado, podemos escrever

$$A(HBKD) = A(\Delta BKC) + A(\Delta DHA) + A(ABCD) = 2.A_1 + A(ABCD).$$

Para mostrarmos nosso resultado, temos que verificar que a soma das áreas dos triângulos retângulos ΔBKC e ΔDHA é igual a $KC.BK$. Para isto, considere dois novos triângulos retângulos $\Delta FGI \equiv \Delta BKC$ e $\Delta IEF \equiv \Delta DHA$, conforme ilustrado na figura abaixo.

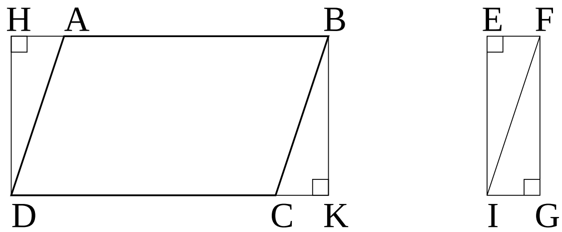


Figura 1.9: Área das figuras complementares ao paralelogramo.

É fácil ver que $EFGI$ é um retângulo (**verifique os detalhes**), assim teremos

$$A(EFGI) = A(\Delta FGI) + A(\Delta IEF) = A(\Delta BKC) + A(\Delta DHA) = 2.A_1.$$

Por outro lado,

$$A(EFGI) = GI.FG = KC.BK.$$

Logo, $2.A_1 = KC.BK$ e portanto $A(ABCD) = CD.BK$. ■

Exercício 1.2.7 *Mostre que o valor numérico da área de um paralelogramo independe de qual lado do mesmo escolhermos para sua base.*

Note também que como a área de um paralelogramo somente depende da base e da altura relativa a esta base, então todos os paralelogramos com estes mesmos dados terão a mesma área, não importando sua forma. Na figura abaixo, todos os paralelogramos que estão descritos entre duas retas paralelas e que possuem a mesma base também possuem a mesma área.

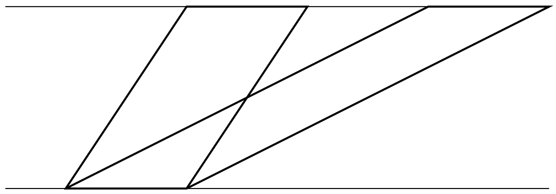


Figura 1.10: Paralelogramos com mesma área.

Proposição 1.2.8 *A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura.*

Dem. Considere um triângulo ΔABC tomemos o segmento $\overline{BC}$ como sua base e sejam M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Denotaremos o valor da altura do triângulo ΔABC relativa à altura $\overline{BC}$ por h. Prolonguemos o segmento $\overline{MN}$ até o ponto P de forma que $\overline{MN} \equiv \overline{PN}$, conforme indicado na figura abaixo.

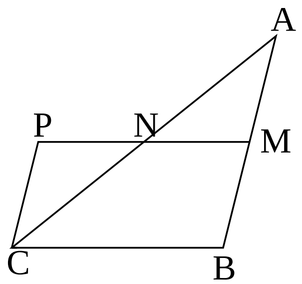


Figura 1.11: Cálculo da área de um triângulo.

Como $\overline{AN} \equiv \overline{CN}$ e $M\widehat{N}A \equiv P\widehat{N}C$, temos, pelo caso Lado-Ângulo-Lado que $\Delta MNA \equiv \Delta PNC$, assim $A(\Delta MNA) = A(\Delta PNC)$. Portanto,

$$\begin{aligned} A(\Delta ABC) &= A(MNCB) + A(\Delta AMN) = \\ &= A(MNCB) + A(\Delta CPN) = A(MPCB). \end{aligned}$$

Deixamos como exercício para o leitor mostrar que o quadrilátero $MPCB$ é de fato um paralelogramo com a mesma base do triângulo ΔABC mas com metade de sua altura. Assim

$$A(\Delta ABC) = A(MPCB) = BC.\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}BC.h.$$

■

Exercício 1.2.9 *Mostre que da mesma forma que um paralelogramo, a área de um triângulo independe de qual lado deste escolhermos para ser sua base.*

Exercício 1.2.10 *Dê uma outra demonstração para a área de um triângulo.*

Um trapézio é um quadrilátero que possui dois de seus lados paralelos. Denominaremos bases tanto estes segmentos paralelos como as suas medidas, em geral haverá uma base maior e uma base menor (**verifique que quando as duas bases são iguais, então o trapézio é de fato um paralelogramo**). Denominaremos altura do trapézio, de igual forma, qualquer segmento perpendicular às retas paralelas que contém as bases bem como as suas medidas.

Proposição 1.2.11 *A área de um trapézio T com base maior b_1, base menor b_2 e altura h é dada por $A(T) = \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right).h$.*

Dem. Seja um trapézio $ABCD$ com $AB = b_2$ e $CD = b_1$, conforme indicado na figura abaixo.

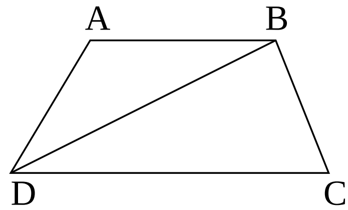


Figura 1.12: Cálculo da área de um trapézio.

Considere o segmento $\overline{BD}$, que determina no trapézio dois triângulos, a saber, ΔABD e ΔBCD.. O primeiro possui base b_2 e altura h, enquanto o segundo possui base b_1 e altura h. Assim, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\Delta ABD) + A(\Delta BCD) = \\ &= \frac{1}{2}.b_2.h + \frac{1}{2}.b_1.h = \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right).h. \end{aligned}$$

■

1.3 Áreas de Figuras Gerais

Na seção anterior, calculamos algumas áreas de figuras elementares que serão úteis para o cálculo de áreas de figuras mais complexas através da decomposição e da soma das áreas das figuras constituintes. Em primeiro lugar, vamos estudar como se calcula a área de polígonos.

Definição 1.3.1 *Uma linha poligonal* $A_1A_2...A_n$ *é a união dos segmentos* $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$. *Os pontos* A_1, A_2, ..., A_n *são denominados vértices da poligonal e os segmentos unindo vértices subseqüentes são denominados arestas da poligonal. Quando os pontos* A_1 *e* A_n *coincidem, dizemos que a linha poligonal é fechada. Se a linha poligonal é fechada e simples, isto é sem cruzamentos entre os segmentos constituintes, então a denominaremos um polígono.*

Definição 1.3.2 *Uma diagonal de um polígono é um segmento unindo dois vértices não subseqüentes, isto é que não seja aresta do polígono.*

Ao considerarmos as diagonais de um polígono que estejam em seu interior, podemos mostrar que é possível dividir a região interior de um polígono em triângulos. Este processo é chamado de triangularização, um exemplo de triangularização pode ser visto na figura abaixo.

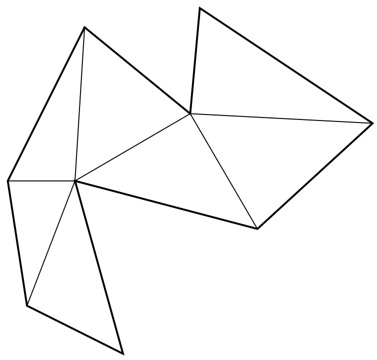


Figura 1.13: Triangularização de um polígono.

Muito embora pareça totalmente intuitivo este resultado e seja bastante direto encontrarmos uma triangularização para algum polígono particular, uma prova geral a rigorosa para este fato pode ser trabalhosa e ultrapassar o escopo deste nosso trabalho. Dito isto, vamos simplesmente aceitar este resultado. Assim, a área de um polígono qualquer pode ser obtida em geral construindo-se uma triangularização, a partir desta triangularização calcula-se as áreas de cada triângulo individual e por fim soma-se todas as áreas parciais.

Com respeito ao cálculo de áreas de figuras delimitadas por curvas quaisquer, devemos recorrer a um processo de limite. Dada uma figura Σ, delimitada por uma curva γ, podemos sempre traçar dois polígonos, P_I e P_E, com qualquer número de arestas e com as seguintes propriedades: O polígono P_I possui suas arestas estão localizadas inteiramente no interior de Σ, a menos dos vértices que porventura estejam sobre a curva γ ou dos pontos de tangência com a curva γ, denominaremos um polígono deste tipo de polígono interior a Σ. Por sua vez, o polígono P_E possui as arestas totalmente exteriores a Σ, a menos de eventuais pontos de tangência com a curva γ, um polígono deste tipo será denominado polígono exterior a Σ, veja a figura abaixo para um exemplo de um polígono interior e de um polígono exterior a uma figura.

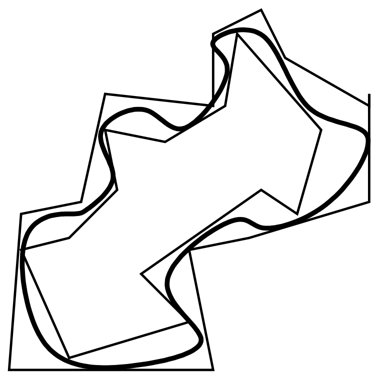


Figura 1.14: Polígono interior e polígono exterior a uma figura.

Evitaremos os termos inscrito e circunscrito devido ao fato que um polígono inscrito deve ter todos os seus vértices sobre a curva e um polígono circunscrito deve ter todas as suas arestas tangentes à curva.

Como todos os polígonos interiores a uma figura Σ estão contidos em seu interior, temos que a área de qualquer um dos polígonos interiores é menor que a área de Σ. Por outro lado, a figura Σ está contida no interior de qualquer polígono exterior, portanto sua área será menor que a de qualquer um destes polígonos.

Definição 1.3.3 *Dada uma figura Σ, um polígono P_I interior e um polígono P_E exterior a Σ, dizemos que a área de P_I é uma aproximação da área de Σ*

por falta e a área de P_E é uma aproximação da área de Σ por excesso.

Ao aumentarmos o número de lados de um polígono interior ou exterior, fazemos que as aproximações por falta e por excesso fiquem cada vez mais próximas entre si. As curvas para as quais será possível a atribuição de um valor de área serão aquelas que possuam a seguinte propriedade: Dado qualquer valor positivo, tão pequeno quanto se queira, existem uma aproximação por excesso e uma aproximação por falta de forma que a diferença entre estes dois valores seja menor que este valor fixado. A área da figura Σ pode então ser aproximada arbitrariamente por excesso ou por falta encontrando-se polígonos exteriores e interiores com um número cada vez maior de lados. Foi assim que Arquimedes de Siracusa conseguiu na antiguidade uma boa aproximação para o número π, aproximando a área de um círculo por polígonos inscritos e circunscritos ao mesmo. Também de Arquimedes é o cálculo da área de um segmento de parábola, aproximando por polígonos inscritos e circunscritos formados a partir de triângulos.

Com a advento do cálculo integral, muitas áreas de figuras curvilíneas puderam ser calculadas explicitamente. Porém a idéia do cálculo integral é aproximar as figuras através de retângulos e não de polígonos quaisquer. A aproximação por retângulos se mostra mais apropriada, uma vez que os pontos do plano são tomados segundo um sistema ortogonal de coordenadas[1]
.

1.4 Exercícios Complementares

1) Um losango é um quadrilátero que possui os quatro lados iguais.

a) Mostre que um losango é um paralelogramo.

b) Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cruzam no ponto médio.

c) Mostre que a área de um losango é igual à metade do produto das medidas de suas diagonais.

2) Obtenha demonstrações alternativas para a fórmula da área de um trapézio.

[1]Se porventura tomarmos um sistema polar de coordenadas, então os polígonos mais adequados para se tomar em aproximações de área serão triângulos com um dos vértices na origem.

a) Prolongando seus lados paralelos de forma a construir um paralelogramo.

b) Prolongando seus lados não paralelos de forma a construir um triângulo.

3) Por um ponto qualquer de uma diagonal de um paralelogramo trace duas paralelas aos lados. O paralelogramo original fica decomposto assim em 4 paralelogramos. Mostre que existem dois deles com mesma área.

4) Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e mede a metade deste.

5) Seja o triângulo ΔABC e os pontos M e N, respectivamente pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, calcule a razão entre as áreas dos triângulos ΔAMN e ΔABC.

6) A base média de um trapézio é o segmento unindo os pontos médios dos lados não paralelos.

a) Mostre que a área do trapézio é igual ao produto da medida da base média pela altura.

b) Calcule as áreas dos trapézios definidos pela base média e por cada uma das bases do trapézio original.

7) Mostre que qualquer reta que passe pelo centro de um quadrado (o ponto de encontro das duas diagonais) divide o quadrado em dois polígonos congruentes.

8) Mostre através de áreas a fórmula $(a-b)^2 = a\ 2 - 2.a.b + b^2$.

9) Mostre através de áreas que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

10) (Teorema de Viviani) Mostre que a soma das distâncias de um ponto qualquer no interior de um triângulo equilátero aos lados do mesmo é sempre igual à altura do triângulo equilátero. (sugestão, ligue este ponto aos vértices e considere as áreas dos triângulos)

Capítulo 2

Aplicações de Áreas

Neste capítulo, veremos o comportamento das áreas de figuras planas por semelhanças. Basicamente, temos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Esta propriedade nos auxilia grandemente na resolução de problemas geométricos. Muitos teoremas clássicos da geometria plana podem ser demonstrados com o auxílio de áreas e de certa forma muito de sua complexidade pode ser elucidada ao apelarmos para o seu uso. Um exemplo que iremos tratar com detalhes é o teorema de Thales. Outro teorema comum no ensino médio que pode ter desdobramentos interessantes se for envolvido com áreas é o teorema de Pitágoras. Originalmente, o teorema de Pitágoras era um teorema relacionando áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Neste capítulo apresentaremos algumas demonstrações geométricas do teorema de Pitágoras que serão úteis nos capítulos posteriores em nossa discussão sobre equidecomponibilidade.

2.1 Áreas e Semelhanças

No capítulo anterior caracterizamos uma congruência através de uma correspondência 1 a 1 entre duas figuras que preservava o comprimento. De igual modo, podemos caracterizar uma semelhança entre duas figuras, explicitando assim as propriedades destas aplicações. Em toda esta seção, seguiremos em linha gerais a referência [8], que representa um marco na exposição didática de geometria elementar para o ensino médio em língua portuguesa.

Definição 2.1.1 *Duas figuras planas* Σ_1 *e* Σ_2 *são semelhantes com razão* *de semelhança k se existe existe uma aplicação bijetiva $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ e um número $k > 0$ tal que para quaisquer pontos $X, Y \in \Sigma_1$, a medida do segmento $\overline{\sigma(X)\sigma(Y)}$ seja igual a k vezes a medida do segmento $\overline{XY}$. Os pares de pontos $X \in \Sigma_1$ e $\sigma(X) \in \Sigma_2$ são denominados pontos homólogos.*

O termo aplicação bijetiva significa o mesmo que correspondência 1 a 1 (correspondência biunívoca). Basicamente, uma aplicação bijetiva é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de um outro conjunto de tal forma que todo elemento do segundo conjunto esteja relacionado com um único elemento do primeiro. A propriedade mais importante, e certamente a mais útil das aplicações bijetivas é que podemos definir uma inversa: Se $fA \to B$ é uma aplicação bijetiva, sua inversa é uma aplicação (também bijetiva) $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$.

Note que se a razão de semelhança é igual a 1, temos então uma congruência, assim, muitos resultados que serão mostrados para figuras semelhantes são automaticamente satisfeitos para figuras congruentes.

Proposição 2.1.2 *a) Uma figura é sempre semelhante a si mesma.*
b) Se uma figura Σ_1 é semelhante a uma figura Σ_2, então a figura Σ_2 é semelhante à figura Σ_1.
c) Se uma figura Σ_1 é semlhante a uma figura Σ_2, que por sua vez é semelhante a Σ_3, então Σ_1 é semelhante a Σ_2.

Dem. a) Seja uma figura Σ e tome a aplicação identidade $\mathrm{Id} : \Sigma \to \Sigma$ $(\mathrm{Id}(X) = X)$. É fácil ver que a identidade é bijetiva e que preserva os comprimentos, logo a razão de semelhança é igual a 1.

b) Seja $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma semelhança de razão k. Considere a inversa $\sigma^{-1} : \Sigma_2 \to \Sigma_1$. Tome dois pontos X' e Y' em Σ_2, como σ é bijetiva, existem únicos pontos $X, Y \in \Sigma_1$ tais que $X' = \sigma(X)$ e $Y' = \sigma(Y)$, assim o segmento $\overline{\sigma^{-1}(X')\sigma^{-1}(Y')}$ é igual ao segmento $\overline{XY}$. Como a semelhança σ é de razão k, temos que $X'Y' = k.XY$ e portanto $XY = \frac{1}{k}.X'Y'$. Logo a aplicação σ^{-1} é uma semelhança de razão $\frac{1}{k}$.

c) Sejam as semelhanças $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ de razão k e $\rho : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ de razão l. É fácil ver que a composta $\rho \circ \sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_3$ é uma bijeção. Tome um par de pontos $X, Y \in \Sigma_1$ e sejam $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$, $X'' = \rho(X')$ e $Y'' = \rho(Y')$. Temos que $X'Y' = k.XY$ e $X''Y'' = l.X'Y'$. Portanto $X''Y'' = k.l.XY$, o que nos leva a concluir que a composta $\rho \circ \sigma$ é uma semelhança de razão $k.l$.
■

Esta proposição nos diz que a relação de semelhança entre figuras tem a propriedade **reflexiva** (toda figura é semelhante a si mesma), **simétrica** (se A é semelhante a B, então B é semelhante e A) e **transitiva** (se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C). Qualquer relação entre objetos de um determinado conjunto que seja reflexiva, simétrica e transitiva é denominada uma **relação de equivalência**. O leitor verá outras relações de equivalência ao longo do texto.

Proposição 2.1.3 *Uma semelhança associa pontos colineares a pontos colineares.*

Dem. Seja $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma semelhança de razão k. Tome três pontos $X, Y, Z \in \Sigma_1$ colineares e sejam $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ e $Z' = \sigma(Z)$. Como X, Y e Z são colineares, suponha, sem perda de generalidade que Y está entre X e Z, então $XZ = XY + YZ$. Por outro lado

$$X'Y' + Y'Z' = k.XY + k.YZ = k.(XY + YZ) = k.XZ = X'Y'.$$

Assim, concluimos que X', Y' e Z' são colineares. ∎

O termo semelhança é motivado pelo fato que tal aplicação preserva a forma das figuras, como podemos verificar no resultado seguinte (para uma demonstração do mesmo, consulte [8]).

Teorema 2.1.4 *Uma semelhança $\sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ de razão k, transforma:*

1. *Todo segmento de reta contido em Σ_1 em um segmento de reta contido em Σ_2.*

2. *Um círculo de raio r contido em Σ_1 em um círculo de raio $k.r$ contido em Σ_2.*

3. *Pontos interiores de Σ_1 em pontos interiores de Σ_2.*

4. *Pontos na fronteira de Σ_1 em pontos na fronteira de Σ_2.*

5. *Vértices de Σ_1 em vértices de Σ_2, no caso de Σ_1 e Σ_2 serem polígonos.* □

Definição 2.1.5 *Seja um ponto O no plano e k um número real positivo. Uma homotetia de centro O e razão k é uma bijeção σ do plano inteiro satisfazendo*

1. $\sigma(O) = O$.

2. *Para todo ponto* $X \neq O$, *o ponto* $\sigma(X)$ *é o ponto na semi-reta* $\overrightarrow{OX}$ *tal que* $\overline{O\sigma(X)} = k.\overline{OX}$.

O teorema fundamental sobre semelhanças diz que toda semelhança é a composição de uma rotação, de uma translação, eventualmente, de uma reflexão no plano , e de uma homotetia. Todas as considerações feitas até agora, também podem ser adaptadas para o espaço tridimensional, mas não vamos nos ocupar desta generalização por enquanto, pois nosso objetivo é compreender a relação entre semelhança e áreas.

Teorema 2.1.6 *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou em uma reta paralela.*

Dem. Seja σ uma homotetia de centro O e razão k. O caso $k = 1$ é trivial, portanto, vamos considerar apenas o caso $k \neq 1$. Seja XY uma reta dada, existem duas possibilidades: O ponto $O \in XY$, e neste caso as duas semi-retas definidas por O permanecem invariantes pela homotetia, e portanto a reta como um todo. Se o ponto $O \notin XY$, então considere as semi-retas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$. Sejam $X' = \sigma(X)$ e $Y' = \sigma(Y)$, conforme ilustrado na figura abaixo.

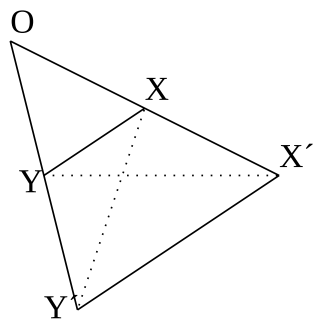


Figura 2.1: Homotetias associam a uma dada reta uma outra reta paralela.

Considere os triângulos ΔOXY e $\Delta OX'Y$, como $OX' = k.OX$ e estes dois triângulos possuem a mesma altura, então $A(\Delta OX'Y) = k.A(\Delta OXY)$.Da mesma forma temos que $A(\Delta OY'X) = k.A(\Delta OYX)$. Se $k > 1$, temos que $OX' > OX$ e $OY' > OY$,então os triângulos $\Delta OX'Y$ e $\Delta OY'X$ possuem uma parte em comum, o triângulo ΔOXY. Subtraindo-se esta parte comum, concluimos que $A(\Delta XX'Y) = A(\Delta YY'X)$, como estes triângulos possuem a mesma base, $\overline{XY}$, então também possuem a mesma altura, logo

XY é paralela a $X'Y'$. Se $k < 1$, basta fazer um raciocínio semelhante, agora utilizando como triângulo comum $A(\Delta OX'Y')$. Resta-nos mostrar que $X'Y' = k.XY$, para isto, considere os triângulos $\Delta OX'Y$, ΔOXY , $\Delta XX'Y$, $\Delta YY'X'$ e $\Delta OX'Y'$. Denominando $a = A(\Delta OXY)$, $b = A(\Delta XX'Y)$,e $c = A(\Delta YY'X')$, teremos então que

$$a + b = k.a, \qquad a + b + c = k.(a + b).$$

Subtraindo, se a primeira expressão da segunda, teremos que $c = k.b$, como os triângulos $\Delta XX'Y$ e $\Delta YY'X'$ têm a mesma altura, concluimos que $X'Y' = k.XY$. ■

A partir deste resultado, podemos tirar várias conclusões importantes sobre semelhanças de triângulos, as quais serão úteis no decorrer de nossa discussão.

Corolário 2.1.7 *Toda paralela a um lado de um triângulo determina um triângulo parcial semelhante ao triângulo inicial.* □

Corolário 2.1.8 *(*Teorema de Thales*) Feixes de retas paralelas dividem pares de retas transversais em segmentos proporcionais.* □

Note que para se demonstrar o teorema de Thales, basta utilizar o primeiro corolário tantas vezes quantas foram as retas paralelas do feixe e depois utilizar propriedades elemntares de proporções. Toda a complexidade existente no teorema com respeito a razões irracionais entre dois segmentos já foi tratada na definição de área. Isto evita as dificuldades existentes em exposições de livros didáticos como [3] , onde segmentos incomensuráveis são tratados no contexto da demonstração do teorema.

Proposição 2.1.9 *(*Recíproca do corolário*) Dado um triângulo ΔABC , se $X \in \overline{AB}$ e $Y \in \overline{AC}$ são pontos tais que $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}$, então $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{BC}$.* □

Teorema 2.1.10 *Dois triângulos semelhantes possuem ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo, então eles são semelhantes:*

1. *Possuem os três lados proporcionais (caso Lado-Lado-Lado).*
2. *Possuem dois ângulos congruentes (caso Ângulo-Ângulo).*

3. Possuem um ângulo congruentes compreendido entre dois lados proporcionais (caso Lado-Ângulo-Lado). □

Proposição 2.1.11 *Dois ângulos semelhantes são sempre congruentes.* □

Uma demonstração de todos estes resultados pode ser encontrada na referência [8].

Agora, vamos discutir mais de perto a razão existente entre as áreas de duas figuras que são semelhantes:

Lema 2.1.12 *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.*

Dem. Sejam dois triângulos semelhantes ΔABC e ΔXYZ, e seja a razão de semelhança igual a k. Tome como base respectivamente os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$, assim $XY = k.AB$. Também é fácil provar, em vista dos resultados enunciados anteriormente que a altura relativa a $\overline{XY}$ é igual a k vezes a altura relativa a $\overline{AB}$. Assim

$$\begin{aligned} A(\Delta XYZ) &= \frac{1}{2}.XY.h_{XY} = \frac{1}{2}.k.AB.k.h_{AB} = k^2.\left(\frac{1}{2}.AB.h_{AB}\right) = \\ &= k^2.A(\Delta ABC). \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.13 *A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os mesmos.*

Dem. Sejam dois polígonos semelhantes Σ_1 e Σ_2 cuja razão de semelhança é igual a k. Comovimos, uma semelhança associa vértices do primeiro polígono a vértices do segundo e esta associação é 1 a 1. Assim os dois polígonos semelhantes possuem o mesmo número de vértices. Considere uma triangulação de Σ_1 composta pelos triângulos T_1, T_2, ..., T_n, então é fácil ver que a esta triangulação está associada uma triangulação em Σ_2 com o mesmo número de triângulos e todos semelhantes aos triângulos do primeiro polígono, denominemos estes triângulos por T_1', T_2', ..., T_n'. Assim, teremos

$$\begin{aligned} A(\Sigma_2) &= A(T_1') + A(T_2') + \cdots + A(T_n') = \\ &= k^2.A(T_1) + k^2.A(T_2) + \cdots + k^2.A(T_n) = k^2.A(\Sigma_1). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.14 *A razão entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre as mesmas.*

Dem. Sejam Σ_1e Σ_2 duas figuras semelhantes de razão k. Como uma semelhança leva pontos interiores em pontos interiores, e conseqüentemente, pontos exteriores em pontos exteriores, então qualquer polígono P interior a Σ_1 será associado a um polígono P' no interior de Σ_2. Da mesma forma, qualquer polígono Q exterior a Σ_1 será associado a um polígono Q' exterior a Σ_2. Como $A(P) < A(\Sigma_1) < A(Q)$, teremos que $k^2.A(P) < A(\Sigma_2) < k^2.A(Q)$ para quaisquer polígonos P interior e Q exterior a Σ_1.

Suponha agora que $A(\Sigma_2) < k^2.A(\Sigma_1)$, então $\frac{1}{k^2}.A(\Sigma_2) < A(\Sigma_1)$ e portanto haverá uma aproximação por falta da área de $Sigma_1$, dada por um polígono P interno a Σ_1, de forma que

$$\frac{1}{k^2}.A(\Sigma_2) < P < A(\Sigma_1).$$

Logo $A(\Sigma_2) < k^2.A(P)$, o que contradiz nossa afirmação anterior. Da mesma forma, não podemos ter $A(\Sigma_2) > k^2.A(\Sigma_1)$ e portanto teremos $A(\Sigma_2) = k^2.A(\Sigma_1)$. ■

2.2 O Teorema de Pitágoras, um Teorema de Áreas

Talvez o teorema de Pitágoras seja o exemplo mais ilustrativo da mudança de ênfase no ensino de matemática no ensino básico nos últimos anos, de uma perspectiva geométrica para uma perspectiva algébrica de pura manipulação de fórmulas para se obter resultados numéricos. Apenas recordando, um triângulo retângulo é um triângulo que possui um de seus ângulos internos igual a um ângulo reto, a hipotenusa do triângulo retângulo é o lado oposto ao ângulo reto, os outros dois lados são denominados catetos. O teorema de Pitágoras é apresentado apenas como uma relação envolvendo as medidas dos lados de um triângulo retângulo: "o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos". Assim, o estudante é capaz de utilizar o teorema para encontrar um dos lados dados outros dois, encontrar a medida da diagonal de um quadrado em relação à medida do lado ou ainda a altura de um triângulo equilátero em relação à medida do lado. No entanto, a falta de significado geométrico dificulta ao estudante, por exemplo, utilizar o mesmo teorema para resolver um problema como o da quadratura de lunas de Hipócrates.

Apresenttaremos aqui a demonstração do Teorema de Pitágoras conforme é vista nos "Elementos" de Euclides (Proposição 47 do livro I) [4].

Teorema 2.2.1 *(Teorema de Pitágoras) A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.*

Dem. Seja o trângulo ΔABC com o ângulo reto situado no vértice A, construamos os quadrados $ABDE$, $AFGC$ e$BCHK$ conforme ilustrado na figura abaixo. Também seja o segmento $\overline{AQ}$ perpendicular à hipotenusa $\overline{BC}$ e intersectando a mesma no ponto P (vide figura).

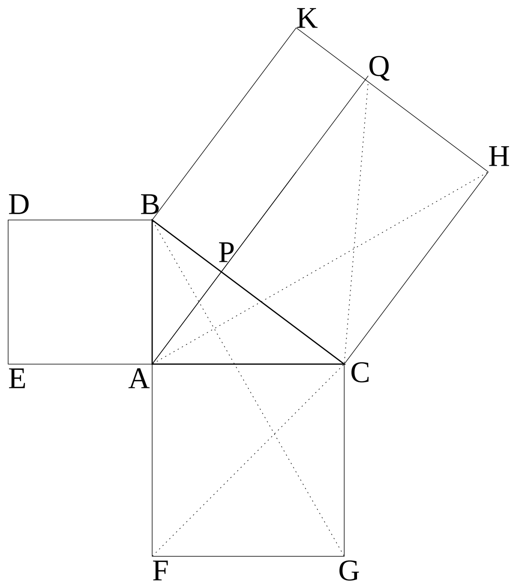


Figura 2.2: Triângulo retângulo e os quadrados sobre os seus lados.

Vamos mostrar que a área do quadrado $AFGC$ é igual à área do retângulo $CHQP$ e que a área do quadrado $ABDE$ é igual à área do retângulo $BPQK$.

Para isto, note que o triângulo ΔGCF possui a mesma área que o triângulo ΔGCB, pois ambos possuem a mesma base $\overline{GC}$ e a mesma altura, já que $\overline{GC}$ é um segmento paralelo a $\overline{FB}$. Agora considere os triângulos ΔGCB e ΔACH. Temos que $\overline{GC} \equiv \overline{AC}$, $\overline{CB} \equiv \overline{CH}$ e $G\widehat{C}B \equiv A\widehat{C}H$ (um ângulo reto mais o ângulo $\widehat{C}$ do triângulo retângulo). Logo, pelo caso Lado-Ângulo-Lado de congruência de triângulos, temos que $\Delta GCB \equiv \Delta ACH$ e portanto têm a mesma área. Finalmente os triângulos ΔACH e ΔQCH possuem a mesma área pois ambos possuem a mesma base $\overline{CH}$ e a mesma altura, pois $\overline{CH}$ é um segmento paralelo a $\overline{AQ}$. Portanto

$$A(AFGC) = 2.A(\Delta GCF) = 2.A(\Delta QCH) = A(CHQP).$$

Analogamente, podemos concluir que $A(ABDE) = A(BPQK)$. E assim, concluimos que

$$A(BCHK) = A(CHQP) + A(BPQK) = A(AFGC) + A(ABDE).$$

■

Corolário 2.2.2 *Dado um triângulo retângulo ΔABC com ângulo reto em A e três figuras semelhantes Σ_1, Σ_2 e Σ_3, tais que as razões de semelhança façam com que quaisquer pares de pontos homólogos $X, Y \in \Sigma_1$, $X', Y' \in \Sigma_2$ e $X'', Y'' \in \Sigma_3$ obedeçam à relação*

$$\frac{XY}{AB} = \frac{X'Y'}{AC} = \frac{X''Y''}{BC},$$

então teremos que $A(\Sigma_3) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2)$. □

Agora, podemos nos deter no problema proposto sobre a quadratura de lunas de Hipócrates.

Exercício 2.2.3 *Sejam três semi-círculos contruídos sobre os lados de um triângulo retângulo como mostrado na figura abaixo. Mostre que $A(IV) + A(V) = A(I)$.*

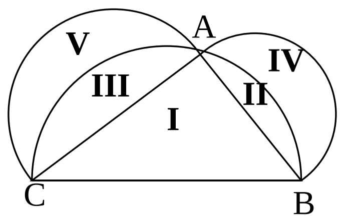


Figura 2.3: Quadratura de lunas de Hipócrates.

Observando a figura 2.3, temos os semi-círculos BC, BA e BC, estes são figuras semelhantes (vide exercício complementar no final deste capítulo). Pelo teorema de Pitágoras, temos que $A(BC) = A(BA) + A(AC)$. Por outro lado, a área do semi-círculo BC é igual à soma da área do triângulo ΔABC com as áreas dos segmentos circulares determinados pelos segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$. Denominaremos respectivamente de regiões I, II e III o triângulo ΔABC, o segmento circular BA e o segmento circular AC. Da mesma forma a soma das áreas dos semi-círculos BA e AC comprende as duas regiões curvas às quais se refere o enunciado, que denotaremos por regiões IV e V e os mesmos dois segmentos circulares II e III. Assim $A(BC) = I + II + III$, por sua vez, $A(BC) = A(BA) + A(AC) = II + IV + III + V$. Portanto $I = IV + V$.

Há inúmeras outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, dentre elas, destacaremos a seguinte que possui interesse para nossas discussões em capítulos posteriores e envolve a decomposição dos quadrados sobre os catetos em polígonos menores de tal forma que quando rearranjados formem o quadrado maior. Para efetuar esta decomposição, vamos proceder como indicado na figura abaixo:

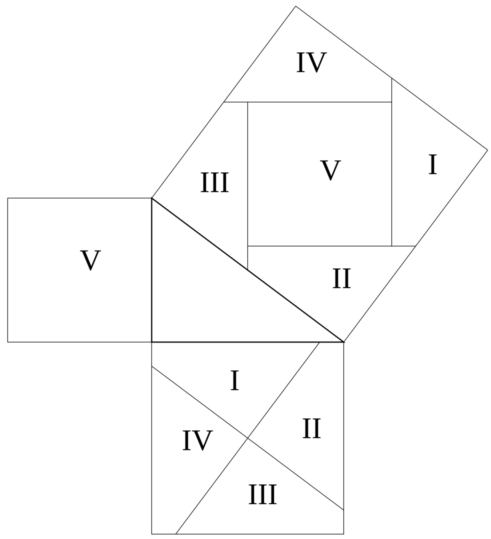


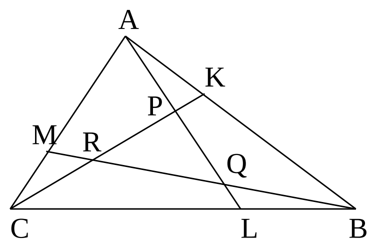
Figura 2.4: Demonstração do Teorema de Pitágoras através da decomposição dos quadrados em partes congruentes.

Primeiramente tome o quadrado sobre o maior cateto e pelo seu centro trace uma reta paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular e esta. É fácil ver que estas duas retas determinam no quadrado quatro partes congruentes, e portanto de mesma área. Tomando o quadrado menor e estas quatro peças do quadrado maior, dispomos as partes no quadrado maior conforme ilustrado na figura 2.4. Deixamos ao encargo do leitor a verificação de todas as congruências existentes entre as peças e portanto a validade do resultado.

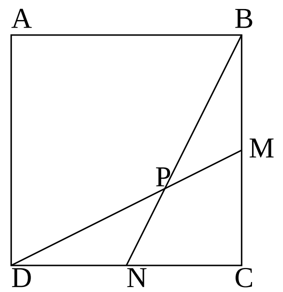
2.3 Exercícios Complementares

1) Mostre que quaisquer dois círculos, quaisquer duas circunferências e quaisquer dois semi-círculos são semelhantes e a razão de semelhança é igual à razão dos seus raios.

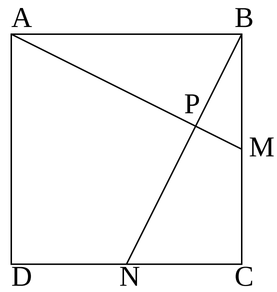
2) Na figura abaixo, temos que $AB = 3.AK$, $BC = 3.BL$ e $CA = 3.CM$. Calcule a razão entre a área do trângulo ΔPQR e a área do triângulo ΔABC.



3) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado, M é o ponto médio de $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{CD}$. Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPMB e a do quadrado $ABCD$.



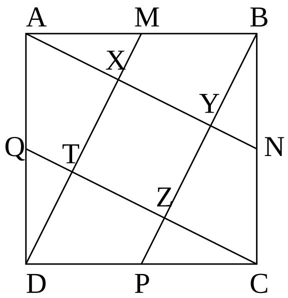
4) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado, M é o ponto médio de $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{CD}$. Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPMB e a do quadrado $ABCD$.



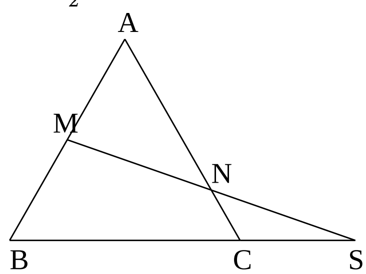
5) No quadrado da figura abaixo, os pontos M, N, P e Q são pontos médios dos lados indicados.

a) Mostre que $XYZT$ é um quadrado.

b) Calcule a área de $XYZT$ supondo o quadrado $ABCD$ de lado l.



6) Na figura abaixo, o triângulo ΔABC é equilátero de lado l, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $CS = \frac{1}{2}.l$. Calcule a área do quadrilátero $MNCB$.



Capítulo 3

Equidecomponibilidade e Equicomplementabilidade

Neste capítulo, exploraremos as noções equivalentes de área para figuras planas. Desde o primeiro capítulo ressaltamos a idéia de decompormos uma figura em figuras simples, das quais seja mais fácil calcularmos a área, e utilizarmos a aditividade da área para obtermos a área total da figura mais complexa. O que faremos agora é mostrar que é sempre possível recortar um polígono qualquer e apenas movendo suas partes obtermos um quadrado com a mesma área. Assim, o processo de medir área, significando comparar uma determinada figura com um quadrado de lado unitário, pode literalmente ser efetuado.

Durante todo este capítulo, seguiremos de perto a exposição encontrada na referência [2], muito embora faremos uma pequena variação no método de demonstração. Também o leitor poderá encontrar uma discussão destes conceitos nas referências [9] e [6]. A segunda referência, de autoria de David Hilbert, foi a primeira a oferecer um tratamento axiomático para toda a Geometria (incluindo áreas) levando em conta todos os avanços recentes da Matemática, substituindo pela primeira vez em mais de dois mil anos a formulação de Euclides.

3.1 Figuras Equidecomponíveis e Equicomplementáveis

Durante toda esta exposição, ao mencionarmos o termo "figura", esteja subentendido polígono. Não trataremos de figuras curvilíneas neste tratamento pois, como já discutido no primeiro capítulo, toda figura plana para a qual se possa atribuir um valor de área pode ser aproximanda tanto por falta como por excesso por polígonos de um número arbitrário de lados.

Examinemos a figura abaixo. Ambas são compostas exatamente pelas cinco figuras componentes, apenas rotacinando-se as partes 2, 3, 4 e 5 ao redor da parte 1, conforme indicado. Estas duas figuras serão denominadas equidecomponíveis ou equicompostas.

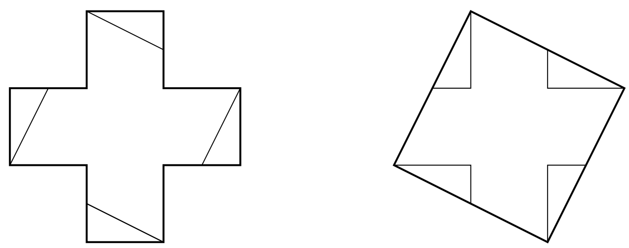


Figura 3.1: Duas figuras equidecomponíveis.

Definição 3.1.1 *Duas figuras são equidecomponíveis (ou equicompostas) se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes e por meio de um rearranjo das mesmas, compor a outra figura.*

Note que é fundamental o fato de serem um número finito de peças, ou seja, que o processo de "desmontar" uma figura e montar outra figura seja um processo finito. A palavra rearranjo também merece uma explicação. Por rearranjo entendemos que as peças da primeira figura sofrem apenas movimentos rígidos no plano (translações, rotações e eventualmente reflexões), isto garante que em todo o processo as peças constituintes sejam congruentes.

Exercício 3.1.2 *Mostre que o conceito de equidecomponibilidade é uma relação de equivalência.*

Existe um jogo inventado na China há muitos séculos que explora o conceito de equidecomponibilidade de uma forma criativa e desafiadora, o

Tangram. Este jogo pode ser utilizado como atividade para motivar o ensino de áreas na educação básica. Isto se dá basicamente por dois motivos: Primeiramente ele ajuda a ilustrar os conceitos fundamentais, pois as peças deste jogo são exatamente, triângulos, paralelogramos e trapézios, ou seja, figuras elementares das quais é possível calcular área. Em segundo lugar, por seu carater altamente desafiador, pode servir para estimular os estudantes a elaborarem esboços de demonstrações das fórmulas de áreas de figuras elementares, como as que apresentamos no primeiro capítulo. Nos sites abaixo, o leitor poderá encontrar mais informações sobre o Tangram e sugestões de uso em sala de aula:

1. `www.alemdeeducar.com.br/jogos/flash/tangram/tangran.shtml}`, neste site temos um Tangram interativo onde é possível mover as peças para compor uma figura no centro do painel.

2. `www.geocities.com/tania1974pt}`, este site contém informações sobre o Tangram, sugestões de atividades didáticas utilizando o mesmo e links para outros sites tratando do assunto.

3. `www.calculando.com.br}`, este é um site mais geral, dedicado a professores do ensino fundamental, possui atividades categorizadas por série e além do Tangram, diversos outros jogos e desafios que podem ser implementados em sala de aula.

4. `standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.4}`, este site é em inglês, e trás sugestões de atividades educacionais em Matemática para as escolas americanas, em particular, atividades envolvendo Tangram.

O conceito de equidecomponibilidade se baseia em um método de divisão de uma figura complexa em figuras mais simples. Mas podemos também utilizar um outro métos, ao adicionarmos figuras para obtermos uma figura mais simples, como visto no primeiro capítulo no cálculo da área de um paralelogramo. Estes métodos são denominados métodos de adição. Na figura abaixo, temos o exemplo de duas figuras diferentes, mas que ao adicionarmos o mesmo conjunto de quatro peças acabam por compor figuras congruentes, estas figuras são ditas ser equicomplementáveis.

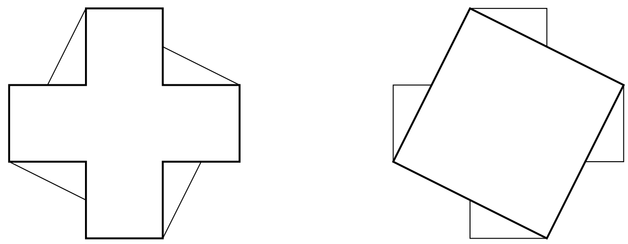


Figura 3.2: Duas figuras equicomplementáveis.

Definição 3.1.3 *Duas figuras são equicomplementáveis (ou equiadicionais) se é possível justapor a ambas um mesmo conjunto finito de figuras congruentes de modo as duas composições sejam figuras congruentes.*

Note mais uma vez, que o processo de adição tem que ser finito para podermos falar de equicomplementabilidade.

Exercício 3.1.4 *Mostre que o conceito de equicomplementabilidade é uma relação de equivalência.*

Podemos tirar algumas conclusões imediatas a respeito da relação entre os conceitos de área, equidecomponibilidade e equicomplementabilidade que podem ser resumidas na proposição abaixo.

Proposição 3.1.5 *a) Se duas figuras são equidecomponíveis, então elas possuem a mesma área.*

b) Se duas figuras são equicomplementáveis, então possuem a mesma área.

Dem. a) A prova deste fato é elementar uma vez que se duas figuras Σ_1 e Σ_2 são equidecomponíveis, elas são compostas pelo mesmo conjunto de peças, denominemos as mesmas por P_1, P_2, ..., P_n. Assim

$$A(\Sigma_1) = A(P_1) + A(P_2) + \cdots + A(P_n) = A(\Sigma_2).$$

b) Sejam duas figuras Σ_1 e Σ_2 equicomplementáveis. Então existe um conjunto finito de peças, que denotaremos por Q_1, Q_2, ..., Q_m, tais que justapostas a estas figuras compõem duas figuras congruentes, que denominaremos Ω_1 e Ω_2. Então temos

$$A(\Omega_1) = A(\Omega_2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A(\Omega_1) &= A(\Sigma_1) + A(Q_1) + A(Q_2) + \cdots + A(Q_m), \\ A(\Omega_2) &= A(\Sigma_2) + A(Q_1) + A(Q_2) + \cdots + A(Q_m). \end{aligned}$$

Portanto $A(\Sigma_1) = A(\Sigma_2)$. ■

As recíprocas destes resultados serão feitas na próxima seção, onde demonstraremos o teorema de Bolyai-Gerwien. Também o mesmo teorema nos permitirá concluir que os conceitos de equidecomponibilidade e equicomplementabilidade são equivalentes.

3.2 O Teorema de Bolyai-Gerwien

Para demonstrarmos que dois polígonos que possuem a mesma área são equidecomponíveis, precisamos de alguns lemas.

Lema 3.2.1 *Todo triângulo é equidecomponível a um paralelogramo de mesma área.*

Dem. a prova deste fato segue, em linhas gerais, o mesmo procedimento que utilizamos para calcularmos a área de um triângulo.

Seja um triângulo ΔABC e os M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Denominemos de região I o triângulo ΔAMN e de região II o quadrilátero $MNCB$. Ao leitor é deixada a verificação de que este quadrilátero é um trapézio cuja base menor é igual à metade da base maior, utilize para isto o exercício complementar 4) do capítulo primeiro. Ao redispormos a região I conforme indicado na figura abaixo, obteremos um paralelogramo (**Verifique os detalhes**).

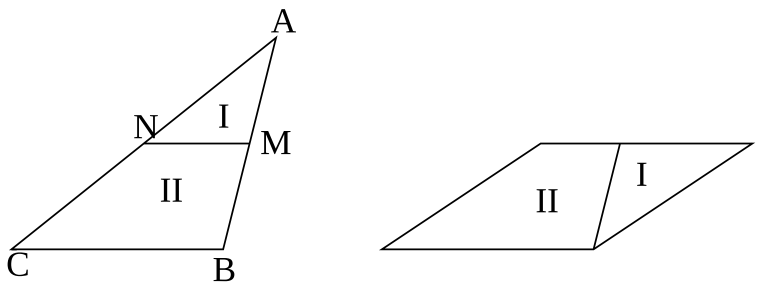


Figura 3.3: Um triângulo é equidecomponível com um paralelogramo.

Isto demonstra o resultado desejado. ■

Lema 3.2.2 *Se dois paralelogramos possuem áreas iguais e uma base comum, então são equidecomponíveis.*

Dem. Sejam $ABCD$ e $ABEF$ dois paralelogramos de mesma área. Como a base $\overline{AB}$ é comum, então os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ estão sobre a mesma reta paralela à reta AB. Sobre a reta AB, tracemos uma série de segmentos todos congruentes a $\overline{AB}$, de forma que o próprio segmento $\overline{AB}$, seja um deles. Pelas extremidades de cada um destes segmentos tracemos retas paralelas a AD e AF, conforme ilustrado na figura abaixo.

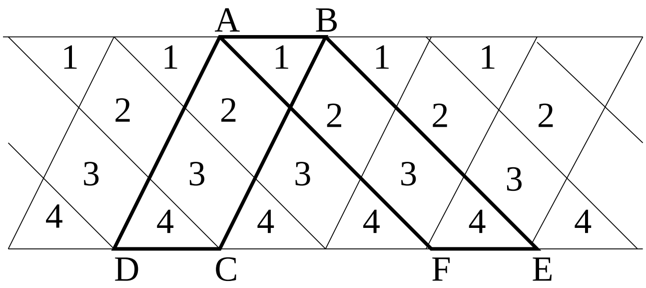


Figura 3.4: Dois paralelogramos equidecomponíveis.

A faixa entre as retas AB e DE ficará dividida em uma série de polígonos. Cada um destes polígonos, ao ser transladado horizontalmente de uma distância AB será levado em um polígono a ele congruente (**Verifique estas congruências**). As partes congruentes na figura são indicadas pelos mesmos números. Devemos observar que cada um dos paralelogramos contém exatamente uma parte 1, uma parte 2, e assim por diante, logo, eles são equidecomponíveis. ■

Corolário 3.2.3 *Um paralelogramo é sempre equidecomponível com um retângulo de mesma área.*

Dem. Basta tomar um retângulo com a mesma base e a mesma altura que o paralelogramo original e utilizar o procedimento do lema anterior para construir explicitamente a equidecomponibilidade. ■

Lema 3.2.4 *Todo retângulo é equidecomponível com um quadrado de mesma área.*

Dem. Seja um retângulo de lados com medidas a e b. Um quadrado com a mesma área que este retângulo terá um lado l tal que

$$l^2 = a.b \qquad \Rightarrow \qquad l = \sqrt{a.b}.$$

Este número é denominado média geométrica de a e b. Podemos determinar este número geometricamente através da seguinte construção: Tome um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $(a+b)$. Construa um semi-círculo que tenha este segmento como diâmetro e tome o ponto $C \in \overline{AB}$ tal que $AC = a$ e $CB = b$. Por C, trace a perpendicular $\overline{CP}$ ao segmento $\overline{AB}$, onde P está sobre a semi-circunferência, conforme indicado na figura abaixo. Afirmamos que $CP = \sqrt{a.b}$.

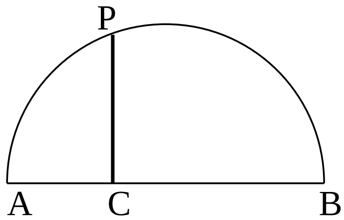


Figura 3.5: Média geométrica entre dois segmentos.

Para demonstrarmos este fato, precisamos nos lembrar que o ângulo inscrito em um semi-círculo é sempre um ângulo reto, assim, o triângulo ΔPAB é retângulo no vértice P (ver figura 3.5). Pelo caso de semelhança Ângulo-Ângulo, temos que os triângulos ΔPAB, ΔCAP e ΔCPB são semelhantes, assim

$$\frac{CP}{CA} = \frac{CB}{CP}, \qquad \Rightarrow (CP)^2 = CA.CB = a.b.$$

Uma vez tendo a média geométrica de a e b, devemos verificar se nenhum dos lados do retângulo é maior que duas vezes a média geométrica. Se este for o caso, suponhamos por exemplo que $b > 2.l$, então dividimos o retângulo original em dois retângulos com lados a e $\frac{b}{2}$ e empilhamos estes retângulos de forma a compor um novo retângulo de lados $2.a$ e $\frac{b}{2}$. Note que a média geométrica entre os lados deste novo retângulo é igual à média geométrica entre a e b. Verifiquemos de novo se existe algum lado deste novo retângulo maior que duas vezes a sua média geométrica. Se for o caso, podemos repetir o processo acima quantas vezes forem necessárias, uma vez que a média geométrica permanece a mesma.

Tendo obtido um retângulo onde nenhum dos lados é maior que o dobro da sua média geométrica. Coloquemos os dois quadriláteros conforme nos indica a figura abaixo.

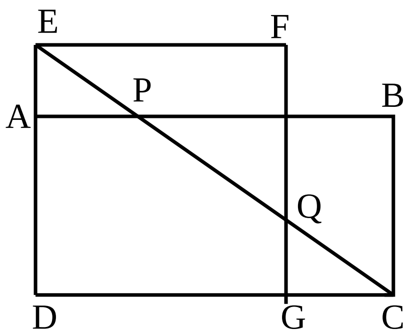


Figura 3.6: Um retângulo e um quadrado equidecomponíveis.

Conforme indicado, seja o retângulo $ABCD$ com $AD = a$ e $AB = b$, e seja o quadrado $EFGD$ com lado $l = \sqrt{a.b}$. Tracemos o segmento $\overline{EC}$, que cruza o segmento $\overline{AB}$ no ponto P e o segmento $\overline{FG}$ no ponto Q. Consideremos os trângulos ΔEDC e ΔQGC. Como $\overline{QG}$ é paralelo a $\overline{ED}$ temos que os trângulos ΔEDC e ΔQGC são semelhantes, assim temos

$$\frac{ED}{QG} = \frac{DC}{GC} \qquad \Rightarrow \frac{l}{QG} = \frac{b}{b-l},$$

portanto

$$QG = \frac{l(b-l)}{b} = \frac{l.b - l^2}{b} = \frac{l.b - a.b}{b} = l - a.$$

Assim $FQ = a = BC$.

De igual modo, podemos mostrar que os triângulos ΔEAP e ΔEDC são semelhantes, e portanto

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AP}{DC} \qquad \Rightarrow \frac{l-a}{l} = \frac{AP}{b},$$

portanto

$$AP = \frac{(l-a).b}{l} = \frac{l.b - a.b}{l} = \frac{l.b - l^2}{l} = b - l.$$

Assim $FE = l = BP$. Pelo caso Lado-Ângulo-Lado de congruência de triângulos, podemos concluir que $\Delta EFQ \equiv \Delta PBC$. Logo, apenas efetuando uma translação do triângulo ΔPBC do retângulo, podemos formar o quadrado de lado l desejado, que possui a mesma área. ■

Lema 3.2.5 *Dois quadrados dados são equidecomponíveis com um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos dois.*

Dem. Este nada mais é do que o teorema de Pitágoras apresentado na forma de decomposição dos quadrados sobre os catetos, conforme apresentado no capítulo anterior. ∎

Agora estamos em condições de provarmos nosso resultado principal.

Teorema 3.2.6 *(Bolyai-Gerwien) Dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis.*

Dem. Precisamos provar tão somente que qualquer polígono é equidecomponível com um quadrado de mesma área. Pois se dois polígonos Σ_1 e Σ_2 tiverem a mesma área, eles serão equidecomponíveis com quadrados de mesma área e portanto congruentes. Para obtermos a equidecomposição explícita de um polígono no outro, basta superpormos os dois quadrados e fazermos todos os cortes que dividem os quadrado nas peças necessárias para formar o primeiro polígono e todos os cortes necessários que dividem o quadrado nas peças necessárias para formar o segundo polígono. As peças resultantes de todos estes cortes podem simultaneamente compor os dois polígonos.

Bem, primeiramente, utilizemos o fato que todo polígono admite uma triangularização. Tomando cada um destes triângulos, pelo primeiro lema, podemos transformá-los em paralelogramos. Pelo corolário do segundo lema, estes paralelogramos podem ser transformados em retângulos. Pelo terceiro lema, todos estes retângulos podem ser transformados em quadrados. Finalmente, utilizando o quarto lema, podemos juntar estes quadrados dois a dois sempre obtendo um quadrado cuja área é a soma dos dois primeiros. Ao final do processo, teremos o quadrado resultante que possui a mesma área do polígono inicial. ∎

Corolário 3.2.7 *Dois polígonos de mesma área são equicomplementáveis.*

Dem. Sejam dois polígonos Σ_1 e Σ_2 de mesma área. tomemos dois quadrados congruentes de dimensões suficientemente grandes tais que Σ_1 fique no interior do primeiro e Σ_2 no inerior do segundo. Retirando-se Σ_1 e Σ_2 de seus respectivos quadrados, teremos duas figuras de mesma área, que pelo teorema de Bolyai-Gerwien são equidecomponíveis. Portanto encontramos uma quantidade finita de peças, que justapostas, aos polígonos iniciais resultam em quadrados congruentes, logo os polígonos são equicomplementáveis. ∎

Corolário 3.2.8 *Dois polígonos são equidecomponíveis se, e somente se forem equicomplementáveis.*

Dem. A demonstração deste resultado é resultante de tudo que foi discutido até agora: Se dois polígonos são equidecomponíveis, então possuem a mesma área e logo são equicomplementáveis. Reciprocamente, se dois polígonos são equicomplementáveis, então possuem a mesma área, logo são equidecomponíveis. ■

Para finalizar este capítulo, vamos mencionar, sem no entanto oferecer uma demonstração, um resultado surpreendente que extende o teorema de Bolyai-Gerwien:

Teorema 3.2.9 *(Hardwiger-Glur) Dados dois polígonos de mesma área, existe uma decomposição de ambos de tal forma que os lados das peças correspondentes sejam paralelos entre si.* □

Este belíssimo resultado, envolve considerações de teoria de grupos e pode ser visto em detalhes na referência [2].

Capítulo 4

Volumes e o Terceiro Problema de Hilbert

Em vista do teorema de Bolyai-Gerwien que nos garante que dois polígonos quaisquer são equidecomponíveis se, e somente se, possuem a mesma área e se, e somente se, forem equicomplementáveis, surge a pergunta natural se não é possível extender este resultado para volumes de poliedros. Esta pergunta foi colocada pelo matemático alemão David Hilbert em 1900 em seu pronunciamento no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris naquele ano e foi respondida logo em seguida por seu estudante Max Dehn [5, 7].

Neste capítulo, vamos esboçar as idéias principais envolvidas na prova deste teorema. Primeiramente, vamos definir o que vem a ser o volume de um sólido, em seguida vamos calcular os volumes de prismas e pirâmides que serão os sólidos de interesse para o nosso problema. O tratamento dos resultados neste capítulo será bem mais sucinto que o dispensado no caso de áreas, visto que nosso objetivo não é tratar de volumes de uma maneira extensiva, mas ressaltar aspectos importantes de um problema específico. O leitor poderá encontrar na referência [8] uma exposição excelente a respeito de volumes que é implementável para o ensino médio.

Por fim, para apresentarmos o resultado de Dehn, será necessária uma rápida introdução a alguns conceitos de álgebra linear, como espaços vetoriais, independência linear, bases, transformações lineares, etc. A exposição será feita da forma mais elementar possível de forma que o leitor poderá acompanhá-la sem grandes dificuldades. O leitor habituado com estes conceitos poderá se dirigir diretamente à demonstração de Dehn.

4.1 Volumes de Sólidos

O conceito de volume é aplicado a sólidos no espaço, que são regiões no espaço limitadas por uma superfície fechada e orientável, isto é, uma superfície que divida o espaço em duas regiões distintas, uma exterior e outra interior. Muito embora, no dia a dia, possamos falar, por exemplo do volume de água em um jarro, a rigor estamos falando do volume da região limitada pelas paredes do jarro e pela superfície da água. Denominamos a superfície que delimita o sólido espacial de bordo do sólido. Em geral sempre consideramos o bordo como parte do sólido. Então podemos caracterizar volume de uma forma análoga a áreas:

Definição 4.1.1 *O volume de um sólido espacial Ω delimitado por uma superfície fechada Σ é um número real não negativo, $V(\Omega)$ que possui as seguintes propriedades:*

1. *Se dois sólidos são congruentes, então seus volumes são iguais.*
2. *Se dois sólidos se intersectam no máximo pelo bordo, então o volume da união dos dois sólidos é igual à soma dos seus volumes individuais.*
3. *Um cubo de areasta unitária, possui volume igual a* 1.

Da definição anterior, podemos concluir que se um sólido estiver na região
Durante todo o restante desta exposição, vamos nos restringir a uma classe de sólidos denominados poliedros. Um poliedro é um sólido delimitado por uma superfície fechada formada por polígonos planos justapostos pelas suas areastas. A este polígonos denominamos faces do poliedro. Da mesma forma que para áreas, é possível falar em aproximações do volume de um sólido por falta e por excesso, respectivamente, através de polígonos interiores e exteriores ao sólido. Somente fará sentido atribuirmos um volume a sólidos que possuam a propriedade que para qualquer número real positivo, tão pequeno quanto se queira, exista uma aproximação por excesso e uma aproximação por falta cuja diferença entre seus volumes seja menor que este número dado.

Vamos estabelecer o primeiro resultado fundamental sobre o volume de um paralelepípedo retângulo.

Definição 4.1.2 *Um paralelepípedo é um poliedro formado por 6 faces em forma de paralelogramos tais que se agrupam em três pares de faces opostas* *paralelas. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como sendo base, a distância entre esta face e sua oposta é dita ser sua altura.*

Definição 4.1.3 *Um paralelepípedo retângulo é um paralelepípedo onde todas as faces são retângulos e portanto as faces adjacentes são sempre ortogonais duas a duas, isto é, todos os ângulos diedrais (ângulos entre faces adjacentes) são retos.*

É imediato verificar que duas faces opstas em um paralelepípedo qualquer são paralelogramos congruentes. Devido às simetrias adicionais impostas pela ortogonalidade entre as faces adjacentes, um paralelepípedo está determinado univocamente por apenas três números que são as medidas de suas arestas. Esta unicidade não é válida para paralelepípedos quaisquer, pois mesmo as medidas das arestas estando fixadas, temos uma escolha infinita para os ângulos diedrais.

Teorema 4.1.4 *O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto das medidas de suas arestas.*

Dem. Primeiramente para paralelepípedos retângulos cujas medidas das arestas são números inteiros, digamos m ,n e p, é razoavelmente intuitivo que o número de cubos de lado unitário necessários para preencher todo seu volume é $m.n.p$.

Se a medida das arestas do paralelepípedo forem números racionais, digamos $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ e$\frac{m_3}{n_3}$, então é necessário estabelecer uma nova unidade de medida que possa ao mesmo tempo medir o volume do cubo unitário bem como o volume do cudo dado. Este novo padrão de medida será um paralelepípedo retângulo de arestas $\frac{1}{n_1}$ $\frac{1}{n_2}$ e $\frac{1}{n_3}$. Para formarmos um cubo de lado unitário precisamos de $n_1.n_2.n_3$ destes paralelepípedos, e portanto o volume de cada um destes será $\frac{1}{n_1.n_2.n_3}$. Finalmente, o paralelepípedo de arestas $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ e $\frac{m_3}{n_3}$ conterá $m_1.m_2.m_3$ destes novos paralelepípedos padrão, logo o volume total deste paralelepípedo será igual a $\frac{m_1.m_2.m_3}{n_1.n_2.n_3}$, que é o produto das medidas de suas arestas.

Considere agora paralelepípedos com alguma aresta de medida a, irracional, e as outras duas de medida racional, $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$. Podemos aproximar arbitrariamente seu volume por excesso e por falta, respectivamente através de paralelepípedos exteriores e interiores com arestas racionais. Com um raciocínio análogo ao utilizado no teorema 1.2.1, podemos verificar que o volume deste paralelepípedo não poderá ser nem maior nem menor que $a.\frac{m_1}{n_1}.\frac{m_2}{n_2}$.

Prosseguindo, podemos tratar de paralelepípedos com duas arestas de media irracional e, por fim, com três arestas de medida irracional. Sempre verificando que o volume resultante será o produto das medidas das três arestas. ■

Corolário 4.1.5 *O volume de um cubo é igual ao cubo da medida de sua aresta.*

Dem. Basta tomarmos o resultado anterior, lembrando que um cubo é um paralelepípedo retângulo com as três medidas das arestas iguais. ■

Note que iniciamos com

Note que aqui utilizamos um caminho inverso do que fizemos com áreas, a saber, naquele contexto iniciamos com a área do quadrado e depois passamos à área do retângulo e aqui começamos com o volume do paralelepípedo retângulo e depois tiramos o volume do cubo como conseqüência imediata. Poderíamos ter feito o mesmo processo para áreas, ou seja, estabelecermos primeiramente que a área de um retângulo é igual ao produto das medidas de suas arestas e então particularizarmos para obtermos a áres de um quadrado, mas a vantagem é que naquele contexto, tínhamos uma relação algébrica imediata que nos permitia relacionar a área de um retângulo com áreas de quadrados, relação esta inexistente para o caso de volumes. Este é um primeiro exemplo onde podemos perceber que o cálculo de volumes pode ser extremamente mais complexo que o cálculo de áreas.

Mas a diferença fundamental entre o cálculo de áreas e o de volumes reside neste resultado que nos ajudará a calcularmos os volumes de outras figuras sólidas.

Teorema 4.1.6 *(princípio de Cavalieri) Sejam Ω_1 e Ω_2 dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona Ω_1 e Ω_2 segundo figuras planas com áreas iguais, então $V(\Omega_1) = V(\Omega_2)$.* □

A demonstração rigorosa deste resultado em sua forma mais geral reside no contexto de teoria da medida, que vai muito além do escopo deste trabalho. A idéia básica é que todo sólido pode ser visto como composto de finas fatias, de espessura desprezível, assim as fatias correspondentes em dois sólidos diferentes possuem a mesma área, também possuirão aproximadamente o mesmo volume, logo, como os volumes totais são a soma dos volumes de todas as fatias, então os volumes totais dos dois sólidos terão de ser muito próximos. Esta aproximação fica cada vez mais acurada quando diminuimos a espessura da fatia. Em um processo de limite, podemos inferir que os volumes dos dois sólidos são iguais. A figura abaixo ilustra a idéia do princípio de Cavalieri.

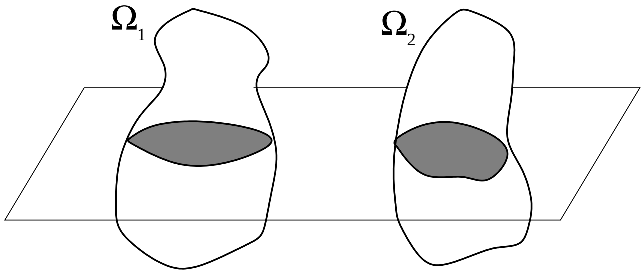


Figura 4.1: Princípio de Cavalieri.

Antes alguns esclarecimentos: Primeiramente, por plano horizontal entendemos qualquer plano paralelo a um plano pré-fixado, de uma vez por todas, no espaço. Em segundo lugar, o princípio de Cavalieri afirma que se existe uma maneira de dispormos dois sólidos de forma que suas secções por planos horizontais tenham sempre a mesma área então seus volumes são iguais. Isto não quer dizer que dois sólidos de mesmo volume necessariamente tenham que ter secções iguais por planos horizontais. Em terceiro lugar, se dois sólidos possuem as secções por planos horizontais sempre de mesma área, isto significa que os sólidos possuem a mesma altura, isto é, eles estão situados exatamente entre o mesmo par de planos paralelos.

Em terceiro lugar, para que possamos utilizar o princípio de Cavalieri para calcularmos volumes, teremos que dispor nossos sólidos de uma forma apropriada de forma que eles satisfaçam as hipóteses do teorema. Isto é feito através de movimentos rígidos (rotações e translações no espaço), que não modificam o volume.

Vamos a um primeiro resultado utilizando o princípio de Cavalieri.

Proposição 4.1.7 *O volume de um paralelepípedo qualquer é igual ao produto da área de sua base pela altura correspondente.*

Dem. Seja um paralelepípedo Ω, tomemos uma de suas faces F como sendo sua base e cuja altura relativa a esta face seja h. Entre os planos paralelos definidos pela face F e sua oposta F' descrevamos um paralelepípedo retângulo Γ cuja área de sua base, que denotaremos por E, seja igual à área da face F, conforme ilustrado na figura abaixo.

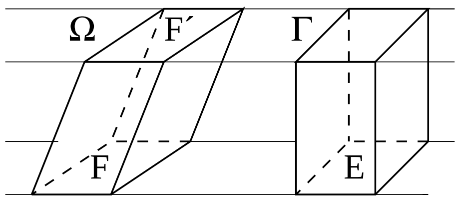


Figura 4.2: Uso do princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de um paralelepípedo qualquer.

Deixamos a cargo do leitor verificar que se um plano paralelo à base intersecta um paralelepípedo, a secção definida por este plano no sólido é um paralelogramo congruente à sua base, e portanto de mesma área.

Agora estamos nas hipóteses necessárias para utilizarmos o princípio de Cavalieri. Afinal, cada plano paralelo a F intersecta ao mesmo tempo Ω e Γ e como para cada um destes paralelepípedos a área de sua secção transversal é igual à área de sua base e estas bases, por sua vez, têm a mesma área, então os paralelepípedos Ω e Γ possuem o mesmo volume.

Para finalizarmos, o volume de Γ é conhecido pelo teorema anterior, que é o produto das medidas de suas três arestas. Mas o produto das medidas das arestas da base de Γ, é igual à area da base de Γ. E a medida da aresta perpendicular ao plano da base de, Γ é exatamente igual à sua altura. Logo, teremos

$$V(\Omega) = V(\Gamma) = A(E).h = A(F).h.$$

O que demonstra nosso resultado. ■

O argumento da proposição acima pode ser generalizado para qualquer cilindro.

Definição 4.1.8 *Dada uma figura plana Σ e um segmento $g = \overline{AB}$ não contido em algum plano paralelo ao plano de Σ. Definimos o cilindro com base Σ e geratriz g como o conjunto de todos os segmentos paralelos a g com uma das extremidades sobre a figura Σ e de um mesmo lado em relação ao plano. Se um cilindro possui como base um polígono, dizemos que ele é um prisma.*

A figura abaixo ilustra um exemplo de cilindro.

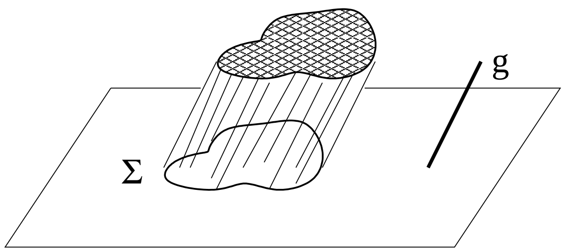


Figura 4.3: Um cilindro de base Σ e geratriz g.

É fácil ver que as extremidades não pertencentes à base Σ de um cilindro estão sobre outra figura plana Σ' situada em um plano paralelo ao plano da base. A distância entre estes dois planos paralelos é denominada altura do prisma. Também é verdade que toda secção de um prisma por um plano paralelo a sua base é uma figura congruente à base. O leitor poderá chegar a este resultado facilmente de duas maneiras diferentes. Pode-se, por exemplo, aproximar a figura dabase por falta ou por excesso através de um polígono, utilizar uma determinada triangulação do polígono e então mostrar que cada um dos triângulos no plano paralelo é congruente ao seu correspondente no plano da base. Isto é feito analisando-se os paralelogramos definidos pelos lados correspondentes dos triângulos e pelos segmentos paralelos à geratriz que passam pelos vértices deste triângulo, finalmente, pelo caso Lado-Lado-Lado de congruência de triângulos chega-se ao resultado. Ou então, pode-se considerar a operação que associa as duas figuras nos planos paralelos como sendo relacionados por uma translação segundo um segmento paralelo à diretriz. Como translações são movimentos rígidos, então preservam comprimentos, ângulos, áreas e volumes.

Em vista da proposição anterior e das considerações acima podemos enunciar o resultado.

Teorema 4.1.9 *O volume de um cilindro qualquer é igual ao produto da área de sua base pela sua altura.* □

Um outro tipo de sólido do qual é possível calcular o volume utilizando o princípio de Cavalieri são os cones.

Definição 4.1.10 *Fada uma figura plana Σ e um ponto P, não sobre o seu plano, dizemos que um cone de base Σ e vértice P é o conjunto de todos os segmentos de reta com uma das extremidades sobre Σ e a outra em P. A distância de P ao plano que contém Σ é denominada altura do cone. Se um cone possui como base um polígono, então este será chamado uma pirâmide.*

Lema 4.1.11 *Seja um cone de base Σ, vértice P e altura h e seja um plano paralelo à base do cone a uma distância $h' < h$ do ponto P entre este e a base Σ seccionando o cone segundo uma superfície Σ', então*

$$\frac{A(\Sigma)}{A(\Sigma')} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2.$$

Dem. A figura abaixo ilustra a situação descrita no enunciado do lema.

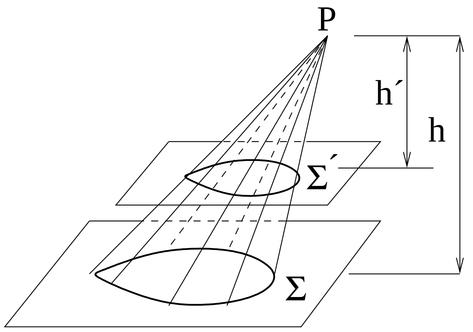


Figura 4.4: Razão entre as áreas da bases paralelas e alturas de um cone.

A idéia da demonstração é razoavelmente simples. Basta notar que a aplicação que associa Σ' a Σ é uma homotetia de centro P de razão $\frac{h}{h'}$. Logo, trata-se de uma semelhança, o que nos leva a concluir que a razão entre as áreas de Σ e Σ' será igual ao quadrado da razão de semelhança, o que demonstra o resultado. ■

Exercício 4.1.12 *Mostre que dois cones de mesma altura e bases com áreas iguais possuem o mesmo volume (este resultado é imediato a partir do lema anterior e da aplicação do Princípio de Cavalieri).*

Teorema 4.1.13 *O volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura.*

Dem. Vamos nos restringir à relação entre o volume de uma pirâmide e de um prisma de mesma base e mesma altura devido a aproximações por excesso e por falta na área de uma figura qualquer como base. E vamos nos restringir a um prisma de base triangular, pois é conseqüência do teorema de Bolyai-Gerwien que podemos sempre encontrar um triângulo com a mesma área de um polígono qualquer por decomposição, e pelo resultado do exercício anterior isto é suficiente para garantir a igualdade dos volumes. Assim, seja um prisma cuja base é o triângulo ΔABC com face paralela dada pelo triângulo $\Delta A'B'C'$. Podemos particularizar ainda mais dizendo que a geratriz deste prisma é perpendicular à base, assim $h = AA' = BB' = CC'$, dividamos o prisma em três pirâmides de base triangular (estas pirâmides são denominadas tetraedros), a saber $AA'B'C'$, $ABCB'$ e $AB'C'C$, conforme indicado na figura abaixo.

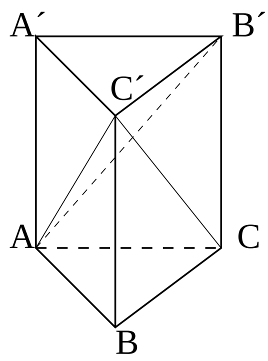


Figura 4.5: Volume de uma pirâmide em relação ao volume de um prisma.

Os tetraedros $AA'B'C'$ e $ABCB'$ possuem o mesmo volume pois têm a mesma área da base, uma vez que $A(\Delta ABC) = A(\Delta A'B'C')$, e a mesma altura, uma vez que $AA' = BB'$. Já os tetraedros $AA'B'C'$ e $AB'C'C$ possuem a mesma área pois têm a mesma área da base, uma vez que $\overline{AC'}$ é diagonal do retângulo $A'C'CA$ e portanto $\Delta A'C'A \equiv \Delta CC'A$, e mesma altura, a saber a distância do segmento $\overline{BB'}$ ao plano gerado por $A'C'CA$. Assim, os três tetraedros possuem o mesmo volume, sendo que dois deles possuem a mesma área da base e a mesma altura que o prisma original. Isto demonstra nosso resultado. ■

A partir do cálculo do volume de um tetraedro, podemos calcular o volume de qualquer poliedro, pois pode-se mostrar que todo poliedro admite uma decomposição em tetraedros. Note que o princípio de Cavalieri, e portanto processos de limite está subjacente a todas as considerações que fizemos para obtermos volumes de figuras sólidas, mesmo sem serem curvilíneas. Isto levou a uma forte convicção de que era impossível dar uma definição de volume em termos elementares de equidecomponibilidade e equicomplementabilidade. O próprio David Hilbert já acreditava nesta impossibilidade ao propor seu terceiro problema. Mas para provarmos o resultado devemos utilizar algumas ferramentas matemáticas mais sofisticadas.

4.2 A Solução de Dehn para o Terceiro Problema de Hilbert

Primeiramente serão necessários alguns conceitos de álgebra linear. O primeiro conceito importante é o de espaço vetorial sobre um corpo. Somente relembrando, um corpo é um conjunto com duas operações, uma soma e uma multiplicação, onde seja possível encontrar inversos multiplicativos de qualquer número não nulo. Os exemplos mais importantes de corpo são os números racionais, os números reais e os números complexos.

Definição 4.2.1 *Um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto* $\mathbb{V}$ *fechado por duas operações: Uma soma, que a cada par de elementos* $a, b \in \mathbb{V}$ *associa um novo elemento* $a + b \in \mathbb{V}$*, que tem as seguintes propriedades:*

1. *Associativa, isto é* $(a + b) + c = a + (b + c)$*,*
2. *Comutativa, isto é* $a + b = b + a$*,*
3. *Possui elemento neutro* $0 \in \mathbb{V}$*, o denominado vetor nulo, tal que para tod elemento* $a \in \mathbb{V}$ *tenhamos* $a + 0 = 0 + a = a$*,*
4. *E todo elemento* $a \in \mathbb{V}$*, possui um inverso aditivo* $-a \in \mathbb{V}$*, tal que* $a + (-a) = -a + a = 0$*.*

E uma multiplicação por um escalar, que para elementos $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $a \in \mathbb{V}$*, associe um elemento* $\lambda.a \in \mathbb{V}$*, satisfazendo às seguintes propriedades:*

1. *Associativa, isto é* $\lambda.(\mu.a) = \lambda\mu).a$*,*
2. *Distributiva em relação à soma do corpo, isto é* $(\lambda + \mu).a = \lambda.a + \mu.a$*, e*
3. *Distributiva em relação à soma em* $\mathbb{V}$*, isto é* $\lambda.(a + b) = \lambda.a + \lambda.b$*,*
4. *E que* $1.a = a$ *para todo* $a \in \mathbb{V}$*.*

O único exemplo de espaço vetorial de interesse para nossa discussão é sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ e será definido da seguinte maneira: Seja um sub-conjunto finito de números reais $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subseteq \mathbb{R}$, definimos $\mathbb{V}(M)$ o conjunto de todas as combinações lineares de números de M com coeficientes em $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$\mathbb{V}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i m_i | q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Podemos facilmente verificar que $\mathbb{V}(M)$ é de fato um espaço vetorial. Primeiramente notamos que existe um vetor nulo, que é a combinação linear onde todos os coeficientes são iguais a 0, o vetor nulo coincide, neste caso, com o prŽprio número 0 em $\mathbb{R}$. Também para verificar o fechamento pela soma, tome duas combinações lineares $A = \sum_{i=1}^{n} q_i m_i$ e $B = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i$ em $\mathbb{V}(M)$. A soma das duas será dada por

$$A + B = \sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) m_i,$$

que é, obviamente um elemento de $\mathbb{V}(M)$. Finalmente, dado $r \in \mathbb{Q}$ e $A = \sum_{i=1}^{n} q_i m_i \in \mathbb{V}(M)$ temos que

$$r.A = \sum_{i=1}^{n} (r q_i) m_i \in \mathbb{V}(M).$$

Definição 4.2.2 *Dado um espaço vetorial* $\mathbb{V}$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *, dizemos que um sub-conjunto de vetores* $X = \{v_1, v-2, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{V}$ *é linearmente dependente se existe uma combinação linear nula dos elementos de* X*, com coeficientes não todos nulos, caso contrário, o conjunto* X *é dito ser linearmente independente.*

Definição 4.2.3 *Dado um espaço vetorial* $\mathbb{V}$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *, dizemos que um sub-conjunto de vetores* $X = \{v_1, v-2, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{V}$ *é dito ser um conjunto gerador de* $\mathbb{V}$ *se todo elemento no espaço vetorial puder ser escrito como combinação linear de* X*. Um conjunto de geradores que também é linearmente independente é dito ser uma base de* $\mathbb{V}$

Pode-se mostrar que se tivermos duas bases para o mesmo espaço vetorial, teremos que estas bases possuem o mesmo número de elementos. Ao número de elementos de uma base de um espaço vetorial damos o nome de dimensão do espaço vetorial.

Note em nosso exemplo que por definição o conjunto M é um conjunto de geradores de $\mathbb{V}(M)$, mas não necessariamente uma base, pois os elementos de M podem ser linearmente dependentes. Por exemplo $M = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$ é um conjunto linearmente dependente, logo a dimensão de $\mathbb{V}(M)$ é igual a 1. Assim, em geral temos que $\dim\mathbb{V}(M) \leq n$ onde n é o número de elementos do conjunto M.

Exercício 4.2.4 *Mostre que se o par de elementos $m_1, m_2 \in M$ forem tais que $\frac{m_1}{m_2}$ é um número irracional, então m_1 e m_2 são linearmente independentes em $\mathbb{V}(M)$.*

Definição 4.2.5 *Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos uma função linear como uma aplicação $f : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ satisfazendo*

1. *Para todo par de elementos $a, b \in \mathbb{V}$ temos que $f(a + b) = f(a) + f(b)$.*

2. *Para um elemento $a \in \mathbb{V}$ e um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que $f(\lambda.a) = \lambda f(a)$*

Da definição, de função linear, concluimos que $f(0) = 0$. o próximo resultado será o ponto de partida para definirmos um número que caracterize um poliedro e seja um invariante por transformações geométricas.

Lema 4.2.6 *Dados dois sub-conjuntos finitos $M \subseteq N$ de $\mathbb{R}$, temos que*

a) $\mathbb{V}(M)$ é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{V}(N)$.

b) Toda função racional $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ pode ser extendida para uma função $\widetilde{f} : \mathbb{V}(N) \to \mathbb{Q}$ de forma que $\widetilde{f}(m) = f(m)$ para todo $m \in M$.

Dem. É fácil ver que $\mathbb{V}(M)$ é um sub-conjunto de $\mathbb{V}(N)$ que é fechado pelas operações de espaço vetorial que contém o vetor nulo, logo é sub-espaço.

Afora, dada qualquer função linear f de $\mathbb{V}(M)$ em $\mathbb{Q}$ ela estará unicamente definida dados os seus valores na base deste sub-espaço. Se extendermos a base de $\mathbb{V}(M)$ para uma base de $\mathbb{V}(N)$, então o resultado segue definindo uma nova função linear que assume os mesmos valores que f nos vetores da base de $\mathbb{V}(M)$ e quaisquer valores nos outros vetores da base de $\mathbb{V}(N)$. ■

Agora estamos em condições de definir o invariante de Dehn.

Definição 4.2.7 *Dado um poliedro P, tome o conjunto M_P como sendo o conjunto formado por todos os seus ângulos diedrais e pelo número π. Defina agora uma função linear qualquer $f : \mathbb{V}(M_P) \to \mathbb{Q}$ satisfazendo à condição que $f(\pi) = 0$. O invariante de Dehn do poliedro P associado à função f é o número*

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} l(e) f(\alpha(e)),$$

onde a soma se extende sobre todas as arestas e do poliedro, $l(e)$ é o comprimento da aresta e, e $\alpha(e)$ é a medida do ângulo diedral entre as duas faces que se juntam em e.

Note, por exemplo que um cubo C possui todos os seus ângulos diedrais iguais a $\frac{\pi}{2}$, logo $M_C = \{\pi, \frac{\pi}{2}\}$, então para qualquer função linear em $\mathbb{V}(M_C)$ se anulando em π resultará em $D_f(C) = 0$.

O invariante de Dehn nos auxiliará na caracterização de equidecomponibilidade e equicomplementabilidade entre poliedros.

Exercício 4.2.8 *Defina precisamente o que são dois poliedros equidecomponíveis e dois poliedros equicomplementáveis.*

Por um raciocínio totalmente análogo ao feito no caso de polígonos, é possível mostrar que dois poliedros equidecomponíveis são equicomplementáveis, mas a recíproca está longe de estar clara. O teorema seguinte nos fornece uma ferramenta para encontrarmos poliedros de mesmo volume mas que não são equidecomponíveis e, desta forma, também não equicomplementáveis.

Teorema 4.2.9 *(Dehn-Hardwiger) Sejam dois poliedro P e Q com ângulos diedrais α_1, α_2, ...,α_p e β_1, β_2, ..., β_q, respectivamente. Seja*

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\}$$

e uma função linear $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ tal que $f(\pi) = 0$. Se $D_f(P) = D_f(Q)$, então P e Q não são equicomplementáveis.

Dem. Primeiramente, considere um poliedro P subdividido em um número finito de poliedros menores P_1, P_2, ..., P_n. Tome M como sendo o conjunto formado por π e por todos os ângulos diedrais dos poliedros P_k, $k = 1, \ldots, n$.

Então, afirmamos que dada uma função linear $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ que se anula em π, temos que

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \cdots + D_f(P_n).$$

Para mostrarmos isto, tomemos o conjunto das arestas de todos os poliedros P_k, $k = 1, \ldots, n$ e o dividamos em dois sub-conjuntos, o das areastas e' que são partes de alguma aresta e do poliedro total P, e as arestas e'' contidas (a menos, eventualmente de alguma de suas extermidades) no interior de P on no interior de alguma de suas faces. Note que a soma dos ângulos diedrais para as arestas do tipo e'' sempre será igual a π ou 2π. Para arestas do tipo e', quando duas ou mais fizerem parte da mesma aresta e de P então estas definirão o mesmo ângulo diedral $\alpha(e)$ e a soma de seus comprimentos será igual a $l(e)$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} D_f(P_k) &= \sum_{e'} l(e')f(\alpha(e')) + \sum_{e''} l(e'')f(\alpha(e'')) = \\ &= \sum_{e'} l(e')f(\alpha(e')) = \sum_{e \in P} l(e)f(\alpha(e)) = D_f(P). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Agora, suponha que dois poliedros P e Q que são equicomplementáveis. Tome M o conjunto formado pelos ângulos diedrais de P e Q e por π. Tome a função linear $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ que se anula em π. Por hipótese, temos que $D_f(P) \neq D_f(Q)$. Ampliemos este conjunto para N que contém os ângulos diedrais de todas as peças congruentes complementares a P e Q, a saber P_1, ..., P_n e Q_1, ..., Q_n, com $P_k \equiv Q_k$, para $K = 1, ldots, n$. Pelo lema, podemos extender a função linear f para uma função linear $\widetilde{f} : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ que restrita a $\mathbb{V}(M)$ coincida com f. Como as composições resultantes de P e Q são congruentes temos que

$$D_{\widetilde{f}}(P)+D_{\widetilde{f}}(P_1)+D_{\widetilde{f}}(P_2)+\cdots+D_{\widetilde{f}}(P_n) = D_{\widetilde{f}}(Q)+D_{\widetilde{f}}(Q_1)+D_{\widetilde{f}}(Q_2)+\cdots+D_{\widetilde{f}}(Q_n).$$

Como $D_{\widetilde{f}}(P_k) = D_{\widetilde{f}}(Q_k)$ para todo $k = 1, ldots, n$ pois os poliedros P_k e Q_k são congruentes, temos que $D_{\widetilde{f}}(P) = D_{\widetilde{f}}(Q)$, o que é uma contradição. Logo P e Q não podem ser equicomplementáveis. ■

Como conseqüência imediata, se o invariante de Dehn de dois poliedros são diferentes, então eles também não são equidecomponíveis, pois se o fossem seriam equicomplementáveis, o que o teorema de Dehn-Hardwiger impede.

Vejamos alguns exemplos de poliedros que não podem ser equidecomponíveis.

Exemplo 1: Seja $T_0 = ABCD$ um tetraedro regular de aresta de medida l, conforme ilustrado na figura abaixo.

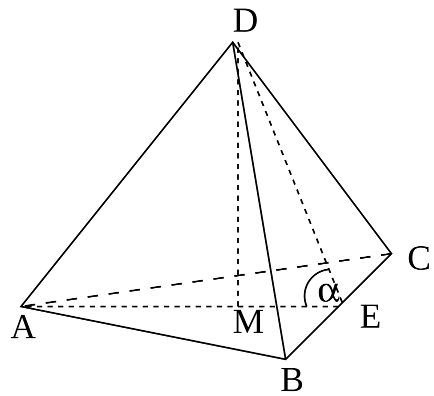


Figura 4.6: Um tetraedro regular $ABCD$.

É fácil verificar que a altura do tetraedro $\overline{DM}$ é um segmento tal que M é o baricentro do triângulo equilátero ΔABC. Portanto, considerando a altura $\overline{AE}$ temos que $\frac{AM}{ME} = \frac{2}{1}$ (veja a figura 4.6). Uma vez que $AE = DE$, temos que o ângulo dirdral $\alpha = A\widehat{E}D$ satisfaz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Assim

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

Tomando $M = \{\alpha, \pi\}$ temos que a razão

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$$

é um número irracional (veja a demonstração no Apêndice A). Portanto, conforme o exercício apresentado nesta seção, o espaço vetorial $\mathbb{V}(M)$ tem dimensão 2. Tome a função linear $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ tal que $f(\pi) = 0$ e $f(\alpha) = 1$. Assim

$$D_f(T_0) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0.$$

Portanto um tetraedro regular não pode ser equidecomponível com um cubo C de mesmo volume, pois $D_f(C) = 0$.

Exemplo 2: Seja agora um tetraedro $T_1 = ABCD$ tal que as arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ saõ perpendiculares entre si e de mesma medida l, conforme ilustrado na figura abaixo.

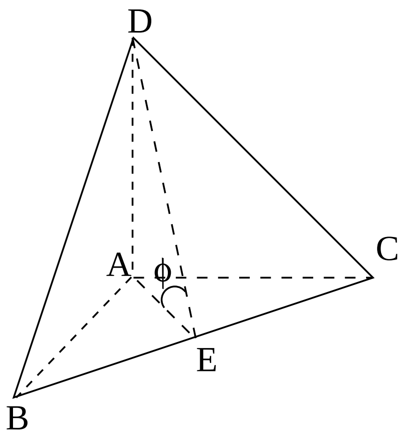


Figura 4.7: Tetraedro do exemplo 2.

É claro que três dos ângulos diedrais de $ABCD$ são retos, os outros três ângulos diedrais são iguais a φ, conforme indicado na figura 4.7. Como $BC = BD = DC = l\sqrt{2}$ temos que o triângulo ΔBCD é equilátero, portanto, sendo E o ponto médio de $\overline{BC}$, temos

$$DE = \frac{1}{2}l\sqrt{2}\sqrt{3}$$

Também, é fácil ver que

$$AE = \frac{1}{2}l\sqrt{2}.$$

Portanto

$$\cos\varphi = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ou seja $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, cuja razão com π é irracional (veja a demonstração no Apêndice A). Assim, para $M = \{\pi, \frac{\pi}{2}, \varphi\}$, podemos mostrar que a dimensão de $\mathbb{V}(M) = 2$ com base $\{\pi, \varphi\}$. Tomando uma função linear $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ tal que $f(\pi) = 0$ e $f(\varphi) = 1$, obtemos

$$D_f(T_1) = 3lf(\frac{\pi}{2}) + 3(l\sqrt{2})f(\varphi) = 3l\sqrt{2} \neq 0.$$

Exemplo 3: Agora tome um outro tetraedro $T_2 = ABCD$ tal que a aresta $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, que por sua vez é perpendicular à aresta $\overline{CD}$ e deforma que $AB = BC = CD = l$, conforme ilustardo na figura abaixo.

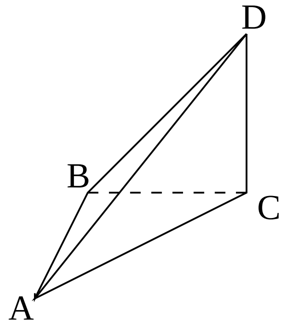


Figura 4.8: Tetraedro do exemplo 3.

Podemos mostrar que um cubo de aresta l pode ser decomposto exatamente em 6 tetraedros congruentes a T_2 (verifique esta afirmação) portanto sendo M o conjunto formado pelos ângulos diedrais de T_2 e por π e $f : \mathbb{V}(M) \to \mathbb{Q}$ uma função linear tal que $f(\pi) = 0$, temos que

$$D_f(C) = 6D_f(T_2) = 0, \qquad \Rightarrow D_f(T_2) = 0.$$

Portanto, o tetraedro T_2, que possui o mesmo volume que o tetraedro T_1 do exemplo anterior, não é equidecomponível com T_1, fornecendo assim o exemplo requerido no terceiro problema de Hilbert, de dois tetraedros de mesmo volume que não fossem nem equidecomponíveis nem equicomplementáveis.

Apêndice A

Alguns Ângulos Incomensuráveis

Dizemos que dois ângulos são incomensuráveis quando a razão entre eles for um número irracional. O objetivo deste apêndice é fornecer uma prova de que os ângulos utilizados no último capítulo para solucionar o terceiro problema de Hilbert são de fato incomensuráveis com π. Podemos sintetizar o resultado no seguinte teorema:

Teorema A.0.10 *Para cada inteiro ímpar $n \geq 3$, o número*

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

é irracional.

Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, convém que façamos duas observações. Em primeiro lugar, estamos utilizando a hipótese que n é um número ímpar, note que para $n = 2$ temos $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ resultando em $A(2) = \frac{1}{4}$ e para $n = 4$ teremos $\arccos \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{\pi}{3}$ resultando em $A(2) = \frac{1}{3}$. Em segundo lugar, dizermos que um ângulo φ é incomensurável com π significa que se construirmos uma linha poligonal sobre a circunferência com ângulo central φ veremos que esta linha poligonal não poderá ser fechada. Ao invés disto, arbitrariamente próximo de qualquer ponto da circunferência sempre haverá um vértice desta linha poligonal, dizemos que o conjunto dos vértices desta poligonal é denso na circunferência.

Dem. Relembremos a fórmula de transformação de soma em produto de funções trigonométricas:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{A.1}$$

Dado um ângulo φ fixo e um número $k \in \mathbb{N}$, temos que para $\alpha = (k+1)\varphi$ e $\beta = (k-1)\varphi$, a fórmula (A.1) resulta em

$$\cos(k+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi. \tag{A.2}$$

Agora considere, em particular, os ângulos da forma $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, para estes temos

$$\cos\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad 0 \leq \varphi_n \leq \pi. \tag{A.3}$$

Afirmamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{(\sqrt{n})^k},$$

onde A_k é um inteiro não divisível por n.

Este fato tem que ser provado por indução sobre k: Para $k = 0$, temos $\cos 0\varphi_n = 1$ e portanto $A_0 = 1$, também é fácil ver de (A.3) que $A_1 = 1$. Suponhamos o resultado válido para todo $0 \leq l \leq k$. Então, da fórmula (A.2) temos que

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\varphi_n &= 2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{(\sqrt{n})^k} - \frac{A_{k-1}}{(\sqrt{n})^{k-1}} = \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{(\sqrt{n})^{k+1}}.\end{aligned}$$

Em particular, da expressão acima, obtemos uma relação de recorrência para os coeficientes A_k dado por

$$A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}.$$

Como $n \geq 3$ e ímpar e por hipótese A_k não é divisŽvel por n, então concluimos que A_{k+1} também não o será. Isto conclui a prova de nossa afirmação.

Agora, suponha que

$$A(n) = \frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q},$$

com inteiros $k, l > 0$. Então $l\varphi_n = k\pi$, o que resulta em

$$\cos l\varphi_n = \frac{A_l}{(\sqrt{n})^l} = \cos k\pi = \pm 1.$$

Assim $(\sqrt{n})^l = \pm A_l$ é um inteiro com $l \geq 2$ (o caso $l = 1$ nos dá em particular que $\varphi_n = k\pi$ que é um caso trivial). como $l \geq 2$ então n é um divisor de $(\sqrt{n})^l$, e portanto um divisor de A_l, o que é uma contradição, pois provamos que nenhum A_l é divisível por n.

Esta contradição nos leva a concluir que é impossível que $A(n)$ seja um número racional, que é o resultado desejado. ■

Exercício A.0.11 *Mostre que os únicos casos onde $A(n)$ é um número racional são os casos $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$ (Sugestão: Considere separadamente os casos $n = 2^r$ e n não sendo potência de 2).*

Bibliografia

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler: *As Provas estão n'O Livro*, Edgard Blücher (2002).

[2] V.G. Boltianski: *Figuras Equivalentes e Equicompostas*, Atual-Mir (1996).

[3] O. Dolce, J.N. Pompeo: *Fundamentos de Matemática Elementar,* Vol. 9, Geometria Plana, Atual (1981).

[4] Euclid: *The Thirteen Books of Elements,* Vols. 1,2,3, Transl. Sir Thomas Heath, Dover (1956).

[5] J.J. Gray: *The Hilbert Challenge*, Oxford (2000).

[6] D. Hilbert: *Foundations of Geometry*, Open Court (1999).

[7] D. Hilbert: *Mathematical Problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1902) 437-479.

[8] E.L. Lima: *Medida e Forma em Geometria*, Coleção do Professor de Matemática, SBM (1991).

[9] E.L. Lima: *Matemática e Ensino*, Coleção do Professor de Matemática, SBM (2001).

[10] R.B. Nelsen: *Proofs Without Words*, The Mathematical Association of America (1993).