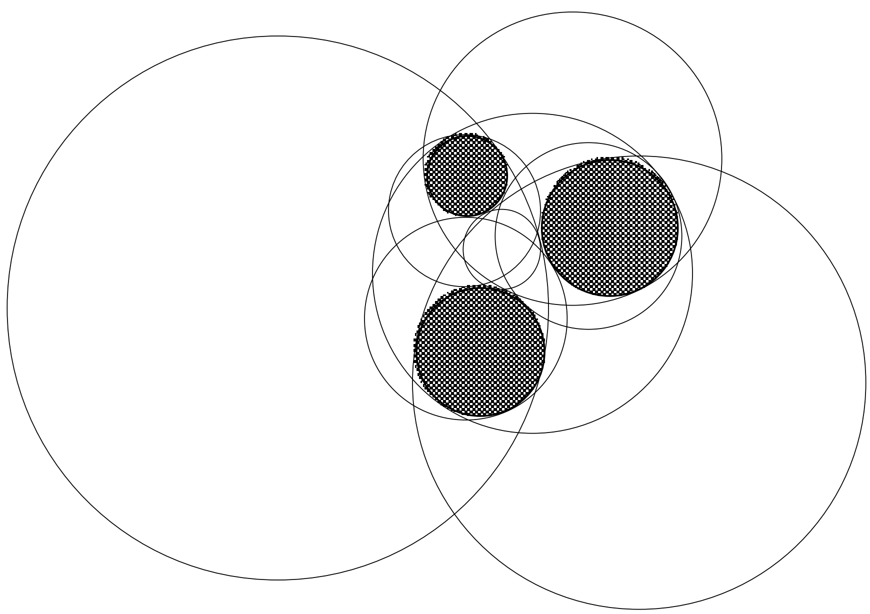
II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
Universidade Federal da Bahia
25 a 29 de outubro de 2004

COMO TRANSFORMAR RETAS EM CÍRCULOS E VICE VERSA

A inversão e construções geométricas



Michel Spira

Introdução

Há alguns anos, ao lecionar um curso de História da Matemática, encontrei no livro de Howard Eves [8] um lindo problema de construção de triângulos, devido a Regiomontanus (aplicação 4.5). A solução apresentada no livro envolvia contas e mais contas, conforme o texto original de Regiomontanus [5], mas o problema clamava aos céus por uma solução com régua e compasso.

Ajudado por uma vaga lembrança do eixo radical, consegui fazer a construção – nada original, como ficou claro quando procurei mais sobre o assunto e achei, por exemplo, a referência [9]. Ao analisar a solução, dei-me conta de que o problema era equivalente a determinar a interseção de uma reta com uma hipérbole, e daí nasceu meu fascínio por problemas que envolvem a construção de círculos satisfazendo três condições do tipo "ser tangente a", "passar por" ou "ter centro em", que me levou ao estudo do conceito de inversão.

Nestas notas apresento a teoria básica de inversão. O estilo um pouco desorganizado reflete o modo como fui, aos poucos, me familiarizando com o assunto. Não há a pretensão de ser completo ou enciclopédico; o leitor interessado pode encontrar bem mais na bibliografia. Os objetivos deste texto são bem mais modestos:

1. apresentar uma geometria não euclidiana bastante simples, em que a introdução de um ponto no infinito aparece naturalmente;

2. oferecer um texto que sirva de apoio a disciplinas de geometria elementar em cursos de graduação de Matemática, bem como para cursos de treinamento e capacitação de professores;

3. partilhar com o leitor a beleza e a elegância desta teoria, em particular quando aplicada a construções geométricas.

Ficarei feliz se pelo menos um – idealmente todos! – destes objetivos se cumprirem. Qualquer um deles leva ao objetivo maior, que é estimular o gosto por esta bela área de Matemática.

Construções geométricas

Por construções geométricas entendemos aquelas feitas com régua e compasso euclidianos. A idéia não é efetuar fisicamente a construção em que estamos interessados; isto pode envolver um grande número de etapas e a imprecisão inerente em construções feitas à mão torna qualquer construção inexata. O jogo aqui é mostrar que a construção pode ser feita e indicar as etapas para sua execução.

Por outro lado, o problema de exatidão e tempo em construções geométricas foi resolvido com o advento de programas de geometria dinâmica. O leitor com acesso a um destes programas não terá problemas em fazer todas as construções propostas nestas notas, desde que prepare antecipadamente um conjunto de macros conveniente – o autor fez isto para gerar as figuras do texto com o Geometer's Sketchpad. Por sinal, pequenas imprecisões nas figuras são o resultado de conversão do arquivo LaTeX original para o formato pdf com uma etapa intermediária no formato ps.

Pré-requisitos e modo de usar

Supõe-se do leitor familiaridade com conceitos e resultados de um curso básico de geometria plana como, por exemplo, os das referências [1] e [2]. Os exercícios que aparecem ao longo do texto formam, com raras exceções, parte essencial do desenvolvimento do mesmo; deste modo, é importante que o leitor se esforce em resolvê-los. Os resultados apresentados sem demonstração também devem ser considerados como exercícios.

Notação

Toda a nossa ação se passa em um plano fixo $\mathbb{E}$. Pontos e retas serão denotados, respectivamente, por letras maiúsculas A, B, C, ... e minúsculas r, s, t, ... , respectivamente. A semireta de origem A passando por B será denotada por $\overrightarrow{AB}$, e a reta determinada por estes pontos por $\overleftrightarrow{AB}$. O segmento de extremos A e B, bem como seu comprimento (não orientado, ou seja, sempre positivo ou nulo), serão ambos denotados por AB, eventuais ambigüidades sendo resolvidas pelo contexto; convencionamos que $A, B \notin AB$. Letras caligráficas como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... serão usadas para denotar círculos. Números reais serão denotados por letras minúsculas a, b, c, ... O ângulo entre duas semiretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ será denotado por $A\widehat{O}B$. Finalmente, denotaremos por $C(O, A)$ o círculo de centro O que passa por A e por $C(O, r)$ o círculo de centro O e raio r.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer àqueles que me ajudaram a organizar minhas idéias sobre inversão e a corrigir este texto: meus colegas Jorge Sabatucci, Marcos Montenegro, Carlos Eduardo Moreira Barbosa, Rejane Isabel Lima Corrêa, Luciana Miranda de Souza e Cristiane Silva Souto, do *PAD de Construções Geométricas* do MAT/UFMG, bem como minha amiga Vivane Ribeiro Tomáz da Silva. Agradeço também ao professor Alberto Sarmiento Vera, coordenador do Curso de Verão 2002 do MAT/UFMG, cujo convite para lecionar

um minicurso deu origem à primeira versão destas notas.

Finalmente, agradeço à coordenação da II Bienal da SBM (da qual faço parte!), e em especial à sua coordenadora Elinalva Vergasta Vasconcelos, pela oportunidade de falar deste belo tópico de Geometria.

Michel Spira
Departamento de Matemática – UFMG
michel@mat.ufmg.br

Índice

1 Divisão de um segmento em razão dada

Nesta seção consideramos a idéia de dividir um segmento em razão dada, o conceito relacionado de conjugados harmônicos e suas interpretações algébrica e geométrica.

1.1 Divisão em razão dada e conjugados harmônicos

Definição 1.1 (Divisão de um segmento em razão dada) *Sejam A e B pontos distintos e $P \in \overleftrightarrow{AB}$. O quociente $k := \frac{AP}{BP}$ é dito* a razão em que P divide AB *(nesta ordem). Se $P = B$ definimos $k = \infty$. Se $P \in AB$ dizemos que P* divide AB internamente, *e* externamente *caso $P \notin AB$ e $P \neq A, B$.*

A definição dada no caso $P = B$ não é puramente formal; ela deve ser pensada como o limite de $\frac{AP}{BP}$ quando P se aproxima de B ao longo de $\overleftrightarrow{AB}$.

Vamos agora mostrar a existência e a unicidade de um ponto que divide AB em uma razão dada $k > 0$. Se $k = 1$ não há muito o que fazer, pois só temos que levar em consideração o ponto médio de AB. Para o caso $k \neq 1$ temos o seguinte resultado.

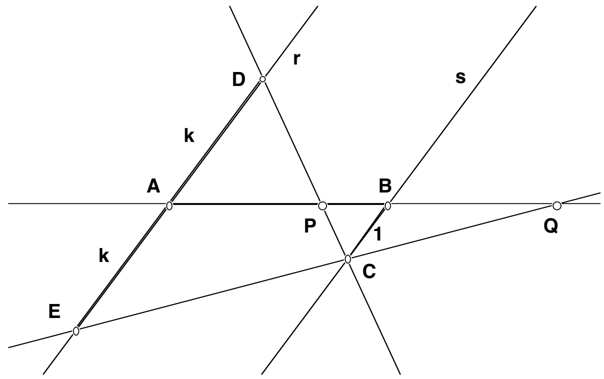
Proposição 1.2 *Sejam A e B pontos distintos e $k > 0$ com $k \neq 1$. Então existem exatamente dois pontos $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ que dividem AB interna e externamente, respectivamente, na razão k.*

Demonstração Para a unicidade, suponhamos que P e R sejam pontos distintos que dividem AB internamente na mesma razão $k \neq 1$. Então

$$k = \frac{AP}{BP} = \frac{AR}{BR} = \left|\frac{AP - AR}{BP - BR}\right| = \frac{PR}{PR} = 1 \ ,$$

um absurdo. Logo $P = R$ e temos a unicidade; o caso do ponto externo é análogo e fica por conta do leitor.

Para a existência, tracemos por A uma reta r que não contenha B e por B uma paralela s a r. Em s marcamos C tal que $BC = 1$; em r marcamos D e E tais que $AD = AE = k$. Determinamos então P e Q como as interseções de $\overleftrightarrow{AB}$ com com $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, respectivamente.



A semelhança dos triângulos PAD e PBC nos mostra que $\frac{AP}{BP} = k$, e os triângulos QAE e QBC nos dão o mesmo resultado para Q. $\square$

Definição 1.3 (Conjugados harmônicos) *Os pontos P e Q da proposição anterior são ditos* conjugados harmônicos *com relação a A e B.*

Em outras palavras, os pontos distintos $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ são conjugados harmônicos com relação a A e B se dividem AB na mesma razão. Notamos que se P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B então A e B são também conjugados harmônicos com relação a P e Q; de fato, $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$ pode ser reescrito como $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ}$.

Vimos que todo ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ tem um conjugado harmônico com relação a AB, com exceção do ponto médio M de AB. Para reparar esta injustiça, notamos que a figura da proposição 1.2 mostra que, se fizermos k tender a 1, o ponto P se aproxima de M e o ponto Q se distancia cada vez mais, para a esquerda se $k \to 1^-$ e para a direita se $k \to 1^+$. Alternativamente, vemos que se $k = 1$ então $\overleftrightarrow{CD}$ intersecta AB em seu ponto médio e $\overleftrightarrow{CE}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

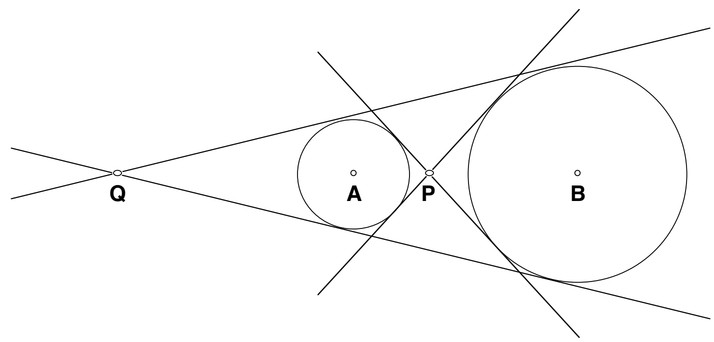
Isto nos leva à idéia de postular a existência de um ponto ideal em $\overleftrightarrow{AB}$, dito *o ponto no infinito de* $\overleftrightarrow{AB}$ e denotado, evidentemente, por ∞, que é (por definição) o conjugado de M; em particular, ∞ divide AB na razão 1. Notamos ainda que nesta convenção não há $+\infty$ e $-\infty$; o ponto ∞ é único, e a ele se chega por qualquer das duas semiretas com origem em M. A visão que devemos ter aqui é que a reta AB se tornou um círculo com a adição do ponto ∞ "em suas duas pontas".

O leitor deve interpretar e resolver os exercícios a seguir levando em consideração que um dos pontos envolvidos na divisão de um segmento pode ser ∞.

Exercício 1.1 Mostre que se $AB = a$ e $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ são distintos e dividem AB na razão k então $PQ = \frac{2ak}{k^2-1}$. $\triangle$

Exercício 1.2 Sejam P e Q conjugados harmônicos com relação a A e B e r uma reta. Por A, B, P e Q traçamos retas paralelas que interceptam r em A', B', P' e Q', respectivamente. Mostre que P' e Q' são conjugados harmônicos com relação a A' e B'. $\triangle$

Exercício 1.3 Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ círculos exteriores de raios distintos e centros A e B, respectivamente, e sejam P e Q os pontos de encontro das tangentes comuns interiores e exteriores a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente,

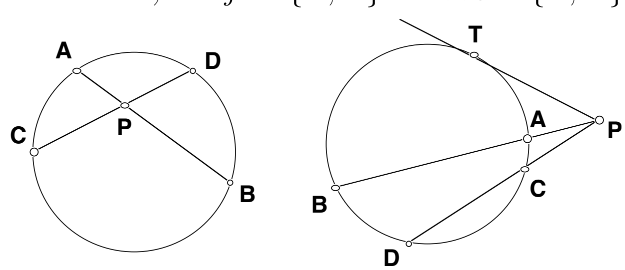


a. Mostre que A, B, P e Q são colineares.
b. Mostre que P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B.
c. E se os raios de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ fossem iguais? $\triangle$

1.2 Interpretação geométrica

Nossa definição de conjugação harmônica foi feita metricamente; para nossos propósitos é essencial reformulá-la em linguagem geométrica. Para isto, começamos relembrando o seguinte resultado de geometria elementar.

Proposição 1.4 (Secantes e tangentes) *Sejam s e t duas secantes a um círculo $\mathcal{C}$ concorentes em P, e sejam $\{A, B\} = s \cap \mathcal{C}$ e $\{C, D\} = t \cap \mathcal{C}$.*



Então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Se P é exterior a $\mathcal{C}$ e s é tangente a $\mathcal{C}$ em T então $PT^2 = PA \cdot PB$. $\square$

Definição 1.5 (Potência) *Seja $\mathcal{C}$ um círculo, P um ponto e s uma reta por P que corta $\mathcal{C}$ em A e B (incluimos o caso $A = B$). A* potência de P com relação a $\mathcal{C}$ *é $p(P, \mathcal{C}) := \pm PA \cdot PB$, onde usamos $+$ caso P seja exterior a $\mathcal{C}$ e $-$ caso contrário.*

A proposição 1.4 nos garante que esta é um boa definição.

Exercício 1.4 a. Seja $\mathcal{C}$ um círculo de centro O e raio r e P um ponto com $OP = d$. Mostre que $p(P, \mathcal{C}) = d^2 - r^2$.

b. Seja $\mathcal{C}$ um círculo e $d = AB$ um diâmetro de $\mathcal{C}$. Seja P um ponto com $PA = a$ e $PB = b$. Mostre que

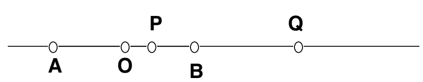
$$p(P, \mathcal{C}) = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2}$$

△

Os conceitos de potência e conjugação harmônica estão fortemente relacionados, como vemos a seguir.

Proposição 1.6 *Sejam A, P, B e Q pontos distintos alinhados nesta ordem, O o ponto médio de AB e $r = OA$. Então P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B se e somente $OP \cdot OQ = r^2$.*

Demonstração Suponhamos primeiro que P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B. Neste caso basta observar a figura abaixo



e reescrever $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$ como

$$\frac{r + OP}{r - OP} = \frac{r + OQ}{OQ - r} \ .$$

Simplificando esta expressão obtemos $OP \cdot OQ = r^2$, como queríamos. A recíproca segue imediatamente fazendo a conta na direção oposta. □

Exercício 1.5 (Potência e conjugados harmônicos) Na situação da proposição anterior, mostre que P e Q são conjugados harmônicos com relação a A e B se e somente se $p(O, \mathcal{C}) = r^2$ para qualquer círculo $\mathcal{C}$ que passe por P e Q. △

Para prosseguir, precisamos do conceito de tangente a uma curva (lisa), que consideramos conhecido. Em particular, pensamos em uma reta como sendo sua própria tangente em qualquer de seus pontos.

Definição 1.7 (Curvas ortogonais) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas curvas com um ponto A em comum. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possuem tangentes s e t, respectivamente, em A então dizemos que o* ângulo entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em A *é o ângulo entre s e t. Em particular, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são* ortogonais em A *se fazem um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em A.*

Esta definição geral admite interpretação simples para as curvas que nos interessam, a saber, retas e círculos.

Exercício 1.6 **a.** Mostre que uma reta r é ortogonal a um círculo $\mathcal{C}$ se e somente se r passa pelo centro de $\mathcal{C}$.

b. Se r é uma reta que intercepta um círculo $\mathcal{C}$ em dois pontos A e B então o ângulo entre r e $\mathcal{C}$ é o mesmo nos dois pontos

c. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são círculos que se interceptam em dois pontos A e B então o ângulo que eles fazem é o mesmo nos dois pontos.

d. Mostre que uma reta r faz um ângulo π com um círculo $\mathcal{C}$ se e somente se r é tangente a $\mathcal{C}$. △

Este exercício nos permite falar de *ângulo entre reta e círculo* e *ângulo entre dois círculos* sem menção a pontos de interseção.

Exercício 1.7 **(Potência e ortogonalidade)** Sejam $\mathcal{C} = C(O, r)$ e $\mathcal{D}$ um círculo qualquer. Mostre que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ortogonais se e somente se $p(O, \mathcal{D}) = r^2$. △

Coletando nossos resultados até aqui, obtemos o

Teorema 1.8 *Sejam A, P, B e Q pontos distintos alinhados nesta ordem e $\mathcal{C} = C(O, r)$ o círculo de diâmetro AB. Seja também $\mathcal{D}$ um círculo qualquer pssando por P e Q. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *P e Q são conjugados com respeito a A e B.*
2. *$OP \cdot OQ = r^2$.*
3. *$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ortogonais.* □

1.3 O círculo de Apolônio

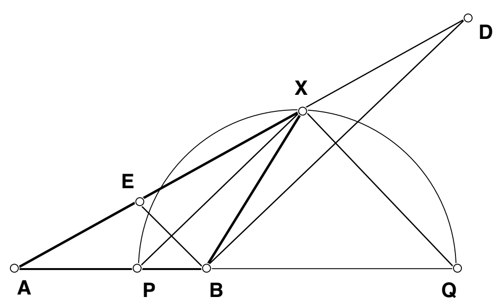
Fazemos aqui uma pausa para apresentar um belo lugar geométrico. Antes relembramos o seguinte resultado básico de geometria elementar.

Proposição 1.9 *Seja ABC um triângulo e $P \in AB$. Então CP é bissetriz interna do ângulo $\widehat{C}$ se e somente se $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$. Analogamente, um ponto $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ externo a AB é o pé da bissetriz externa do ângulo $\widehat{C}$ se e somente se $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BC}$.* □

Até agora estudamos pontos $X \in \overleftrightarrow{AB}$ tais que $\frac{AX}{BX} = k$, onde $k > 0$ é dado. Agora vamos liberar X e provar o seguinte resultado, devido a Apolônio de Perga (± 260 –190 A.C).

Teorema 1.10 (O círculo de Apolônio) *Sejam A e B pontos distintos, $k > 0$ e $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ conjugados harmônicos de A e B com relação à razão k. Então o lugar geométrico dos pontos X tais que $\frac{AX}{BX} = k$ é a mediatriz de AB se $k = 1$ e o círculo $\mathcal{C}$ de diâmetro PQ se $k \neq 1$.*

Demonstração No caso $k = 1$ não há o que fazer; supomos então $k \neq 1$. Suponhamos primeiro que X é tal que $\frac{AX}{BX} = k$ e sejam P e Q os pés das bissetrizes interna e externa, respectivamente, do ângulo $A\widehat{X}B$; segue que $P\widehat{X}Q$ é reto. O teorema da bissetriz nos diz que $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{BX} = \frac{AQ}{BQ}$, donde $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = k$. Logo os pontos P e Q dividem AB interna e externamente na razão k e, deste modo, independem da escolha de X. Concluimos então que para qualquer escolha de X o ângulo $P\widehat{X}Q$ é reto em X, donde $X \in \mathcal{C}$.



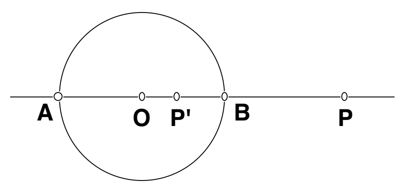
Reciprocamente, seja $X \in \mathcal{C}$; temos então que $P\widehat{X}Q$ é reto. Tracemos por B paralelas a XP e XQ, que interceptam AX em D e E respectivamente. Então $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{DX}$ e $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AX}{EX}$; como $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$ obtemos $XD = XE$. Logo X é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo DBE, e obtemos $XD = XB$. Assim $\frac{AX}{BX} = k$, como queríamos. □

2 Inversão

Nesta seção vamos introduzir nosso personagem principal, a saber, o conceito de *inversão com relação a um círculo*, devido ao geômetra suíço Jakob Steiner (1796 – 1863).

Daremos primeiro a definição de modo tradicional, envolvendo conceitos métricos. Esta definição tem desvantagens quando consideramos retas como círculos. Desenvolveremos então o conceito até fazê-lo independente de considerações métricas e daremos a definição geral. O restante da seção é dedicado ao estudo de propriedades de inversão.

Definição 2.1 (O inverso de um ponto – provisório) *Seja* $\mathcal{S} = C(O, r)$. *Dado* $P \neq O$, *o ponto* $P' \in \overrightarrow{OP}$ *tal que* $OP \cdot OP' = r^2$ *é dito o* inverso de P com relação a $\mathcal{S}$.



O leitor deve notar que, geometricamente, não há nada de novo aqui. De fato, segue do teorema 1.8 que P e P' são inversos com relação a $\mathcal{S}$ se e somente se P e P' são conjugados harmônicos com relação a ao diâmetro AB determinado por $\overleftrightarrow{OP}$ em $\mathcal{S}$. O que muda é o nosso ponto de vista: agora pensamos em *associar* a cada P seu inverso com relação a $\mathcal{S}$, ou seja, acabamos de definir uma função – em terminologia usual em geometria, uma *transformação* – de $\mathbb{E}/\{O\} \to \mathbb{E}/\{O\}$, que chamamos de *inversão*.

Uma observação imediata é que a inversão, como definida acima, é uma bijeção. Nosso objetivo agora é estendê-la inventando um inverso para O.

Seja P um ponto qualquer distinto de O. A condição $OP \cdot OP' = r^2$ mostra que $OP \to \infty$ se e somente se $OP' \to 0$. Em outras palavras, se queremos que O tenha um inverso, este deve estar infinitamente longe, ou seja, fora do plano. Postulamos então a existência de um ponto ideal, que denotamos por ∞, tal que $O' = \infty$. O raciocínio inverso mostra que devemos também postular $\infty' = O$. Fazendo $OP \to \infty$ quando P percorre uma reta qualquer, vemos que é necessário postular também que ∞ está em todas as retas – ou seja, que os pontos no infinito de duas retas quaisquer coincidem.

O plano euclidiano ao qual se adiciona o ponto ∞ será denotado por $\mathbb{E}_\infty$ e dito o *plano inversivo*. Quando conveniente, vamos nos referir aos pontos de $\mathbb{E}$ como *finitos*.

O leitor deve notar que agora não existem mais retas paralelas; em $\mathbb{E}_\infty$ duas retas quaisquer s e t têm pelo menos um ponto em comum, a saber, ∞. Se este é seu único ponto comum, então s e t eram paralelas antes da adição de ∞ ao plano euclidiano; caso contrário, elas têm dois pontos em comum, um deles ∞ e outro finito. Na verdade, *não existem mais retas*. De acordo com nossa observação na página 2, temos agora dois tipos de círculos, aqueles contidos em $\mathbb{E}$ (ou seja, finitos) e os que passam por ∞. A estes últimos chamaremos, quando conveniente, de *retas*, em respeito a suas vidas passadas em $\mathbb{E}$.

Definição 2.2 (Inversão – provisório) *Seja $\mathcal{S} = C(O, r)$. A transformação $\mathbb{E}_\infty \to \mathbb{E}_\infty$ que leva qualquer $P \in \mathbb{E}_\infty$ em seu inverso com relação a $\mathcal{S}$ é dita a* inversão com respeito a $\mathcal{S}$. *O ponto O é dito o* centro ou polo de inversão, *$\mathcal{S}$ o* círculo de inversão *e r a* potência de inversão.

Notamos que esta definição é métrica, pois faz menção ao centro e ao raio de $\mathcal{S}$. Assim, vamos por enquanto trabalhar apenas com círculos finitos. Como mencionamos na introdução, esta situação injusta será corrigida mais tarde na definição 3.5.

Exercício 2.1 Mostre que qualquer inversão é uma bijeção de $\mathbb{E}_\infty$. △

Uma vez fixado o círculo de inversão,a imagem de uma figura $\mathcal{X}$ pela inversão será indicada por $\mathcal{X}'$. Segue que se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são figuras disjuntas em $\mathbb{E}_\infty$ então $\mathcal{X}'$ e $\mathcal{Y}'$ também são disjuntas; mais geralmente, o número (finito) de pontos de interseção de duas figuras é preservado por inversão.

Nos exercícios a seguir listamos fatos elementares referentes à inversão; conforme mencionado na introdução destas notas, os resultados neles enunciados serão usados livremente e o leitor é fortemente encorajado a resolvê-los.

Exercício 2.2 (Propriedades da inversão) Consideremos a inversão por um círculo $\mathcal{S}$ de centro O.

a. Mostre que $(P')' = P$ para qualquer P.

b. Mostre que P' é interno a $\mathcal{S}$ se e somente se P é externo a $\mathcal{S}$.

c. Mostre que se A, B e C estão nesta ordem em uma semireta de origem O então A', B' e C' estão na mesma semireta em ordem inversa. △

Exercício 2.3 (Invariância por inversão) Mostre que um círculo $\mathcal{C}$ é invariante por inversão com relação a $\mathcal{S}$ – isto é, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ – se e somente se $\mathcal{C}$ é ortogonal a $\mathcal{S}$. △

Repetimos agora o teorema 1.8, reescrevendo-o para incluir o conceito de inversão.

Teorema 2.3 (Equivalências para inversão) *Seja $\mathcal{S} = C(O, r)$, AB um diâmetro de $\mathcal{S}$ e $P, P' \in \overrightarrow{OA}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a. P e P' são inversos com relação a $\mathcal{S}$.

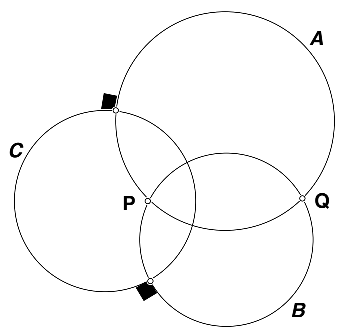
b. $OP \cdot OP' = r^2$.

c. Qualquer círculo que passa por P e P' é ortogonal a $\mathcal{C}$.

d. P e P' são conjugados harmônicos com relação a A e B. □

Exercício 2.4 Seja s uma semireta de origem O e $P, P' \in s$. Mostre que existe um único círculo $\mathcal{S}$ de centro O tal que P e P' são inversos com relação a $\mathcal{S}$. △

Exercício 2.5 Sejam $\mathcal{C}$ um círculo e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dois círculos quaisquer ortogonais a $\mathcal{C}$ e tais que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{P, Q\}$.



Mostre que P e Q são inversos com relação a $\mathcal{C}$. △

Este último exercício mostra que para inverter P com relação a $\mathcal{S}$ basta traçar dois círculos ortogonais a $\mathcal{S}$ passando por P ; o outro ponto de interseção destes círculos é o inverso procurado. Esta visão de inversão, em que centro e raio do círculo de inversão não são mencionados, se estende naturalmente ao caso em que $\mathcal{S}$ é uma reta; aqui círculos ortogonais a $\mathcal{S}$ são círculos com centro em $\mathcal{S}$ ou retas perpendiculares a $\mathcal{S}$, e a interseção de dois destes círculos passando por P nada mais é que o simétrico de P com relação a $\mathcal{S}$. Temos assim a definição de inverso de um ponto independente de conceitos métricos e que, deste modo, inclui o caso em que $\mathcal{S}$ é uma reta.

Definição 2.4 (Inverso e inversão – definitivo) *Sejam P um ponto e $\mathcal{S}$ um círculo. O* inverso de P com relação a $\mathcal{S}$ *é o outro ponto de interseção de quaisquer dois círculos distintos ortogonais a $\mathcal{S}$ passando por P. A transformação $\mathbb{E}_\infty \to \mathbb{E}_\infty$ que leva qualquer $P \in \mathbb{E}_\infty$ em seu inverso com relação a $\mathcal{S}$ é dita a* inversão com respeito a $\mathcal{S}$.

Esta definição admite uma outra justificativa natural, que veremos após a proposição 3.5. A partir de agora o leitor deve interpretar nossos exercícios e resultados levando em conta que um ou mais dos círculos considerados podem ser retas.

Vamos aproveitar este abandono de conceitos métricos e fazer mais uma definição.

Definição 2.5 (A reta dos centros) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos, não ambos retas. A* reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ *é a (única) reta ortogonal a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{D}$.*

Exercício 2.6 Adapte o teorema 2.3 à definição 2.4. △

Exercício 2.7 Adapte e refaça os exercícios 2.2 - 2.6 tendo em vista a definição 2.4. △

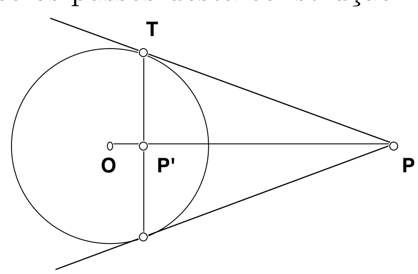
Exercício 2.8 Mostre que dados dois círculos distintos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e um ponto $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, existe um único círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que passa por P.

Exercício 2.9 **a.** Mostre que se P é externo a um círculo $\mathcal{C}$ então existe um único círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ de centro P.

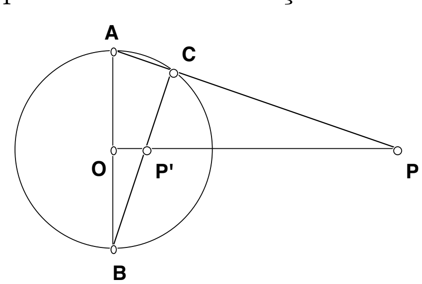
b. Mostre que se P é interno a $\mathcal{C}$ então não existe nenhum círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ de centro P. △

Exercício 2.10 **(Achando o inverso)** Seja $\mathcal{S}$ um círculo de centro O e $P \neq O$.

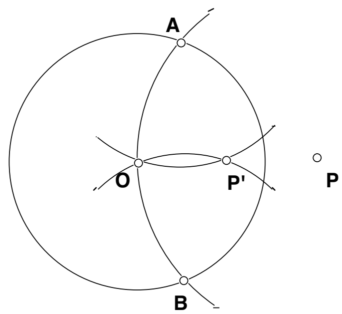
a. Supondo P externo a $\mathcal{S}$, seja $T \in \mathcal{S}$ tal que $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a $\mathcal{S}$; então P' é o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ que passa por T. Se P é interno a $\mathcal{S}$ então P' é obtido revertendo-se os passos desta construção.



b. Supondo P externo a $\mathcal{S}$, seja AB um diâmetro de $\mathcal{S}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ e $C = AP \cap \mathcal{S}$; então $P' = BC \cap \overrightarrow{OP}$. Se P é interno a $\mathcal{S}$ então P' é obtido revertendo-se os passos desta construção.



Exercício 2.11 (Inversão com o compasso) a. Sejam $\mathcal{S} = C(O,r)$, P tal que $OP > \frac{r}{2}$ e A, B as interseções de $\mathcal{S}$ com $C(P,O)$. Mostre que P' é a outra interseção de $C(A,O)$ e $C(B,O)$.

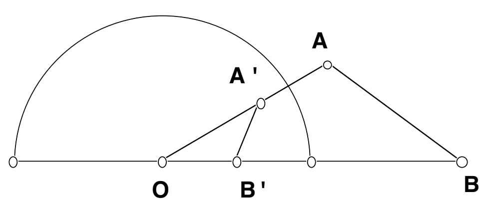


b. Sejam AB um segmento e $n \in \mathbb{N}$. Imitando a construção habitual do hexágono regular inscrito em um círculo, mostre como constuir, apenas com o compasso, um segmento AC de comprimento $n \cdot AB$ com $C \in \overrightarrow{AB}$.

c. Mostre como achar o ponto médio de um segmento usando apenas o compasso.

d. Ache uma construção só com o compasso para o inverso de P com relação a $\mathcal{S}$ no caso $OP \leq \frac{r}{2}$ (sugestão: construa $Q \in \overleftrightarrow{OP}$ tal que $OQ = 2^n \cdot OP > \frac{r}{2}$). △

Exercício 2.12 (Inversão e semelhança) Sejam O, A, B pontos não colineares e $\mathcal{S}$ um círculo de inversão de centro O.



Mostre que os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes. △

Exercício 2.13 (Inversão e distância) Sejam O, A, B pontos distintos e $\mathcal{S} = C(O,r)$ um círculo de inversão. Mostre que

$$A'B' = \frac{r^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$

Conclua que se $\mathcal{C}$ é qualquer círculo que passa por A e B e $p = p(O, \mathcal{C})$ então

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{r^2}{|p|}$$

△

3 Círculos e inversão

Nesta seção veremos o que acontece com círculos quando submetidos a uma inversão.Se o círculo $\mathcal{S}$ de inversão é uma reta, a situação é geometricamente trivial e não há o que fazer; notamos apenas que neste caso os círculos invariantes pela inversão são aqueles de centro em $\mathcal{S}$ e as retas perpendiculares a $\mathcal{S}$.

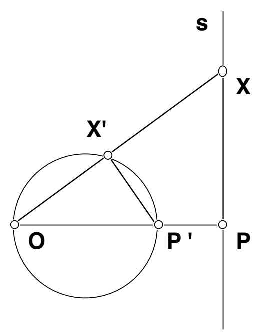
Podemos então restringir nossa atenção à inversão em um círculo finito $\mathcal{S} = C(O, r)$; de qualquer modo, os enunciados dos dois teoremas a seguir continuam válidos no caso em que $\mathcal{S}$ é uma reta.

Teorema 3.1 (Retas e inversão) *Seja s uma reta. Então s' é*

1. *s se $O \in s$;*

2. *um círculo passando por O se $O \notin s$.*

Demonstração O caso 1 é o exercício 2.3; passamos ao caso 2. Seja P o pé da perpendicular traçada de O a s e $X \in s$ qualquer.



Pelo exercício 2.12 os triângulos OPX e $OX'P'$ são semelhantes. Logo $O\widehat{X'}P$ é reto, o que nos mostra que X' pertence ao círculo $\mathcal{C}$ que tem OP' como diâmetro. A inclusão inversa é análoga, e obtemos $s' = \mathcal{C}$. □

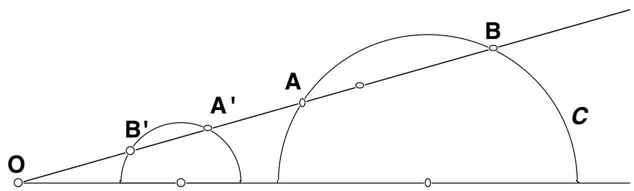
Observamos para uso posterior que, no caso 2 acima, a tangente a s' em O é paralela a s.

Teorema 3.2 (Círculos e inversão) *Seja $\mathcal{C}$ um círculo. Então $\mathcal{C}'$ é*

1. *uma reta se $O \in \mathcal{C}$;*

2. *um círculo se $O \notin \mathcal{C}$.*

Demonstração A primeira parte segue diretamente do fato de que $(P')' = P$ e do teorema 3.1 (1); passamos ao item 2. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{C}$.



A semireta $\overrightarrow{OA}$ intercepta $\mathcal{C}$ em outro ponto B (o caso $A = B$ fica por conta do leitor). Temos então $OA \cdot OA' = r^2$ e $OA \cdot OB = p(O, \mathcal{C}) := p$, donde $OA' = \frac{r^2}{p} \cdot OB$ Em outras palavras, vemos que A' é a imagem de B pela homotetia de centro O e razão $\frac{r^2}{p}$. Como A foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{C}$, concluimos que $\mathcal{C}'$ é a imagem de $\mathcal{C}$ por esta homotetia, ou seja, $\mathcal{C}'$ é um círculo. $\square$

Cabem aqui algumas observações. Mostramos acima que $\mathcal{C}'$ é a imagem de $\mathcal{C}$ por uma homotetia; é tentador ler disto que a inversão coincide com a homotetia, o que não é o caso. O leitor deve rever a figura acima e notar que a imagem de A pela homotetia é B', não A'.

Notamos também que não é verdade que o centro de $\mathcal{C}'$ seja o inverso do centro de $\mathcal{C}$; isto acontece se e somente se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$ são concêntricos. As perguntas relevantes aqui são (i) qual o centro de $\mathcal{C}'$? e (ii) para onde vai o centro de $\mathcal{C}$? Estas perguntas serão respondidas no corolário 3.6 e no exercício 3.6.

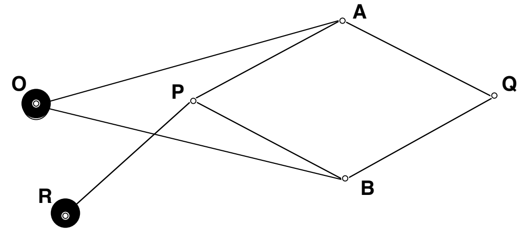
Exercício 3.1 **a.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos secantes em A. Mostre que uma inversão de centro A leva $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em retas concorrentes.

b. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos tangentes em A. Mostre que uma inversão de centro A leva $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em retas paralelas. $\triangle$

Exercício 3.2 **a.** Seja $\mathcal{C}$ um círculo que separa dois pontos A e B. Mostre que $\mathcal{C}'$ separa A' e B', qualquer que seja o polo de inversão.

b. Seja $\mathcal{C}$ um círculo. Descreva o que acontece com as duas regiões do plano determinadas por $\mathcal{C}$ através de uma inversão. $\triangle$

Exercício 3.3 **(O inversor de Peaucellier)** Na figura a seguir apresentamos uma engrenagem concebida para transformar movimento circular em movimento retilíneo.



Ela consiste de dois pontos fixos O e R e pontos móveis A, B, P e Q, bem como de hastes rígidas de comprimentos $OA = OB$ e $AP = AQ = BP = BQ$.

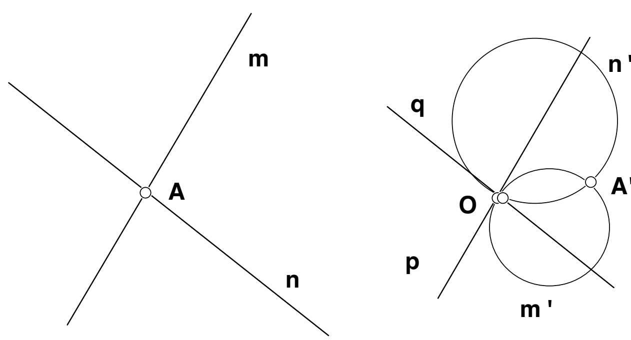
a. Ignore por um momento o ponto R e a haste RP. Mostre que quando P se move arbitrariamente o ponto Q é o inverso de P com relação a um círculo fixo centrado em O.

b. Considere agora o ponto P restrito pela haste RP e mostre que Q descreve um segmento de reta quando P se move. $\triangle$

Consideremos agora duas curvas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que se interceptam em um ponto A fazendo um ângulo de α. Pode-se mostrar que, após uma inversão de centro $O \neq A$, as curvas $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ fazem o mesmo ângulo em A'; este fato é descrito dizendo que a inversão é uma *aplicação conforme*. Para nossos propósitos será suficiente demonstrar este resultado quando as curvas consideradas são círculos.

Lema 3.3 (Inversão preserva ângulos entre retas) *Sejam m e n duas retas que se interceptam em A. Então m' e n' se interceptam em A' fazendo o mesmo ângulo que o de m e n.*

Demonstração Suponhamos que $A \neq O$ e que as retas em questão não passem por O. Sabemos que m' é um círculo passando por O cuja tangente p em O é paralela a m; afirmação análoga vale para n' e sua tangente q em O.



O ângulo entre m' e n' é então o ângulo entre p e q; mas este é também o ângulo entre m' e n' em A', como queríamos. Os casos omitidos no início desta demonstração, incluindo o caso $A = \infty$, ficam por conta do leitor. $\square$

Lembrando que o ângulo entre dois círculos é o ângulo entre suas tangentes, o lema anterior implica imediatamente o importante resultado a seguir.

Teorema 3.4 (Inversão preserva ângulos entre círculos) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos que se interceptam em um ponto A e consideremos uma inversão de centro $O \neq A$. Então o ângulo entre $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ em A' é o mesmo que o entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em A.* $\square$

Exercício 3.4 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos secantes em A e B e $\mathcal{E}$ um círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

a. Mostre que uma inversão de centro B leva $\mathcal{E}$ em um círculo de centro A'.

b.. Mostre que exatamente um dos pontos A e B está no interior de $\mathcal{E}$.$\triangle$

Exercício 3.5 Sejam s e t retas que se interceptam em A. Mostre que t faz um ängulo constante com qualquer círculo tangente a s em A. $\triangle$

O teorema 3.4, no caso de círculos ortogonais, tem consequências importantes para o restante de nosso trabalho. Como primeira aplicação, vamos mostrar que uma inversão preserva pontos inversos.

Proposição 3.5 *Seja $\mathcal{S}$ um círculo, e P e Q inversos com relação a um círculo $\mathcal{C}$. Se invertermos com relação a $\mathcal{S}$ então P' e Q' são inversos com relação a $\mathcal{C}'$.*

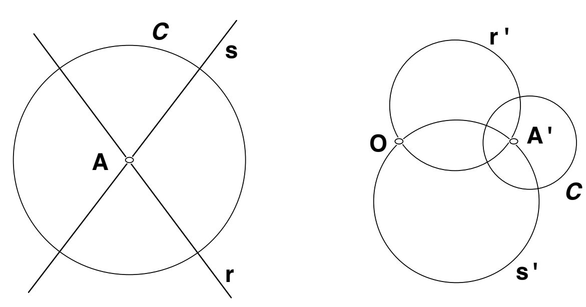
Demonstração Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ círculos passando por P e ortogonais a $\mathcal{C}$; então Q é o outro ponto de interseção de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$. A inversão preserva estas relações de ortogonalidade e o resultado segue pelo exercício 2.5. $\square$

Em particular, se o centro de S está em $\mathcal{C}$ vemos que Q' é o simétrico de P' com relação a à reta $\mathcal{C}'$. Isto nos mostra que a inversão com relação a um círculo é, a menos de uma inversão adequada, uma reflexão com relação a uma reta. Em outras palavras, os conceitos de inversão e reflexão são os mesmos. Estes comentários apresentam outra justificativa da definição 2.4.

Vamos agora mostrar o que acontece com o centro de um círculo através de uma inversão.

Corolário 3.6 (O inverso do centro) *Seja $\mathcal{C}$ um círculo de centro A e $\mathcal{C}'$ sua imagem através de uma inversão de polo O. Então A' é o inverso de O com relação a $\mathcal{C}'$.*

Demonstração Sejam s e t retas distintas por A. Então r e s são ortogonais a $\mathcal{C}$, donde r' e s' são ortogonais a $\mathcal{C}'$; notamos que $r' \cap s' = \{O, A'\}$.



Segue do exercício 2.5 que A' é o inverso de O com relação a $\mathcal{C}'$, como queríamos. $\square$

Notamos que este teorema inclui o caso $O \in \mathcal{C}$, de acordo com a definição 2.4: se $O \in \mathcal{C}$, o inverso de A é o simétrico de O com relação à reta $\mathcal{C}'$.

Exercício 3.6 (O centro do inverso) Seja $\mathcal{C}$ um círculo e $\mathcal{C}'$ sua imagem através de uma inversão com relação a $\mathcal{S}$; supomos que o centro O de $\mathcal{S}$ não está em $\mathcal{C}$. Mostre que o centro de $\mathcal{C}'$ é o inverso com relação a $\mathcal{S}$ do inverso de O com relação a $\mathcal{C}$. $\triangle$

Finalmente, um exercício que terá importante aplicação quando estudarmos a interseção de retas e cônicas.

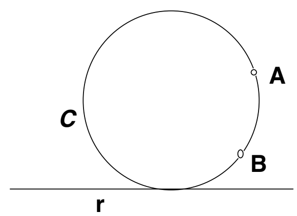
Exercício 3.7 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos e O um polo de inversão tal que $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ são círculos finitos. Mostre que o centro de $\mathcal{C}'$ é exterior a $\mathcal{D}'$ se e somente $\mathcal{D}$ não separa O e seu inverso com relação a $\mathcal{C}$. $\triangle$

4 Algumas aplicações de inversão

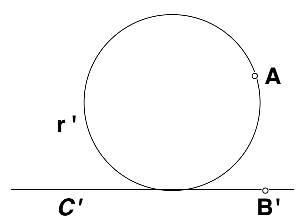
Nesta seção apresentamos algumas aplicações de inversão. Nosso procedimento, nas duas primeiras, é efetuar uma inversão conveniente para transformar o problema $\mathcal{P}$ em um problema mais fácil $\mathcal{P}'$. A solução $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}$ é então obtida "desinvertendo" a solução $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{P}'$; notamos que esta estratégia funciona devido ao fato de que $(\mathcal{X}')' = \mathcal{X}$.

Aplicação 4.1 *Dados uma reta r e dois pontos A e B em um mesmo semiplano com com relação a r, traçar um círculo tangente a r que passe por A e B.*

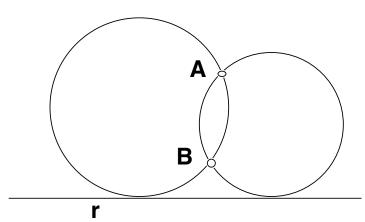
Vamos olhar para a figura em que supomos o problema resolvido.



Uma inversão de centro A transforma esta figura, *qualitativamente*, na figura a seguir.



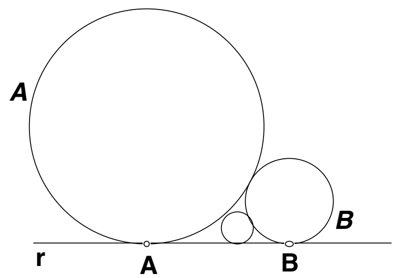
Vemos assim que a solução do problema na situação invertida é trivial: basta traçar por B' as tangentes a r'. Isto mostra, em particular, que o problema original tem exatamente duas soluções, obtidas invertendo as tangentes mencionadas. O final da história está na figura abaixo.



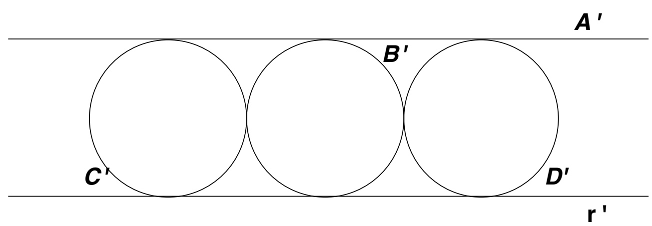
Notamos que não há nada especial com respeito ao fato de r ser uma reta; de fato, se r fosse um círculo finito a solução seria idêntica. $\square$

Aplicação 4.2 *Dados uma reta r, pontos $A, B \in r$ e $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ círculos tangentes entre si e a r em A, B, respectivamente, construir um círculo tangente a r, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.*

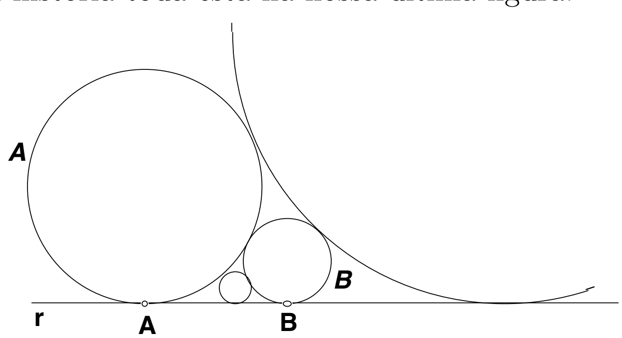
A situação do problema está descrita na figura a seguir.



onde o pequeno círculo "espremido" entre $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e r, que denotamos por $\mathcal{C}$, é o que queremos contruir. Uma inversão de centro A leva esta figura, *qualitativamente*, na figura a seguir; note que $\mathcal{A}'$ e r' são paralelas de vez que $\mathcal{A}$ é tangente a r.



Nosso problema aqui é construir círculos tangentes a $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ e r'. Mas isto é trivial, e de fato temos duas soluções $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$; isto quer dizer que o problema original tem outra solução além de $\mathcal{C}$. Invertendo $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ obtemos as duas soluções $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$; a história toda está na nossa última figura.

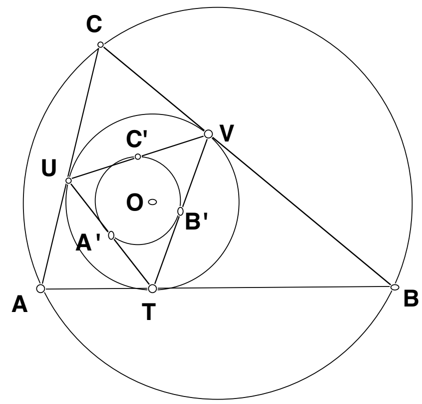


Assim como na aplicação anterior, não faria diferença para nós se r fosse um círculo finito. □

Vimos até aqui aplicações de inversão em construções geométricas, que servem de modelo para um grande número de construções semelhantes. Para variar, apresentamos uma aplicação métrica.

Aplicação 4.3 (A fórmula de Euler) *Sejam r e R, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito de um triângulo ABC e d a distância entre seus centros. Então $d^2 = R^2 - 2Rr$.*

Sejam U, T e V os pontos de tangência do círculo inscrito $\mathcal{S}$ com os lados do triângulo ABC e consideremos a inversão com respeito a $\mathcal{S}$. Os pontos U, V e W são invariantes e os pontos A, B e C são invertidos nos pontos médios A', B' e C' das cordas UT, TV e VU, respectivamente. Segue que o círculo cirscunscrito é invertido no círculo que passa por A', B' e C', cujo raio é $\frac{r}{2}$.



Como a potência do centro O de $\mathcal{S}$ com relação ao círculo circunscrito é $d^2 - r^2$, segue do exercício 2.13 que

$$\frac{r/2}{R} = \frac{r^2}{|d^2 - R^2|} = \frac{r^2}{R^2 - d^2}$$

e a nossa expressão para d segue imediatamente. □

4.1 Interseção de retas e cônicas

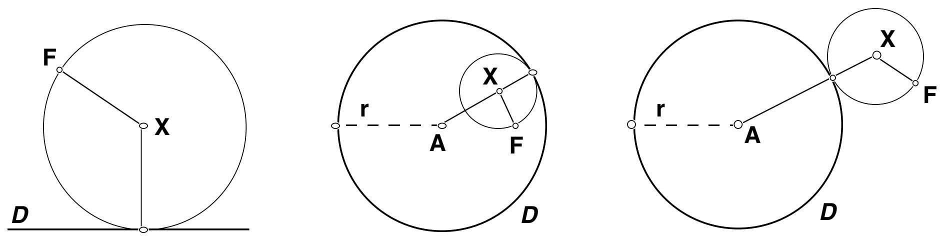
Pode parecer estranho ao leitor falar sobre cônicas em um trabalho de geometria plana. Isto se deve ao fato de que, nos cursos habituais de geometria euclidiana, os únicos objetos considerados são retas e planos, o estudo de cônicas sendo relegado aos cursos de geometria analítica. Mas várias construções geométricas levam naturalmente a considerar interseções de retas com cônicas; achar estas interseções é um problema imediatamente reduzido a um semelhante às duas primeiras aplicações da seção anterior, como mostramos a seguir.

Primeiro definimos cônicas de uma maneira mais adequada aos nossos propósitos.

Definição 4.1 (Cônicas) *Sejam F um ponto e $\mathcal{D}$ um círculo com $F \notin \mathcal{D}$. Uma* cônica $\mathfrak{C} = (F, \mathcal{D})$ *é o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam por F e são tangentes a $\mathcal{D}$. Dizemos que F é o* foco *de $\mathfrak{C}$ e $\mathcal{D}$ sua* diretriz*.*

Se $\mathcal{D}$ é uma reta dizemos que $\mathfrak{C}$ é uma parábola*. Se $\mathcal{D}$ é um círculo finito, $\mathfrak{C}$ é uma uma* elipse *se F é interior a $\mathcal{D}$ e uma* hipérbole *caso contrário.*

O leitor que estranhar estas "novas" definições de cônicas está convidado a olhar para a figura abaixo e se convencer que, de fato, não há nada de novo aqui.



Parábola
XF = d(X,s)

Elipse
XA + XF = r

Hipérbole
XA - XF = r

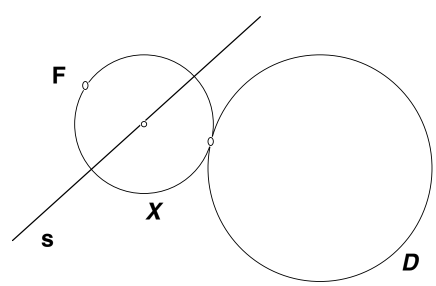
Exercício 4.1 Com base na definição acima, explique porque a hipérbole tem dois ramos. △

Nosso objetivo agora é mostrar como construir os pontos de interseção de uma reta qualquer com uma cônica. O leitor não deve achar que estamos construindo cônicas inteiras com régua e compasso; estamos, isto sim, achando pontos especiais de cônicas.

Passemos ao nosso problema. Temos uma cônica $\mathfrak{C} = (F, \mathcal{D})$, uma reta s e queremos construir $\mathfrak{C} \cap s$. Traduzindo em linguagem de círculos, temos a aplicação a seguir.

Aplicação 4.4 *Dada uma reta s, um ponto $F \notin \mathcal{S}$ e um círculo $\mathcal{D}$, construir um círculo $\mathcal{X}$ com centro em s, passando por F e tangente a $\mathcal{D}$.*

Nossa figura com o problema resolvido é



e a solução é imediata: uma inversão de centro F leva $\mathcal{X}$ em uma reta $\mathcal{X}'$ tangente a $\mathcal{D}'$ e ortogonal a s', ou seja, passando pelo centro de s'; basta então construir estas retas e “desinvertê-las”.

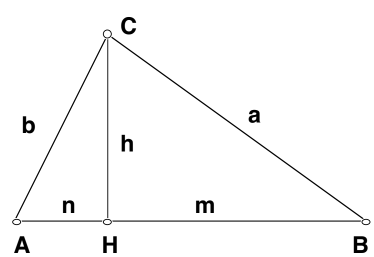
Vamos à discussão do problema. Temos (i) duas, (ii) uma ou (iii) nenhuma soluções se o centro de s' (i) é exterior, (ii) pertence ou (iii) é interior a $\mathcal{D}'$. Denotanto por G o simétrico de F com relação a s, o exercício 3.7 traduz estas condições em (i) $G \notin \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ não separa F e G, (ii) $G \in \mathcal{D}$ e (iii) $\mathcal{D}$ separa F e G. $\square$

A condição (ii) é particularmente interessante por caracterizar as tangentes a uma cônica.

Exercício 4.2 Seja $\mathfrak{C} = (F, \mathcal{D})$. Mostre que $\mathcal{D}$ é o lugar geométrico dos simétricos de F com relação às tangentes a $\mathfrak{C}$. $\triangle$

Como mencionado no começo desta seção, vários problemas de construções geométricas se reduzem naturalmente ao que acabamos de resolver. Como exemplo, escolhemos um belo problema devido a Johann Müller (Regiomontanus) (1436 – 1476), extraído de [5].

Consideremos um triângulo ABC com $BC = a$ e $AC = b$, onde supomos $a > b$. Sejam $CH = h$ a altura relativa ao lado AB, $AH = n$ e $BH = m$, conforme a figura abaixo.

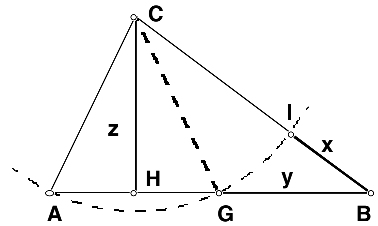


Notamos que como $a > b$ temos $m > n$ e também $a - b < m - n$ (o leitor deve provar estas afirmações). Obtemos assim, a partir do triângulo ABC, três números reais positivos $x = a - b$, $y = m - n$ e $z = h$ com $x < y$.

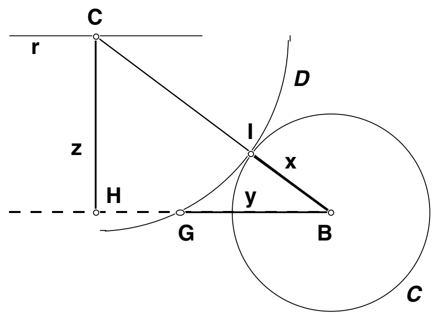
O problema de Regiomontanus consiste em fazer o este trajeto no sentido inverso, ou seja

Aplicação 4.5 (Regiomontanus) *Dados três números reais não negativos x, y, z com $x < y$, construir um triângulo como acima tal que $x = a - b$, $y = m - n$ e $z = h$.*

Na figura do problema resolvido, traçamos um círculo de centro C e raio b, determinando pontos G e I como na figura a seguir.



Como y é dado podemos supor BG construído; se conseguirmos construir C então teremos A e o problema está pronto. Consideremos então uma reta r paralela e à distância z de BG e um círculo $\mathcal{C}$ de centro B e raio x; estes objetos são construtíveis pois x e z são dados. Vemos então que C é o centro de um círculo de centro na reta r, passando por G e tangente a $\mathcal{C}$.



Mas este é o problema da aplicação 4.4; neste caso particular, estamos achando a interseção da hipérbole $\mathfrak{H} = (G.\mathcal{C})$ com uma reta paralela à reta focal. Os pontos assim construídos nos fornecem os possíveis vértices C.

Aviso: o leitor deve preencher alguns detalhes. Por exemplo, nossa figura inicial mostra um triângulo ABC acutângulo, mas nada nos impede de considerar outros casos. Além disso, a reta r intercepta $\mathfrak{H}$ em dois pontos; temos então duas soluções para o problema inicial? □

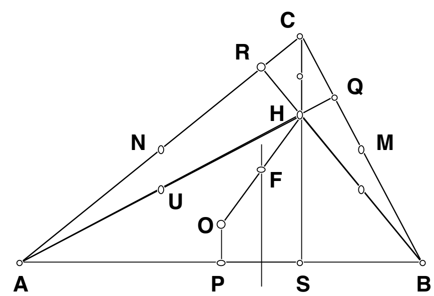
Exercício 4.3 (Círculos satisfazendo três condições) Considere as seguintes condições para um círculo: *passar por um ponto dado*, *ter centro em uma reta dada*, *ser tangente a um círculo dado* e *ser ortogonal a um círculo dado*. Com uma escolha coerente de três delas, admitindo repetição, podemos criar um grande número de problemas de construções geométricas, de triviais como *construir um círculo passando por três pontos dados* a outros mais complexos, como *construir um círculo que passe por um ponto dado, tenha centro em uma reta dada e seja tangente a um círculo dado* ou *construir um círculo tangente a três círculos dados*. Seu exercício aqui é enunciar e resolver o maior número possível destes problemas. Bom divertimento! △

5 O círculo de nove pontos e o teorema de Feuerbach

Nesta seção vamos provar um belissimo teorema devido ao matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834). Começamos com a apresentação de nosso personagem principal.

Proposição 5.1 (O círculo de nove pontos) *Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H. Então os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam H aos vértices estão em um círculo cujo centro é o ponto médio de OH e cujo raio é a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.*

Demonstração Sejam M, N e P os pontos médios e Q, R e S os pés das alturas correspondentes aos lados BC, AC e AB, respectivamente. Então $NP = \frac{1}{2}BC = MS$, pois NP é base média do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC e M é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo BSC. Logo o trapézio $PSNM$ é isósceles e concluímos que o círculo $\mathcal{F}$ que passa por M, N e S também passa por P. Analogamente concluímos que $\mathcal{F}$ passa por Q e R.



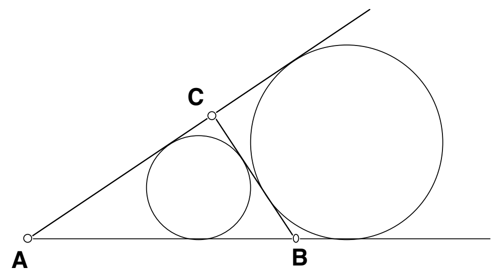
Os pontos Q, R e S são também os pés das alturas $\triangle AHB$; o parágrafo acima, aplicado ao triângulo AHB, mostra que o círculo que passa por R, S e Q também passa pelos pontos médios dos lados AH e BH. O ponto médio de CH é tratado do mesmo modo e temos os nove pontos em $\mathcal{F}$.

Observamos agora que o trapézio (casos particulares ficam por conta do leitor) $OPSH$ é retângulo em P e S; logo a mediatriz de PS passa pelo ponto médio F de OH, e o mesmo acontece com as mediatrizes de QM e RN. Concluímos que F é o centro de $\mathcal{F}$.

Finalmente, seja U o ponto médio de AH; então UF é um raio de $\mathcal{F}$ e é também base média do $\triangle AOH$ relativa ao lado OA. Como OA é um raio do círculo circunscrito ao $\triangle ABC$, segue que o raio de $\mathcal{F}$ é $UF = \frac{1}{2}OA$. $\square$

O leitor deve notar que, em geral, quatro pontos quaisquer nunca estão em um mesmo círculo; deste modo, o círculo de Feuerbach é um belo e surpreendente objeto geométrico. No entanto, a história não acabou; há mais emoção pela frente.

Em um triângulo existem quatro círculos que tangenciam as retas suporte dos lados. Um deles é o nosso velho amigo o círculo inscrito; os outros tangenciam um lado internamente e os outros externamente, e são ditos *círculos excritos* do triângulo. Em conjunto, estes quatro círculos são ditos os *círculos tritangentes* ao triângulo. Na figura a seguir temos o círculo inscrito e um dos círculos excritos.

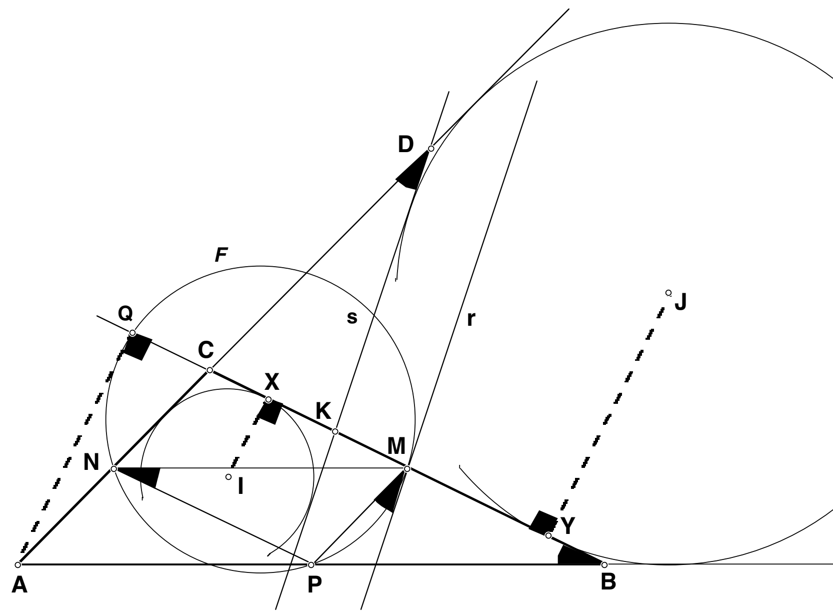


O círculo de Feuerbach tem uma relação extraordinária – melhor dizendo, miraculosa – com os círculos tritangentes.

Teorema 5.2 (Feuerbach) *Sejam ABC um triângulo e $\mathcal{F}$ seu círculo de Feuerbach. Então $\mathcal{F}$ é tangente aos quatro círculos tritangentes.*

Antes de demonstrar este teorema, precisaremos de alguma preparação. Sejam I o centro do círculo circunscrito e J o centro de um dos círculos excritos a um triângulo ABC, que escolhemos tangente internamente ao lado BC. Temos determinadas três tangentes comuns a estes círculos, a saber, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. A quarta tangente, que denontamos por s, passa pelo pé da bissetriz $\overrightarrow{AI}$, que denotamos por K.

Tudo isto aparece na figura abaixo, onde M, N e P são os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente, Q o pé da altura relativa ao vértice A e D o ponto de interseção de s com $\overleftrightarrow{AC}$.



Lema 5.3 *Com a notação acima, seja $\mathcal{F}$ o círculo de Feuerbach do triângulo ABC e r a tangente a $\mathcal{F}$ por M. Então r é paralela a s.*

Demonstração Como r é tangente a $\mathcal{F}$ em M, o ângulo (agudo, na figura) que r faz com a corda PM é igual a $P\hat{N}M$. Temos $P\hat{N}M = P\hat{B}M$, e por outro lado $P\hat{B}M = A\hat{D}K$ (o leitor deve provar isto). Deste modo r e s fazem ângulos iguais com as retas paralelas AC e PM, e segue que r e s são paralelas. $\square$

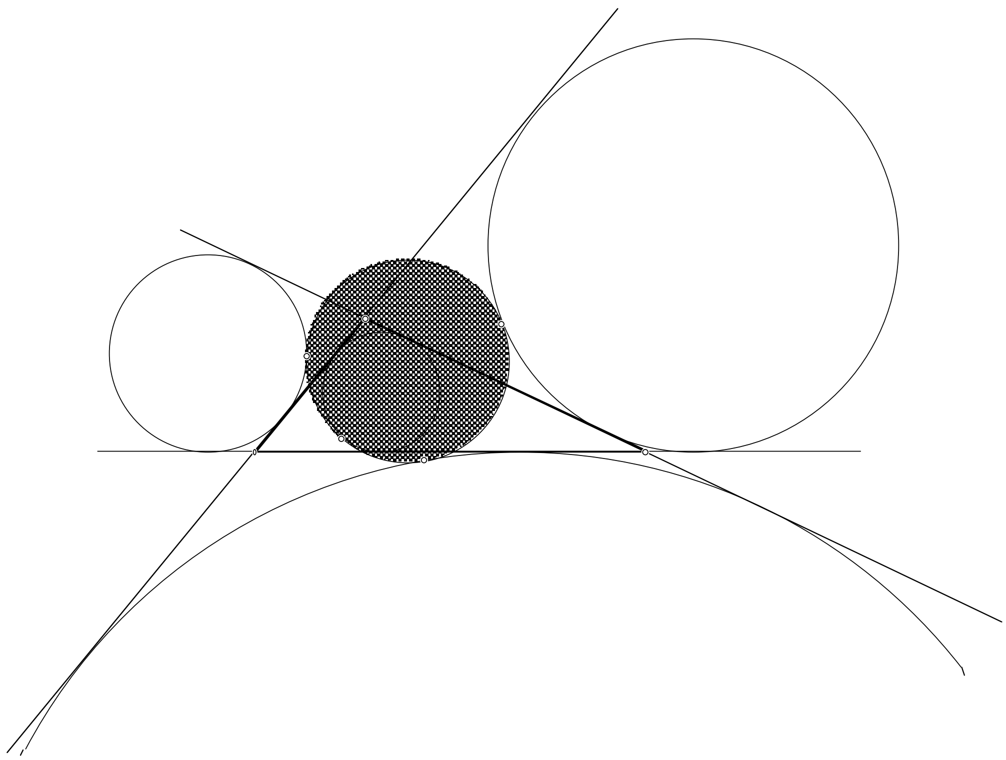
O próximo passo fica para o leitor.

Exercício 5.1 Mostre que M é o ponto médio de XY. $\triangle$

Demonstração (do teorema 5.2) Pelo exercício 1.3, os pontos I e J são conjugados harmônicos com relação a A e K. Como A, I, K e J correspondem, respectivamente, a Q, X, K e Y por projeção ortogonal na reta $\overleftrightarrow{BC}$, segue que X e Y são conjugados harmônicos com relação a K e Q.

Consideremos agora uma inversão pelo círculo $\mathcal{S} = C(M, X)$; pelo exercício anterior $\mathcal{S}$ passa também por Y. Os círculos inscrito e excrito, sendo ortogonais a $\mathcal{S}$, permanecem invariantes, bem como $\overleftrightarrow{BC}$. O círculo $\mathcal{F}$ passa por Q e M; pelo visto no primeiro parágrafo temos $Q' = K$, e segue que $\mathcal{F}'$ é uma reta que passa por K. Por outro lado $\mathcal{F}'$ é paralela à tangente a $\mathcal{F}$ em M (conforme observação após o teorema 3.1). O lema anterior nos mostra que $\mathcal{F}'$ coincide com s, ou seja, $\mathcal{F}'$ é tangente aos círculo inscrito e circunscrito. Logo o mesmo vale para $\mathcal{F}$, e nossa demonstração chega (finalmente!) ao fim. $\square$

Este resultado deve convencer o mais cético dos leitores de que triângulos são objetos cuja complexidade e beleza desafiam a nossa imaginação. Vale a pena contemplar a figura abaixo, onde o círculo de Feuerbach aparece sombreado.



6 O eixo radical

Vamos nesta seção introduzir um lugar geométrico bastante interessante, a saber, o eixo radical de dois círculos.

Definição 6.1 (Eixo radical - provisório) *O eixo radical de dois círculos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, não ambos retas, é o conjunto* $[\mathcal{C},\mathcal{D}] = \{X : p(X,\mathcal{C}) = p(X,\mathcal{D})\}$.

Se $\mathcal{D}$ é uma reta passando pelo centro de $\mathcal{C}$ ou se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são finitos e concêntricos então $[\mathcal{C},\mathcal{D}] = \emptyset$. No caso em que ambos os círculos são finitos e não concêntricos, notamos que um ponto X de $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ é necessariamente externo, interno ou pertencente a ambos os círculos simultaneamente.

Exercício 6.1 (Eixo radical e ortogonalidade) Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos finitos e X um ponto externo a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Mostre que $X \in [\mathcal{C},\mathcal{D}]$ se e somente se e somente se os segmentos de tangente traçados de X a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são iguais. $\triangle$

Este exercício nos dá uma outra caracterização do eixo radical, expressa na proposição a seguir.

Proposição 6.2 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos finitos não concêntricos. Então o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consiste dos pontos de $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ externos a $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$.* $\square$

Com esta proposição, podemos dar uma definição do eixo radical que independe de conceitos métricos.

Definição 6.3 (Eixo radical – definitivo) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos, não ambos retas. O eixo radical de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, denotado por $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$, é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.*

Como veremos, esta definição nos faz "perder" uma parte do eixo radical de dois círculos finitos secantes, a saber, os pontos internos aos dois círculos que satisfazem a definição 6.1. Mas estes pontos não têm nenhum interesse geométrico para nós, como veremos, de modo que não perdemos nada.

Exercício 6.2 **a.** Seja $\mathcal{C}$ um círculo e X um ponto externo a $\mathcal{C}$. Mostre que existe um único círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ com centro X.

b. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos e $X \in [\mathcal{C},\mathcal{D}]$ externo a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Mostre que existe um único círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com centro em X. $\triangle$

Exercício 6.3 Seja $\mathcal{C}$ um círculo e s uma reta. Mostre que $[\mathcal{C}, s]$ é o conjunto de pontos de s exteriores a $\mathcal{C}$. $\triangle$

Este exercício nos permite restingir nossos esforços subsequentes para determinar o eixo radical ao caso em que ambos os círculos envolvidos são finitos. Vamos fazer isto de duas maneiras.

6.1 Visão algébrica

Vamos aqui usar a definição 6.1 e determinar o que é o eixo radical "na conta".

Teorema 6.4 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos não concêntricos. Então $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é uma reta perpendicular à reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.*

Demonstração Sejam C, D os centros e r, s os raios de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Fixamos um sistema de coordenadas com origem em C tal que $D = (a, 0)$. Então $X = (x, y) \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ se e somente se $p(X, \mathcal{C}) = p(X, \mathcal{D})$; mas isto acontece se e somente se

$$x^2 + y^2 - r^2 = (x - a)^2 + y^2 - s^2$$

ou seja

$$x = \frac{r^2 - s^2 + a^2}{2a}$$

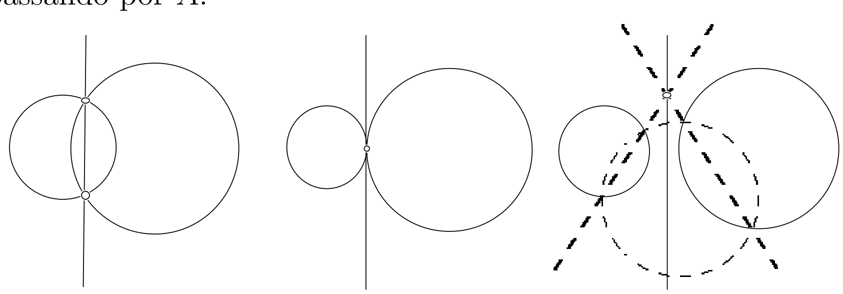
Vemos assim que a coordenada x de X é constante, ou seja, independe de X; deste modo, X está em uma reta fixa perpendicular à reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Deixamos para o leitor mostrar que, reciprocamente, todo ponto desta reta tem a propriedade que caracteriza o eixo radical. $\square$

Vamos agora oferecer algumas construções do eixo radical.

Exercício 6.4 Mostre que

a. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são secantes em A e B então $[\mathcal{C}, \mathcal{D}] = \overleftrightarrow{AB}$.

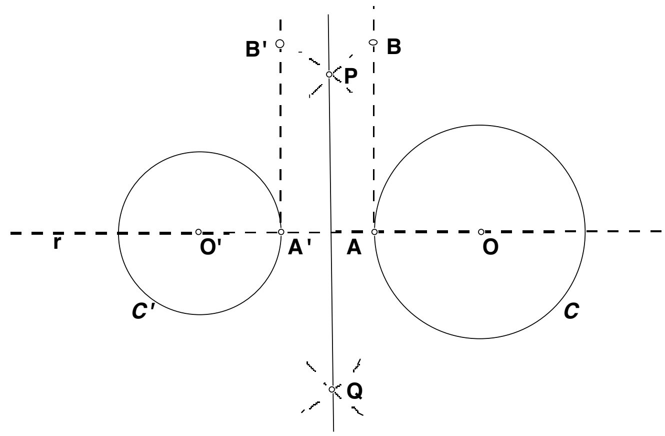
b. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são tangentes em A então $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é a perpendicular à reta dos centros passando por A.



c. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são disjuntas e não concêntricos, considere um círculo arbitrário $\mathcal{A}$ secante simultaneamente a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tal que $[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$ e $[\mathcal{A}, \mathcal{D}]$ se interceptem em um ponto finito A. Então $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é a reta perpendicular à reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que passa por A. $\triangle$

No exercício a seguir apresentamos uma construção do eixo radical devida a Poncelet [6].

Exercício 6.5 Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ círculos não concêntricos de centros O, O', respectivamente, e A, A' pontos de interseção distintos destes círculos com a reta r dos centros, conforme a figura abaixo. Por A e A' levantamos perpendiculares a r e nelas marcamos B e B' com $AB = A'B'$.



Seja $\{P, Q\} = C(O, B) \cap C(O', B')$. Mostre que $\overleftrightarrow{PQ} = [\mathcal{C}, \mathcal{C}']$. $\triangle$

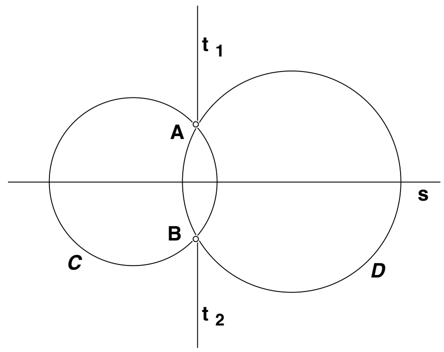
A construção abaixo fornece um macro estável para a construção do eixo radical em geometria dinâmica.

Exercício 6.6 (Dave Wilson) Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dois círculos não concêntricos de centros C, D respectivamente, e C', D' os inversos de C, D com relação a $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, respectivamente. Mostre que $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é a mediatriz de $C'D'$. (O autor só sabe resolver este exercício algebricamente. Uma solução sintética será muito apreciada.) $\triangle$

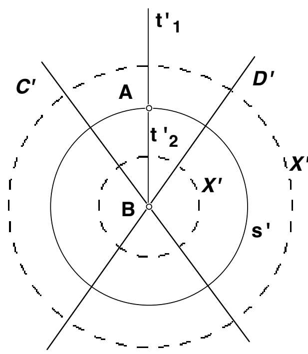
6.2 Visão sintética

O leitor com algum senso estético deve ter notado que a demonstração do teorema 6.4 fugiu ao estilo adotado até aqui nestas notas, ou seja, ela é algébrica em vez de sintética – isto por conta da definição 6.1, que foi dada em termos métricos. Vamos agora refazer nosso trabalho sobre o eixo radical de acordo com a definição 6.3.

Suponhamos primeiro $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ intersectantes em dois pontos A e B; sejam s a reta dos centros e $t_1, t_2 \subset \overleftrightarrow{AB}$ as semiretas indicadas na figura a seguir.

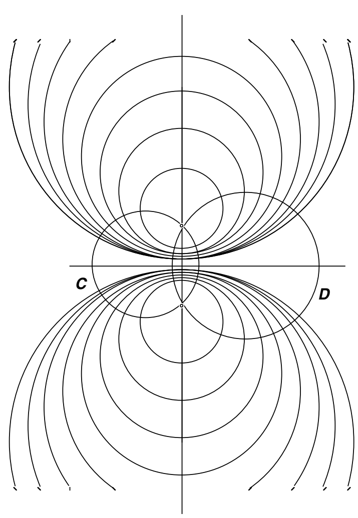


Seja agora $\mathcal{X}$ um círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Uma inversão por $\mathcal{S} = C(A, B)$ nos dá a figura abaixo.

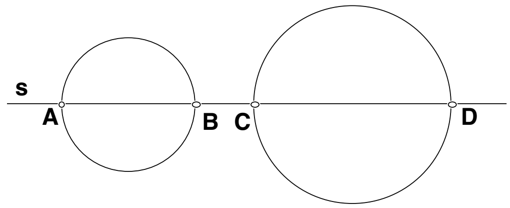


onde notamos que t_2' é o segmento AB. Segue imediatamente que $\mathcal{X}$ não intercepta s. Além disso, se $\mathcal{X}\,'$ é interior a $s\,'$ então o centro de $\mathcal{X}$ está em t_2, e em t_1 caso contrário. Logo o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é $t_1 \cup t_2$, e recuperamos o eixo radical como o conhecíamos, com a exceção do segmento AB.

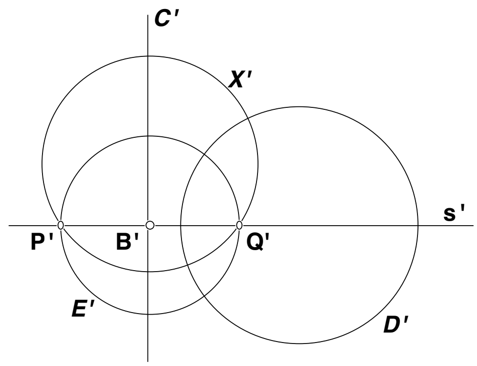
Podemos resumir nossas conclusões na seguinte figura, que representa o a família dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.



Passamos agora à situação em que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são disjuntos e não concêntricos. Sejan s a reta dos centros e AB e CD os diâmetros determinados por s em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente.

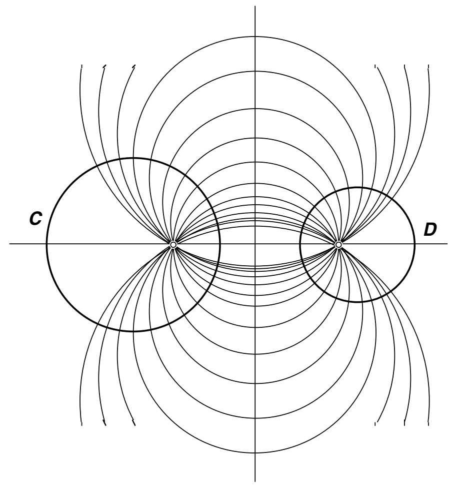


Uma inversão de centro A nos leva à seguinte figura:



Pelo exercício 6.2 (b) existe um único círculo $\mathcal{E}\,'$ ortogonal a $\mathcal{D}\,'$ com centro em $B\,'$; se $P\,'$ e $Q\,'$ são os pontos de interseção de $\mathcal{E}\,'$ com $s\,'$ segue que $P\,'$ e $Q\,'$ são inversos com relação a $\mathcal{D}\,'$. Mais geralmente, dado $Y \in \mathcal{C}\,'$, existe um único círculo $\mathcal{X}\,'$ ortogonal a $\mathcal{D}\,'$ com centro em Y. Como o círculo de centro Y que passa por $P\,'$ e $Q\,'$ é ortogonal a $\mathcal{D}\,'$, ele coincide com $\mathcal{X}\,'$. Vemos assim que a família dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}\,'$ e $\mathcal{D}\,'$ coincide com a família de círculos que passam por $P\,'$ e $Q\,'$.

Desinvertendo, vemos que a família dos círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ coincide com a família dos círculos que passam por P e Q. Os centros destes círculos estão na mediatriz de PQ, e temos o eixo radical neste caso. Nossa figura aqui é a seguinte.



Os pontos P e Q terão papel importante na próxima seção. Para o momento, notamos que nosso trabalho levou ao seguinte resultado, que complementa o que fizemos na seção 1.

Proposição 6.5 *Sejam AB e CD segmentos distintos, contidos em uma mesma reta e ou disjuntos ou com $AB \subset CD$, e tais que seus pontos médios também são distintos. Então existe um único par de pontos P, Q que são conjugados harmônicos com relação a AB e CD simultaneamente.* $\square$

Definição 6.6 *Os pontos P e Q da proposição acima são ditos os* pontos mágicos *dos círculos que tëm AB e CD como diâmetros.*

A motivação para esta terminologia pouco usual será dada mais tarde (teorema 7.1). Com o nome mais conhecido de *pontos limite*, estes pontos reaparecerão na próxima seção.

Exercício 6.7 Demonstre algebricamente a proposição 6.5. $\triangle$

Exercício 6.8 Dados dois círculos disjuntos e não concêntricos, mostre como achar seus pontos mágicos sem o uso de inversão. (*sugestão*: a receita está pronta alguns parágrafos atrás) $\triangle$

Exercício 6.9 Refaça o trabalho desta seção supondo que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são tangentes. $\triangle$

Exercício 6.10 Mostre que existe um único círculo ortogonal a três círculos dados, sabendo-se que estes são dois a dois não concêntricos e que seus centros não são colineares. E se os centros fôssem colineares? $\triangle$

6.3 Feixes de círculos

Apresentamos aqui, como uma sequência de exercícios, o conceito de feixes de círculos, sem maior objetivo que uniformizar o que vimos na seção anterior.

Definição 6.7 (Feixes de círculos) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ dois círculos não concêntricos, não ambos retas. O* feixe (coaxial) de círculos gerado por $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, *denotado por $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, é o conjunto dos círculos $\mathcal{X}$ tais que $[\mathcal{X}, \mathcal{D}] = [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são secantes, tangentes ou disjuntos, então $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ é dito um feixe* intersectante*,* tangente *ou* não intersectante*, respectivamente.*

O leitor deve notar que $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é um elemento de $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$. Além disso, esta definição é apenas aparentemente assimétrica com relação a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, como mostra o exercício a seguir.

Exercício 6.11 Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ círculos tais que $[\mathcal{C}, \mathcal{X}] = [\mathcal{C}, \mathcal{D}] = [\mathcal{Y}, \mathcal{D}]$. Mostre que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. $\triangle$

Em outras palavras, $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ é o eixo radical de quaisquer dois círculos de $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$.

O "coaxial" na definição se explica no item **a.** do seguinte exercício.

Exercício 6.12 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos não concêntricos.

a. Mostre que todos os círculos de $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ têm seus centros na reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

b. Mostre que se X está na reta dos centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ então existe um único círculo $\mathcal{X} \in \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ com centro em X.

c. Seja X um ponto qualquer. Mostre que existe um único círculo $\mathcal{X} \in \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ passando por X. (*sugestão*: pense em um círculo $\mathcal{S}$ com centro em $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, ortogonal a $\mathcal{C}$ e que não passe por X, e considere o inverso de X com relação a $\mathcal{S}$) $\triangle$

Definição 6.8 *Dados dois círculos não concêntricos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, definimos o* feixe ortogonal (ou conjugado) *a $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, denotado por $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}^{\perp}$, como a família de círculos ortogonais a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.*

Exercício 6.13 Mostre que

a. Qualquer círculo de $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}^{\perp}$ é ortogonal a qualquer círculo de $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$.

b. Se $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ é intersectante, tangente ou não intersectante então $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}^{\perp}$ é não intersectante, tangente ou intersectante, respectivamente. $\triangle$

Um feixe $\mathcal{F}$ não intersectante tem dois círculos de raio zero, que são os "pontos mágicos" de quaisquer dois de seus círculos e que construímos na seção anterior. Na literatura do mundo exterior, estes pontos são ditos os *pontos limite de $\mathcal{F}$*.

Exercício 6.14 Mostre que

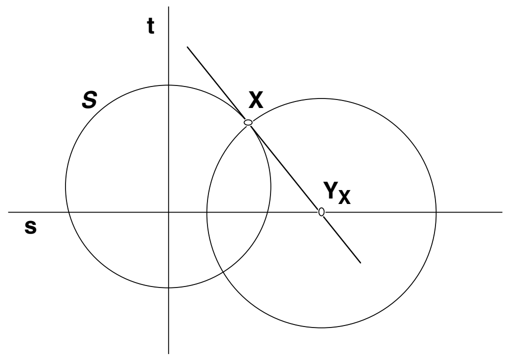
a. Os pontos limite de um feixe não intersectante $\mathcal{F}$ são inversos com relação a quaisquer dois círculos de $\mathcal{F}$.

b. Se $\mathcal{F}$ é um feixe não intersectante com pontos limite A e B então $\mathcal{F}$ é a família de círculos de Apolônio do segmento AB. △

Exercício 6.15 Mostre que um feixe não intersectante pode ser invertido em um feixe concêntrico, um feixe intersectante pode ser invertido em um feixe de retas com um ponto finito comum e um feixe tangente pode ser invertido em um feixe de retas paralelas. △

O leitor que estranhou a ausência de figuras nesta seção deve notar que elas já foram feitas quando de nossa exploração geométrica do eixo radical. De qualquer modo, oferecemos os seguintes exercícios para compensar nossa preguiça em fazer novas figuras.

Exercício 6.16 Sejam s e t duas retas perpendiculares, $\mathcal{S}$ um círculo com centro em t e X um ponto genérico de $\mathcal{S}$. Uma tangente a $\mathcal{S}$ em X intercepta s em Y_X, determinando o círculo $\mathcal{C}_X = C(Y_X, X)$.



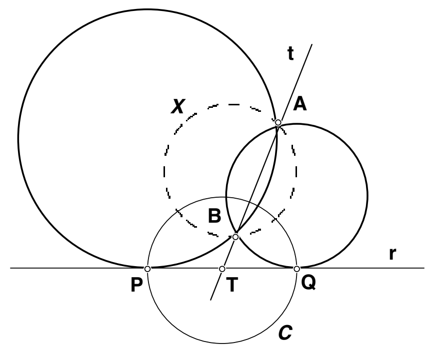
Mostre que $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_X : X \in \mathcal{S}\}$ é um feixe de círculos ortogonais a $\mathcal{S}$ e de eixo radical t, que é (i) não intersectante se $\mathcal{S} \cap s$ consiste de dois pontos, que neste caso são os pontos limite de $\mathcal{F}$, (ii) tangente se $\mathcal{S}$ é tangente a s e (iii) intersectante se $\mathcal{S} \cap s = \emptyset$.

Vale a pena fazer esta construção em um programa de geometria dinämica, traçando o lugar geométrico dos círculos $\mathcal{C}_X$ quando X percorre $\mathcal{S}$ e depois brincando com o centro e o raio de $\mathcal{S}$. O resultado é lindo, e você terá feito as figuras que o autor não colocou aqui. △

Exercício 6.17 Aproveite seu trabalho de geometria dinâmica no exercício anterior e construa o feixe ortogonal ao feixe já construído. Divirta-se com a figura obtida. △

6.4 O eixo radical e construções geométricas

Para fazer justiça ao eixo radical, observamos que ele também é uma boa ferramenta para construções geométricas e substitui a inversão de modo conveniente em várias situações. Como exemplo, retomamos a aplicação 4.1: *dada uma reta r e dois pontos A, B no mesmo semiplano com relação a r, construir um círculo tangente a r que passa por A e B.*



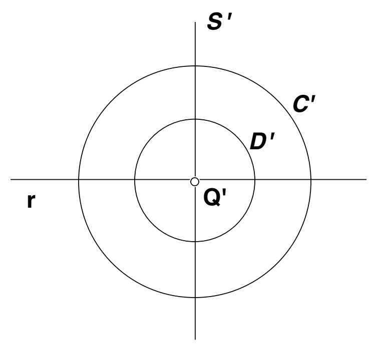
A reta $t = \overleftrightarrow{AB}$ é o eixo radical de qualquer círculo da famiília intersectante $\mathcal{F}$ determinada por A e B; deste modo, o ponto $T = r \cap t$ é o centro de um círculo ortogonal qualquer círculo de $\mathcal{F}$. Basta então traçar um círculo qualquer $\mathcal{X}$ por A e B, e depois um círculo $\mathcal{C}$ ortogonal a $\mathcal{X}$ com centro T; o raio de $\mathcal{C}$ é o comprimento da tangente traçada por T a qualquer círculo de $\mathcal{F}$. Deste modo os círculos procurados tangenciam r nos pontos $\{P, Q\} = \mathcal{C} \cap r$; o resto é rotina e obtemos as soluções procuradas. O leitor deve analisar o caso em que r e t são paralelas.

Exercício 6.18 Seja $\mathfrak{C} = (F, \mathcal{D})$ uma cônica e r uma reta. Construa os pontos de $r \cap \mathfrak{C}$ usando o eixo radical (isto é, sem usar inversão). $\triangle$

7 Inversão em círculos concêntricos

Esta seção tem como objetivo apresentar duas aplicações clássicas de inversão: o porisma de Steiner e o problema de Apolônio. Ambas são consequências imediatas do fato de que é possível inverter simultaneamente dois círculos disjuntos não concêntricos em dois círculos concêntricos, que passamos a demonstrar.

Consideremos dois círculos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ disjuntos. Sejam r a reta dos centros, P e Q seus pontos mágicos e $\mathcal{S}$ um círculo qualquer por P e Q, isto é, qualquer círculo ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, conforme a seção anterior. Uma inversão de centro P leva à figura abaixo.



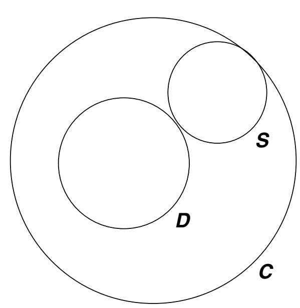
A conclusão a que chegamos é importante o suficiente para merecer o status de um teorema.

Teorema 7.1 *Dados dois círculos disjuntos não concêntricos, existe uma inversão que os leva em círculos concêntricos.* □

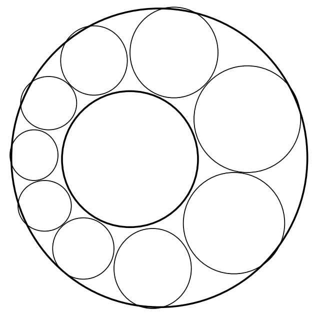
Exercício 7.1 Mostre que se uma inversão leva dois círculos disjuntos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em círculos concêntricos então o centro de inversão é um dos pontos mágicos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. △

7.1 O porisma de Steiner

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos com $\mathcal{C}$ contido no interior de $\mathcal{D}$; diremos que um círculo $\mathcal{S}$ é *bitangente* aos dois se ele é como na figura abaixo.

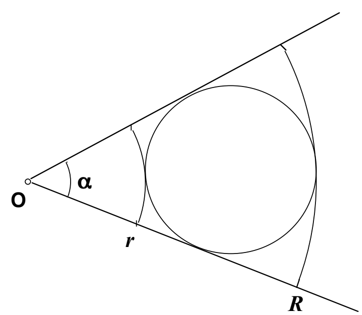


Uma seqüência $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ de círculos bitangentes a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ a é dita uma *cadeia fechada* se cada $\mathcal{S}_i$ é tangente ao anterior e $\mathcal{S}_n$ é tangente a $\mathcal{S}_1$, como na figura a seguir.



A figura indica que nossas cadeias fechadas dão apenas uma volta ao redor do círculo central. É claro que, em geral, não existem cadeias fechadas; mesmo quando $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são concêntricos, isto só acontece em casos bastante especiais.

Exercício 7.2 **a.** Na figura abaixo o círculo $\mathcal{C}$ é tangente a dois círculos concêntricos de raios r e R.



Mostre que as tangentes traçadas do centro comum O a $\mathcal{C}$ subentendem um ângulo de medida α se e somente se

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

b. Considere agora dois círculos concêntricos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ de raios r e R, respectivamente, com $r < R$. Mostre que é possível construir uma cadeia fechada para $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com n círculos se e somente se

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$$

$\triangle$

Se existem cadeias fechadas, temos o seguinte maravilhoso resultado, devido a Steiner.

Teorema 7.2 (O porisma de Steiner) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos com $\mathcal{C}$ contido no interior de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ uma cadeia fechada para $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Então é possível montar uma cadeia fechada de comprimento n a partir de qualquer círculo bitangente a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.*

Demonstração Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são concêntricos o resultado é óbvio. Caso contrário, o teorema 7.1 permite inverter $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ em círculos concêntricos, e o resultado é óbvio outra vez. □

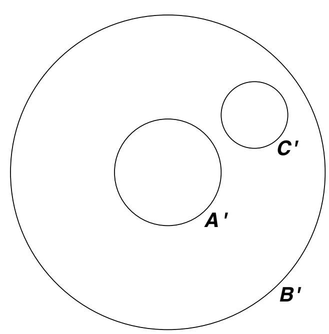
Notamos que este porisma é verdadeiro mesmo quando um dos círculos é uma reta. O leitor com acesso a um programa de geometria dinâmica pode se divertir fazendo a figura neste caso.

Exercício 7.3 Mostre que os pontos de tangência dos círculos da cadeia fechada no porisma de Steiner estão em um círculo que inverte os dois círculos originais um no outro. △

7.2 O problema de Apolônio

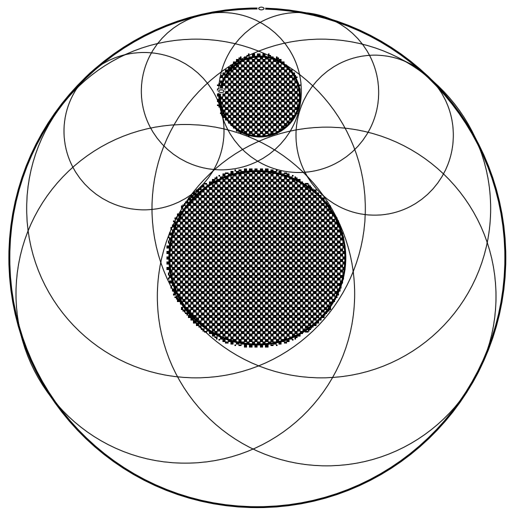
O problema de construir um círculo tangente a três círculos dados $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ leva o nome de Apolônio. Vamos resolvê-lo supondo que os círculos envolvidos são dois a dois disjuntos e exteriores; outros casos ficam por conta do leitor.

O teorema 7.1 nos permite fazer uma inversão de modo que $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ sejam concêntricos, digamos com $\mathcal{A}'$ no interior de $\mathcal{B}'$. Como nenhum de nossos três círculos separa um do outro, segue que $\mathcal{C}'$ está no anel compreendido entre $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$, como na figura abaixo.

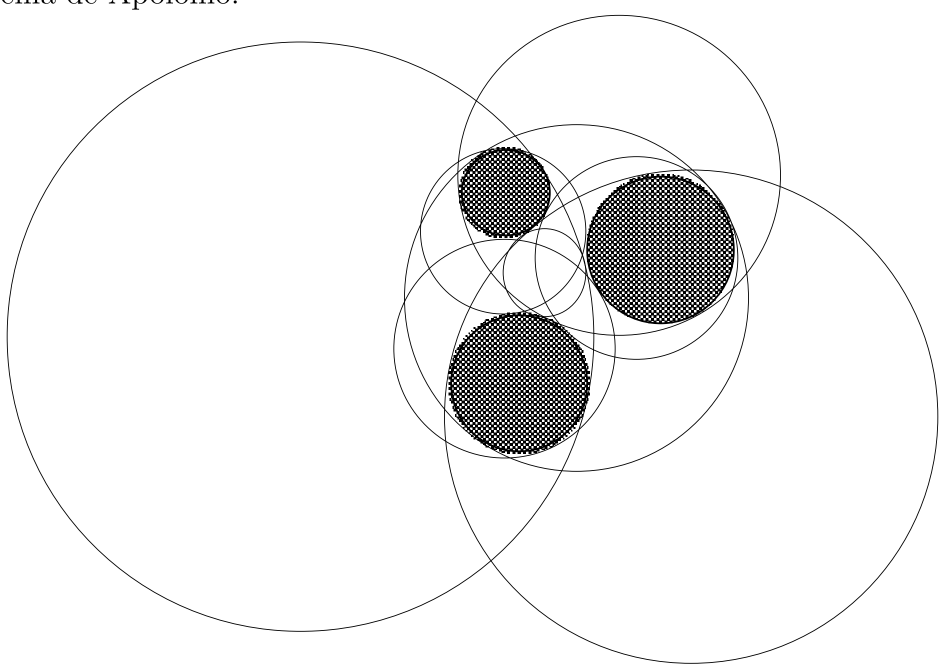


O círculo procurado $\mathcal{X}$ é invertido em $\mathcal{X}'$ que tangencia $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$; mas nesta situação o problema é simples.

Exercício 7.4 Mostre que existem exatamente oito círculos tangentes a $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$. △



Basta agora desinverter os oito círculos para obter as oito soluções do problema de Apolônio.



Este problema admite vários casos particulares, com círculos tangentes, secantes ou quando um ou mais dos círculos são retas. Deixamos para o leitor, como exercício de despedida, o prazer de analisar estes casos.

Bibliografia

[1] P. V. Araújo: **Curso de Geometria**, Coleção Trajectos Ciência, Ed. Gradiva (1998)

[2] J. L. M. Barbosa: **Geometria Euclidiana Plana**, Coleção Professor de Matemática, Ed. SBM (1994)

[3] P. S. Modenov: **Problems in Geometry**, Ed. Mir (1981)

[4] D. Pedoe: **Geometry: a comprehensive course**, Ed. Dover (1970)

[5] J. Regiomontanus: **De triangulis omnimodis** (1464). Trad. Barnabas Hughes: **Regiomontanus on triangles**, University of Winsconsin (1967)

[6] J. -V. Poncelet: **Applications d'Analyse et de Géométrie**, Tome premier, Ed. Mallet-Bachelier (1862)

[7] H. S. M. Coxeter: **Introduction to Geometry**, Ed. Wiley (1968)

[8] H. Eves: **Introdução à história da Matemática**, Ed. UNICAMP (2004)

[9] R. Maillard e A. Millet: **Géométrie**, Ed. Hachette (1945)

Índice remissivo