A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Cydara Cavedon Ripoll
UFRGS
cydara@mat.ufrgs.br

Introdução:

As caracterizações de número irracional mais encontradas nos livros didáticos para a Escola Básica são as seguintes, divididas em grupos de semelhança:

(A) "Um número é irracional se não puder ser escrito na forma a/b com $a, b \in \mathbb{Z}$ e b não-nulo".
"Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração".

(B) "Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica".
"Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não-periódico é um número irracional".

(C) "Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade".

Crítica sobre cada uma destas definições:

Tanto em (A) quanto em (B) ficam pressupostos o conhecimento da existência de outros números além do universo trabalhado até o momento pelos alunos (a saber, o de números racionais) - o que já é, no mínimo, incoerente, quando o que se quer é ampliar o conjunto dos números; fica pressuposta também a capacidade de um manejo com tais números que os permitam saber decidir se eles podem ou não ser escritos na forma de fração. Mas, mesmo que trabalhemos sob a premissa que o aluno saiba que existem outros números, temos problemas:

- em (A): alunos de oitava série responderam, num questionário aplicado pelos alunos da Licenciatura da UFRGS, que então $\sqrt{-1}$ é irracional, pois também $\sqrt{-1}$ não pode ser escrito na forma de fração. Mesmo que esta confusão não surja neste momento, ela poderá aparecer quando, mais tarde, seja abordado o assunto "Números Complexos". De fato, existem demonstrações para comprovar que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração que podem muito bem ser utilizadas para $\sqrt{-1}$, de modo que então, pelas definições colocadas em (A) concluiríamos que $\sqrt{-1}$ é irracional.
Em outras palavras:

Números imaginários não podem ser escritos na forma de fração, e nem por isso são irracionais.

E, para culminar, os autores que usam estas definições concluem definindo o conjunto dos números reais como sendo a união dos racionais com os irracionais!!!!, incluindo portanto todos os números, já que todo o número que não é racional virou um irracional pelas definições (A) acima.

- em (B) também pressupõe-se que o aluno já saiba que existem outros números além dos racionais, mas aqui é ainda pior: fala-se na expansão decimal de qualquer número, **como se qualquer número**

tivesse uma expansão decimal!!! Repetimos: mesmo que o aluno nesta altura não tenha conhecimento de números complexos, alguns anos mais tarde, após ter o conhecimento da existência destes números, ficará completa a confusão, fazendo-se a pergunta: qual a expansão decimal de $2+3i$?

Antes de fazer comentários sobre a definição em (C), fazemos outras observações:

O que os cursos de Licenciatura têm feito, em termos de formação de seus professores, em relação a este tema - números irracionais - no sentido de esclarecer as confusões que em geral existem sobre ele?

Em geral, na sua formação dentro do curso de Licenciatura, o futuro professor faz um curso de Análise na Reta ou similar, onde é feita a construção dos números reais. Mas ali $\mathbb{R}$ é construído como o *completamento de* $\mathbb{Q}$ via cortes de Dedekind ou seqüências de Cauchy, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades, e muito pouco (ou nada) é esclarecido sobre os conflitos normalmente existentes sobre este assunto. Daí, os licenciados voltam ao Ensino Básico, agora como professores, sem o devido esclarecimento sobre tal assunto, sem, por exemplo, nunca terem "feito a ponte" entre aquela construção vista em Análise na Reta e a resposta às perguntas:

Se $\sqrt{2}=1,414\,2...$ e $\sqrt{3}=1,732\,1...$ então qual é a expansão decimal do número $\sqrt{2}+5\sqrt{3}$?
Afinal, $0,999....$ é ou não igual a 1?

O objetivo do mini-curso.

Tentamos aqui propor uma abordagem precisa matematicamente, mas mais adaptada, na nossa opinião, ao conhecimento de um aluno de final de Ensino Básico e de Ensino Médio.

Aqui o assunto será apresentado como achamos que deva ser apresentado a alunos da Lienciatura, tendo em vista a precariedade de textos sobre irracionais tanto num quanto no outro nível.

Agora sim, voltamos à definição (C): inicialmente, ela também tem que ser reformulada: nenhum número negativo expressa uma medida de comprimento, de modo que, no mínimo ela deve ser reformulada para

(C') "Os números irracionais **positivos** representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade".

E é de fato com esta idéia que vamos trabalhar: tentando expressar a medida **exata** de um segmento de reta, vamos chegar à cpnstrução dos números irracionais positivos, coincidindo com a evoulução histórica.

É **imprescindível,** no entanto, a esta altura, tornar-se claro que, na prática, salvo poucas exceções (como trabalhar com $\sqrt{2}$, por exemplo), em geral trabalha-se com quantidades racionais (aproximações das quantidades reais), de modo que a discussão sobre irracionais é puramente matemática (abstrata): por exemplo, matematicamente não queremos que dois segmentos de tamanho muito parecidos mas não congruentes tenham o mesmo número expressando o seu comprimento (aqui a congruência está sendo verificada com compasso e não com régua graduada). Na prática, no entanto, provavelmente expressaremos seu comprimento pelo mesmo número (racional - digamos, com algumas casas decimais para que a aproximação seja razoável).

Revisando o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números irracionais:

- um número racional (positivo) pode ser representado por infinitas frações a/b, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

- frações decimais são aquelas cujo denominador é potência de dez. Ao discutirmos se qualquer número racional pode ser expresso por uma fração decimal, chega-se à seguinte:

Proposição 1 - *Seja a/b um número racional com $mdc(a, b) = 1$. Então: a/b pode ser representado por uma fração decimal se e só se $b = 1$ ou então $b \neq 1$ e os únicos primos que aparecem na fatoração de b são 2 e 5.*

Exemplo 1 - *7/15 é um racional que não pode ser representado por uma fração decimal.*

- a representação em fração decimal dos números racionais e as dízimas periódicas: Esta forma de representar um número racional será muito importante para a conceituação e estudo dos números reais, e nada mais é do que uma extensão, para os números racionais, da representação decimal dos números naturais (isto é, em base dez), como por exemplo,

$$3194 = 3 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0.$$

A idéia para acharmos a representação em base 10 de um número racional **positivo** representado, digamos, pela fração a/b, é a seguinte: numa primeira etapa encontramos a parte inteira de a/b : dividindo o inteiro a pelo inteiro b e admitindo resto, podemos escrever $a = kb + c$, onde k é um número natural e c é também um número natural tal que $0 \leq c < b$, e temos então

$$\frac{a}{b} = \frac{kb + c}{b} = k + \frac{c}{b},$$

sendo k um número natural e c/b uma fração maior ou igual a zero e menor do que 1, isto é, tal que $0 \leq c < b$. É claro que k pode ser representado na forma decimal, digamos

$$k = u_n u_{n-1} ... u_1 u_0.$$

Como $0 \leq c/b < 1$, é natural que, no caso em que $c/b \neq 0$, tentemos numa segunda etapa expressar c/b como uma soma de frações decimais. Mais precisamente: procuremos dígitos $a_j \in \{0, 1, ..., 9\}$, $1 \leq j \leq s$ tais que

$$\frac{c}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_s}{10^s}.$$

No caso de encontrarmos estes números, escreveremos

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = k + \frac{c}{b} &\overset{k=u_n u_{n-1}...u_1 u_0}{=} \\ &= u_n u_{n-1} ... u_1 u_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_s}{10^s}, \end{aligned}$$

e daí utilizamos a seguinte representação **posicional** para a/b :

$$\frac{a}{b} = u_n u_{n-1} ... u_1 u_0, a_1 a_2 ... a_s, \tag{1}$$

ou simplesmente

$$\frac{a}{b} = k, a_1 a_2 ... a_s,$$

onde a vírgula serve para separar a parte inteira de a/b do que chamaríamos "representação decimal" da parte menor do que 1 de a/b.

E como podemos encontrar tais dígitos $a_1, a_2 ..., a_m$, **se é que eles sempre existem**?

Inicialmente relembremos a "receita", tentando determinar a expansão decimal de 54/37:

54	| 37	54	| 37	54	| 37	54	| 37	54	| 37	...
17	1	**170**	1,	170	1,4	170	1,4	170	1,45	...
$\Vert$		$\Vert$								
r_1		$r_1 \times 10$		**22**		**220**		220		...
				$\Vert$		$\Vert$				
				r_2		$r_2 \times 10$		**35**		...
								$\Vert$		
								r_3		...
										...

Este processo pode de fato ser sempre aplicado em cada etapa, mas temos um problema: nem sempre ele acaba, isto é, o número de etapas é finito. De fato, isto acontece quando, antes de chegarmos ao resto zero, algum resto se repete, e então as sucessivas divisões vão se repetir.

Surge aí a definição de **dízima periódica:**

Definição 1 - *Uma **dízima periódica** é uma expressão da forma*

$$m, a_1 a_2 ... a_n ...$$

*onde $m \in \mathbb{N}$ e a_i é dígito para $i = 1, 2, ...$, na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco de termos (chamado **período**) com a propriedade que, a partir dele, a lista de dígitos é constituída exclusivamente pela repetição sucessiva deste bloco.*

Exemplo 2 ***e Notação* -**

$$0,444... = 0,\overline{4} \qquad\qquad 0,235747474... = 0,235\overline{74}$$

Daí, admitindo que representação finita nada mais é do que uma representação infinita periódica de período zero, consegue-se provar:

Proposição 2 - *Todo racional tem uma expansão decimal infinita periódica.*

Queremos agora levantar a seguinte questão:

> Será que, inventando qualquer período, sempre existirá algum número racional cuja expansão decimal tem exatamente este período?

Esta questão é importante, pois se não tivermos cuidado, quando queremos recuperar a fração que originou, pelo processo das divisões sucessivas, uma dada dízima periódica, podemos ser levados a um absurdo. Relembremos aqui também a regra que aparece nos livros do Ensino Básico:

Para recuperar a fração que gerou a dízima periódica da forma $0, a_1a_2...a_s\overline{c_1c_2...c_t}$ toma-se para numerador a parte não periódica seguida do período menos a parte não periódica. E, para denominador, tomamos um número de $9's$ igual ao número de dígitos do período seguido de um nú - mero de $0's$ igual ao número de dígitos da parte não periódica.

Simbolicamente:

$$0, a_1...a_s\overline{c_1...c_t} = \frac{a_1...a_sc_1...c_t - a_1...a_s}{\underbrace{99...9}_{t}\underbrace{0...0}_{s}},$$

$s =$ número de termos da parte não periódica
$t =$ número de termos da parte periódica.

Daí, se desavisadamente tomamos a "dízima" 0,2999..., aplicando a regra acima teremos:

$$0,2999... = \frac{29-2}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}, \ \ \textbf{absurdo},$$

pois a expansão decimal de $3/10$ é $0,3$ e não $0,2999...$!!!!

Voltamos então à questão levantada acima, e que agora é de extrema relevância, e, em geral, **nunca** é abordada no Ensino Básico:

1. Será que, inventando qualquer período, sempre existirá algum número racional cuja expansão decimal tem exatamente este período?
2. Existem afinal racionais cuja expansão decimal é periódica com período formado só por noves?

A resposta à segunda questão é **não** (e portanto a resposta à primeira questão é também **não).**

Teorema 1 - *O processo das divisões sucessivas **nunca** gera período formdo só por noves.*

Prova: A prova é por absurdo. Suponha que $a/b < 1$ e que, pelo processo descrito acima, tenhamos chegado, por exemplo (para não pesar demais a prova aqui), a um período de três noves:

$$\frac{a}{b} = 0, q_1...q_s999... = 0, q_1...q_s\overline{999}.$$

Isto significa que fomos gerando quocientes $q_1, ..., q_s$ e respectivos restos $r_1, ..., r_s$ e que, a partir daí, digamos, nas próximas 3 etapas, obtivemos:

$$10 \times r_s = 9 \times b + r_{s+1}, \text{ com } 0 < r_{s+1} < b$$
$$10 \times r_{s+1} = 9 \times b + r_{s+2}, \text{ com } 0 < r_{s+2} < b$$
$$10 \times r_{s+2} = 9 \times b + r_s.$$

Isto nos garante que a partir de agora o bloco de 3 quocientes iguais a 9 vai se repetir, caracterizando assim período 9 para a expansão decimal de a/b. Somando as 3 igualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned}10 \times (r_s + r_{s+1} + r_{s+2}) &= 9 \times b \times 3 + (r_{s+1} + r_{s+2} + r_s) = \\ &= 9 \times b \times 3 + (r_s + r_{s+1} + r_{s+2}),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$r_s + r_{s+1} + r_{s+2} = 3 \times b,$$

o que é absurdo, pois cada resto é estritamente menor do que b.

Assim, o processo de divisões sucessivas nunca gera período só formado por 9's. ▲

Com isso, respondemos a segunda questão acima, e, sobre a primeira, o que temos a informar é que a respota é "**sim, se o período não for formado só por noves",** e uma maneira de provar isto é fazendo uso da regra acima, que está de fato correta, já que períodos formados só por noves nunca aparecem.

Estabelecendo algumas terminologias, notações e resultados sobre a reta euclidiana:

Com um compasso e uma régua não graduada podemos estabelecer, sem a noção de medida:

- a congruência de segmentos (aqui novamente estamos fazendo uma abstração)

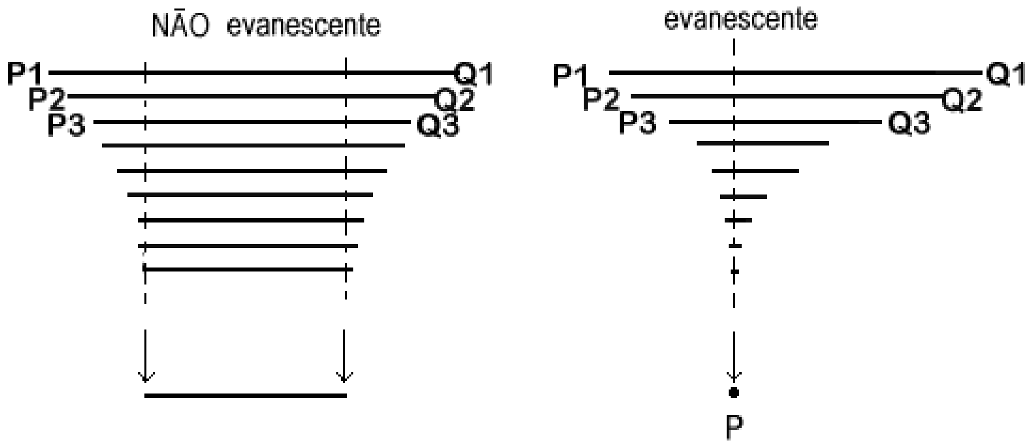
- a noção de um segmento ser menor do que outro

- a superposição de segmentos sobre uma reta

- a divisão de um segmento de reta em partes iguais (aplicação do Teorema de Tales).

- Definição: Uma seqüência (infinita) de segmentos $P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3,\ ...$ é dita *encaixante* se para cada $n \in \mathbb{N}^*$ tivermos $P_{n+1}Q_{n+1} \subseteq P_nQ_n$.

Uma seqüência encaixante de segmentos $P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3,\ ...$ é dita *evanescente* se, dado um segmento qualquer AB, com $A \neq B$, sempre pudermos encontrar um n tal que P_nQ_n é menor do que AB.



Princípio dos segmentos evanescentes:

Se $P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3,\ ...$ é *uma seqüência de segmentos evanescentes da reta euclidiana, então existe um, e somente um ponto* P *comum a todos os segmentos desta seqüência.*

A construção da régua decimal infinita.

Consideremos uma reta euclidiana r e fixemos sobre r um segmento de reta δ qualquer, com a única restrição que o mesmo não seja reduzido a um único ponto.

O segmento δ é então nossa **unidade de medida**, ou **segmento unitário.**

Denotamos por O a extremidade esquerda de δ. A contrução desta régua é feita por etapas:

♦ Em uma primeira etapa marcamos uma série de pontos de r do seguinte modo: o primeiro ponto é simplesmente o ponto extremo direito de δ. Denotamos este ponto por $P(1)$. Para marcarmos o segundo ponto, tomamos um compasso com a abertura do segmento δ (ou seja, tal que suas duas pontas coincidam com os pontos extremos de δ). A seguir colocamos a ponto seca do compasso em $P(1)$ e marcamos com a outra ponta do compasso um ponto de r à direita de $P(1)$. Denotamos este novo ponto por $P(2)$. A seguir colocamos a ponta seca do compasso em $P(2)$ e marcamos com a outra ponta um novo ponto de r, que denotaremos por $P(3)$, à direita de $P(2)$. Repetindo este processo indefinidamente, obtemos um conjunto de infinitos pontos de r:

$$O,\ P(1),\ P(2),\ P(3),\ P(4),\ ...,\ P(n),\ ...,$$

que constituem a *rede de graduação unitária da régua decimal infinita.*

♦ Numa segunda etapa colocamos no compasso uma abertura igual a um décimo do segmento unitário, e marcamos sucessivamente, à direita de O, de maneira inteiramente similar à feita para marcar os pontos da rede unitária, os pontos $P(1/10),\ P(2/10),\ P(3/10),...,\ P(10/10),\ P(11/10),...$. Ficamos, assim, com um novo conjunto infinito de pontos:

$$\begin{aligned} O,\ P(\frac{1}{10}),\ P(\frac{2}{10}),\ P(\frac{3}{10}),...,P(\frac{10}{10}) &= P(1),\\ P(\frac{11}{10}),\ P(\frac{12}{10}),\ ...,\ P(\frac{20}{10}) &= P(2),\\ P(\frac{21}{10}),\ P(\frac{22}{10}),\ ...,P(\frac{30}{10}) &= P(3)\\ &... \end{aligned}$$

ou, usando a representação decimal dos racionais:

$$\begin{aligned} O,\ P(0,1),\ P(0,2),\ P(0,3),\ ...,\ P(1,0) &= P(1),\\ P(1,1),\ P(1,2),\ ...,\ P(2,0) &= P(2),\\ P(2,1),\ P(2,2),....,P(3,0) &= P(3),\\ &... \end{aligned}$$

A este conjunto de pontos chamaremos de *rede de graduação decimal da régua decimal infinita.*

♦ Numa terceira etapa usamos o compasso com abertura um centésimo da abertura de δ e marcamos, de maneira inteiramente análoga, os pontos da **rede de graduação centesimal**:

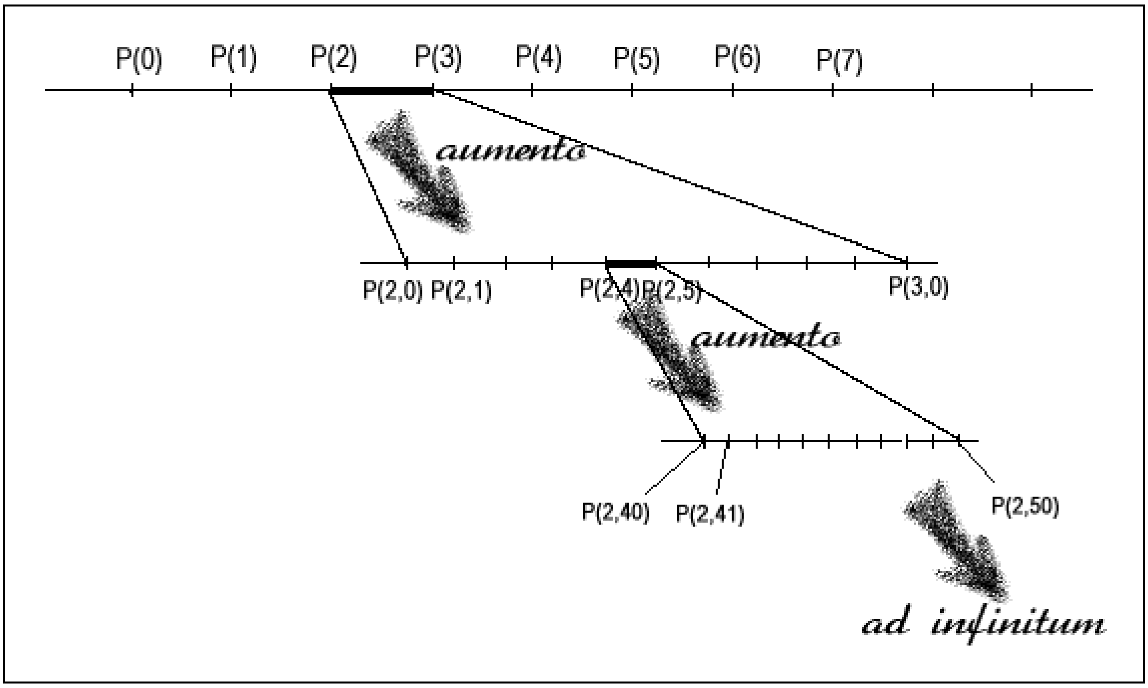
$$O,\ P(\frac{1}{100}),\ P(\frac{2}{100}),\ P(\frac{3}{100}),...,P(\frac{10}{100})=P(\frac{1}{10}),\ P(\frac{11}{100}),...,P(\frac{100}{100})=P(1),$$
$$P(\frac{101}{100}),\ P(\frac{102}{100}),\ ...,\ P(\frac{200}{100})=P(2),$$
$$P(\frac{201}{100}),\ P(\frac{202}{100}),\ ...,\ P(\frac{300}{100})=P(3),$$
$$...$$

ou, usando expansão decimal:

$$O,\ P(0,01),\ P(0,02),\ P(0,03),\ ...,\ P(1,00)=P(1),$$
$$P(1,01),\ P(1,02),\ ...,\ P(2,00)=P(2),$$
$$P(2,01),\ P(2,02),...,\ P(3,00)=P(3),$$
$$...$$

♦ E assim por diante: para cada número natural n, construímos ou marcamos os pontos da **rede de graduação** $1/10^n$ **da régua decimal**:

$$O,\ P(\frac{1}{10^n}),\ P(\frac{2}{10^n}),\ P(\frac{3}{10^n}),\ P(\frac{4}{10^n}),\ ...,\ P(\frac{10^n}{10^n})=P(1),$$
$$P(\frac{10^n+1}{10^n}),\ P(\frac{10^n+2}{10^n}),\ ...,\ P(\frac{2\times 10^n}{10^n})=P(2),$$
$$P(\frac{2\times 10^n+1}{10^n}),\ P(\frac{2\times 10^n+2}{10^n}),\ ...$$
$$...$$



⧫ A etapa final consiste em considerar o conjunto de todos esses pontos, ou equivalentemente, a união de todas essas redes, que é o que chamaremos de **régua decimal infinita de unidade de medida** δ. Note que este conjunto consta de todos os pontos (à direita de O) da forma $P(m/10^n)$.

Eles serão denominados simplesmente de **pontos graduados da reta**. O ponto O poderá, eventualmente, ser indicado por $P(0)$.

Resumindo:

> A régua decimal infinita de unidade δ consiste de O e de todos os pontos P que estão à direita de O e que satisfazem, para algum m e algum n, ambos naturais, o segmento OP é a justaposição de m cópias da 10^n-ésima parte de δ.
>
> Resumidamente: $OP = m\left(\frac{1}{10^n}\delta\right)$,
>
> ou ainda, $OP = \frac{m}{10^n}\delta$,
>
> Neste caso, este ponto P é denotado por $P\left(\frac{m}{10^n}\right)$, e portanto concluímos:
>
> $$OP\left(\frac{m}{10^n}\right) = \frac{m}{10^n}\delta.$$

Comentários:

i) Todos os pontos da rede de graduação unitária são também pontos da rede de graduação decimal.

ii) Todos os pontos da rede de graduação decimal são também pontos da rede de graduação centesimal.

iii) Em geral: todos os pontos da rede de graduação $1/10^n$ são pontos da rede de graduação $1/10^{n+1}$.

iv) Dados dois pontos consecutivos da rede de graduação $1/10^n$, existem entre eles, 9 pontos da rede de graduação $1/10^{n+1}$.

v) Em cada pedaço limitado da régua decimal infinita, digamos, entre os pontos $P(\frac{m}{10^n})$ e $P(\frac{r}{10^s})$ existem infinitas marcações, isto é, infinitos pontos graduados.

Nesta altura surge-nos a seguinte questão:

> Será que nesta reta conseguimos "rotular" todos os pontos à direita de O?

Para responder a esta questão precisamos antes falr um pouco sobre medida de segmentos.

Medindo segmentos via a Régua Decimal Infinita - 1^a parte.

Queremos, a seguir, definir a medida de um segmento de reta qualquer AB.

Notações: $\begin{cases} |AB| = \text{medida do segmento } AB. \\ \delta = \text{segmento unidade de medida: } |\delta| = 1. \end{cases}$

Propriedades naturais que queremos que sejam satisfeitas neste processo de medição:

◊ Se AB for congruente a um segmento CD então $|AB| = |CD|$.

◊ Se $A = B$, então definimos $|AB| = 0$.

◊ Se C é um ponto entre A e B então $|AB| = |AC| + |CD|$.

$\lozenge$ Se $CD \subset AB$ então $|CD| < |AB|$.

$\lozenge$ Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, temos que mAB denota m cópias de AB emendadas, de modo que é natural que estabeleçamos que $|mAB| = m|AB|$.

$\lozenge$ Mais geralmente: se AB é comensurável com CD, digamos, $mAB = nCD$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$, então $|mAB| = |nCD|$, ou ainda, $m|AB| = n|CD|$, donde

$$|CD| = \frac{m}{n}|AB|.$$

Primeiras conclusões:

1) Com estes quesitos, sabemos expressar a medida de qualquer segmento da forma OP quando P é um ponto graduado:

i) $OP(m) = m\delta \Rightarrow |OP(m)| = m|\delta| = m$

ii) $\frac{1}{10^n}\delta$ é um segmento tal que 10^n cópias dele formam δ, de modo que $|\frac{1}{10^n}\delta| = \frac{1}{10^n}$

iii) Em geral: $OP(m/10^n) = m(\frac{1}{10^n}\delta)$, de modo que

$$|OP(m/10^n)| = m|\frac{1}{10^n}\delta| = m\frac{1}{10^n} = \frac{m}{10^n}$$

2) Mas também sabemos expressar a medida de qualquer segmento da forma PQ quando P e Q são pontos graduados: $P = P(m/10^n)$ e $Q = P(r/10^s)$ e Q está à direita de P então

$$|PQ| = |OQ| - |OP| = \frac{r}{10^s} - \frac{m}{10^n}$$

Em particular, $\forall m \in \mathbb{N}$: $|P(m)P(m+1)| = 1$

$$|P(\frac{m}{10})P(\frac{m+1}{10})| = 1 \quad ... \quad |P(\frac{m}{10^n})P(\frac{m+1}{10^n})| = \frac{1}{10^n}.$$

Questão natural, já mencionada teriormente:

> Será que todos os pontos à direita de O são pontos graduados? Ou seja, será que, ao construirmos a régua decimal infinita acabamos por tornar cada ponto à direita de O um ponto pertencente a alguma rede de graduação?

Os comentários acima nos sugerem que **não,** pois todos os segmentos da forma $|OP|$ quando P é um ponto graduado são dados por frações decimais. O exemplo a seguir confirma esta resposta:

Exemplo 3 - *Divida a unidade de medida δ em três partes iguais. Seja OP a primeira terça parte. Afirmamos então que P **não é** um ponto graduado da reta, pois, se (por absurdo) P é um ponto graduado da reta, digamos, $P = P(m/10^n)$, então*

$$|OP| = \frac{m}{10^n}.$$

Por outro lado, como $3OP = \delta$, *obtemos também*

$$|OP| = \frac{1}{3},$$

de modo que

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{10^n}, \text{ ?????}$$

(1/3 não é uma fração decimal porque é irredutível e em seu denominador não aparecem exclusivamente os fatores 2 e/ou 5). $\square$

O Exemplo acima nos garante então que

Existem pontos à direita de O que não são graduados (e eles são infinitos!)

3) Dados quaisquer naturais a e b com $b \neq 0$, também já sabemos construir um segmento OP tal que

$$|OP| = \frac{a}{b},$$

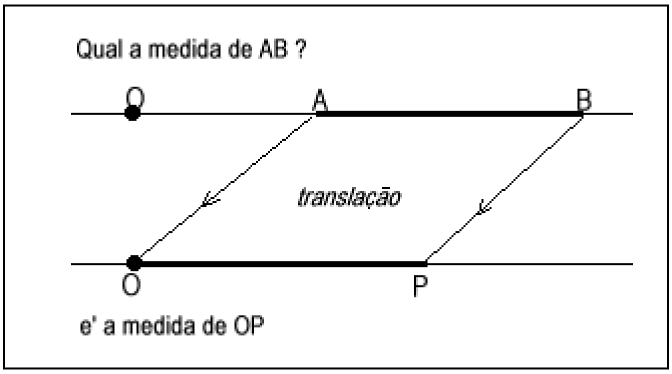
uma vez que

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = |a(\frac{1}{b}\delta)|.$$

A questão que se coloca aqui é a seguinte:

Será que com tudo o que discutimos acima, consegue-se expressar a medida de *qualquer* segmento de reta?

$\diamondsuit$ No que segue vamos considerar um segmento AB com $A \neq B$, já que, quando $A = B$, sabemos que $|AB| = 0$.



Com a ajuda do compasso, podemos transladar AB de tal forma que uma das suas extremidades coincida com a origem O da régua decimal infinita e a outra fique à direita de O.

Denotemos este segmento transladado por OP, que é então congruente ao segmento original.AB.

Assim, nosso problema agora é definir apenas medidas do tipo $|OP|$ com P um ponto da reta à direita de O. E pelas propriedades acima, vemos também que:

- não temos problema nenhum em medir segmentos da forma $|OP|$ quando P é um ponto graduado da reta: quando P é um ponto graduado da reta a medida $|OP|$ é da forma $\frac{m}{10^n}$, ou seja, uma fração decimal.

- existem pontos não graduados da reta que originam segmentos da forma OP para os quais também não temos problema nenhum em expressar sua medida. É o caso dos segmentos comensuráveis com a unidade δ, quando então chegaremos a $|OP| = \frac{a}{b}$, onde talvez esta não seja uma fração decimal.

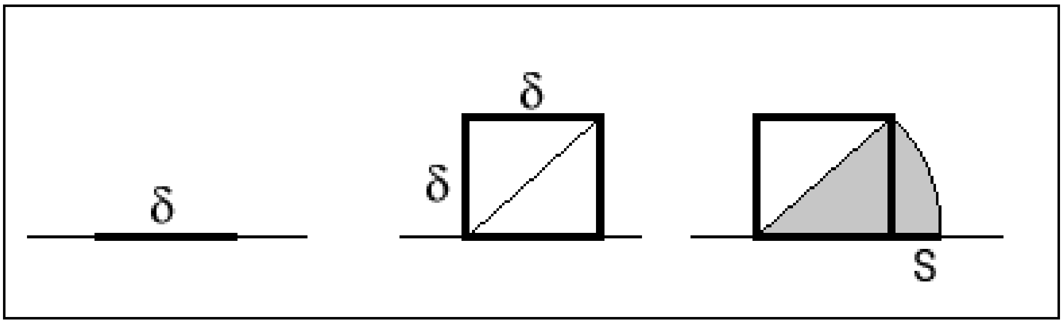
Mas neste ponto surge-nos outra questão (natural mas que representa toda a motivação para o que segue):

> Será que os racionais positivos são suficientes para medir qualquer segmento de reta? Ou seja: qualquer segmento de reta da forma OP com P à direita de O é tal que $|OP|$ pode ser expres - sa por um número racional?

A insuficiência geométrica dos racionais

Teorema 2 - *Existem segmentos de reta que não podem ser medidos através de um número racional.*

Prova: Construimos, a partir do segmento unitário δ na reta euclidiana, um quadrado no plano que tem como um dos lados o segmento δ; a seguir, com um compasso, construímos um segmento S de r que é congruente à diagonal deste quadrado.



Se o segmento S pudesse ser medido por um racional, digamos, $|S| = \frac{a}{b}$, com $a, b \in N^*$ teríamos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Isto no entanto é um absurdo, pois não existe um número racional cujo quadrado vale 2, conforme nos confirma a Proposição a seguir. $\square$

Proposição 3 - *Não existe um número racional cujo quadrado vale* 2.

Prova (por absurdo): se existe um racional $x = a/b$ (já na forma irredutível e com $a, b \in \mathbb{N}$) tal que $x^2 = 2$, então

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Chegamos a um absurdo analisando a fatoração em primos de a^2 e de $2b^2$. $\square$

Conclusão:

> Se queremos expressar a medida exata de qualquer segmento de reta através de um número, somos forçados a **expandir** nosso conjunto numérico.

Medindo segmentos via a Régua Decimal Infinita - 2ª parte.

O que desenvolvemos a seguir é um processo que serve para medir *qualquer* segmento de reta.

Seja P um ponto à direita de O. Para medirmos o segmento OP, a idéia é desdobrarmos o processo de medição em uma seqüência de etapas procurando, a cada etapa, obter uma medida aproximada do segmento, nos aproximando *pela esquerda* o mais possível do ponto P por pontos graduados de uma fixada rede da régua decimal infinita. E fazemos isto determinando pontos consecutivos desta rede que cercam P :

◇ Numa primeira etapa, determinamos inteiros consecutivos m e $m + 1$ tais que P está entre $P(m)$ e $P(m + 1)$, de modo que

$$OP(m) \subseteq OP \subset OP(m + 1).$$

Daí:

– Se P é um ponto da rede de graduação unitária (isto é, $P = P(m)$), então o processo de medição está encerrado: $|OP| = |OP(m)| = m$.

– Se P não for um ponto da rede de graduação unitária (isto é, $OP \neq OP(m)$), então

$$OP(m) \subset OP \subset OP(m + 1),$$

e neste caso, m não pode ser tomado como a medida *exata* de OP, e então podemos apenas dizer que m é uma **medida aproximada** do que imaginamos ser, naturalmente, a medida de OP, e com **erro menor do que** 1, já que, neste caso,

$$m = |OP(m)| < |OP(m)| + |P(m)P| = |OP| < |OP| + |PP(m + 1)| = |OP(m + 1)| = m + 1,$$

e portanto

$$m < |OP| < m + 1.$$

Já que, quando $P \neq P(m)$, m não pode ser tomado como a medida *exata* de OP, vamos então, neste caso, obter uma melhor aproximação para a “medida de OP”, recorrendo à rede de graduação decimal:

◇ Numa segunda etapa, verificamos quantos segmentos congruentes a $(1/10)\delta$ (que medem $1/10$ cada um) cabem, *a partir de* $P(m)$, no segmento OP (note aqui a semelhança com o processo prático de medição utilizado na Escola com régua de graduação finita). Seja a_1 tal número. Note então que $a_1 \in \{0, 1, ..., 9\}$, já que $P \in P(m)P(m+1)$ e $P(m)P(m+1)$ é um segmento de medida $1 = 10/10$. Então a_1 é um dígito tal que $P = P(m + \frac{a_1}{10})$ ou P está entre $P(m + \frac{a_1}{10})$ e $P(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10})$, donde

$$OP\left(m + \frac{a_1}{10}\right) \subseteq OP \subset OP\left(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right),$$

ou ainda,

$$OP\,(m, a_1) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{1}{10}\right).$$

Daí:

– Se acontecer que $P = P(m, a_1)$, então P é um ponto da rede de graduação decimal, e o processo de medição está encerrado: $OP = OP\,(m, a_1)$, donde $|OP| = |OP\,(m, a_1)| = m, a_1$.

– Se $P \neq P(m, a_1)$, então

$$OP(m, a_1) \subset OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{1}{10}\right),$$

e podemos no máximo dizer que m, a_1 é uma **aproximação da “medida de OP” com erro menor que** $1/10$, já que, neste caso,

$$\begin{aligned} m, a_1 &= |OP(m, a_1)| < |OP(m, a_1)| + |P(m, a_1)P| \\ &= |OP| < |OP| + |PP(m, a_1 + \frac{1}{10})| = |OP(m, a_1 + \frac{1}{10})| = m, a_1 + 1, \end{aligned}$$

e portanto

$$m, a_1 < |OP| < m, a_1 + 1.$$

♢ Para obtermos uma ainda melhor aproximação da medida de OP no caso em que $P \neq P(m, a_1)$, recorremos à rede de graduação centesimal e repetimos o mesmo raciocínio: procuramos um dígito a_2 que nos indique quantas vezes um segmento congruente a $(1/10^2)\delta$ cabe em OP *a partir de* $P(m, a_1)$, ou seja, tal que

$$OP\left(m, a_1 + \frac{a_2}{100}\right) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1 + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100}\right),$$

ou ainda, tal que

$$OP\,(m, a_1a_2) \subseteq OP \subset OP\left(m, a_1a_2 + \frac{1}{100}\right).$$

Daí:

– se $P = P(m, a_1a_2)$, então P é um ponto da rede de graduação centesimal de r, e neste caso $|OP| = m, a_1a_2$;

– se $P \neq P(m, a_1a_2)$, então m, a_1a_2 é apenas um **valor aproximado da “medida de OP” com erro menor do que** $1/10^2$.

Podemos repetir este processo quantas vezes necessário for. Mas aí nos surge naturalmente a seguinte questão:

É verdade que sempre encontraremos, após um número finito de repetições deste processo, digamos n, um racional $m, a_1 ... a_n$ tal que $P = P(m, a_1 ... a_n)$?
Ou, equivalentemente:
É verdade que qualquer ponto P à direita de O pertence a alguma rede de graduação da reta?

Ora, já sabemos pelo Exemplo 3 que a resposta à questão acima é *negativa.*

O que acontece com o processo de medição do segmento OP se o ponto P não é um ponto graduado da reta? O máximo que conseguimos, até agora foi obter valores numéricos **aproximados** para o que seria a medida de OP com erro arbitrariamente pequeno.

Salientamos que *na prática,* este método é suficiente.

No entanto sabemos que, matematicamente falando**,** no caso em que P não é um ponto graduado, o número $m, a_1, ..., a_n$ jamais poderá ser tomado como a medida *exata* de OP pois, como $P \neq P(m, a_1 ... a_n)$, o erro cometido na aproximação da medida de OP jamais será *exatamente* zero. O "erro zero" só será obtido "quando n for *infinito***".**

Conclusão:

Para obtermos a *medida exata* de OP, no caso em que P não é um ponto graduado da reta, não podemos nos contentar em considerar como expressão exata da medida de OP nenhuma "lista finita" do tipo $m, a_1 a_2 ... a_n$; passamos então a considerar, como expressão exata desta medida, a lista *completa*, portanto *infinita*, $m, a_1 a_2 ... a_k ...$, que está significando um processo de medição que não tem fim.

Esta maneira de expressar a medida exata de um segmento vai nos permitir encaminhar de forma inteiramente satisfatória o problema da medição de um segmento qualquer de reta:

Definição: a medida exata de um segmento é expressa por uma lista da forma $|OP| = m, a_1 a_2 ...$onde $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, ...$ são dígitos, com o seguinte significado: para cada n, o racional $m, a_1 ... a_n$ é uma aproximação da medida de OP com erro menor do que $1/10^n$.

Resumindo tudo o que fizemos até agora:

Dado um segmento de reta AB, o processo de obtenção da medida de AB via régua decimal infinita associa a AB :
i) o número 0 se $A = B$,
ii) uma lista finita da forma $m, a_1 a_2 ... a_n$, com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n$ dígitos, no caso de AB ser con-congruente a um segmento OP sendo P um ponto graduado da reta diferente de O,
ii) uma lista infinita da forma $m, a_1 a_2 ....$, com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n, ...$ dígitos, no caso de AB ser congruente a um segmento OP sendo P um ponto não graduado da reta.

Com esta definição, antes de chamarmos tais listas de números, surgem ainda várias questões, as duas primeiras relativas a checar se tudo o ue fizemos até agora é “coerente”:

Questão 1: Já aprendemos a, dados quaisquer naturais a e b com $b \neq 0$, construir um segmento OP tal que $|OP| = \frac{a}{b}$, a saber: $OP = a(\frac{1}{b}\delta)$. A questão que podemos nos colocar é:
Que lista obtemos ao aplicarmos o processo acima a este ponto P? O quê tal lista tem a ver com o número racional a/b?

Afirmamos que o processo de medida de qualquer segmento de reta através da régua decimal infinita que descrevemos acima, para o caso de um segmento da forma $a(\frac{1}{b}\delta)$, nada mais é do que a tradução geométrica do processo de determinação da expansão decimal do número racional a/b. Portanto, quando $OP = a(\frac{1}{b}\delta)$ podemos escrever

$$|OP| = m, a_1a_2... = \frac{a}{b},$$

sem ambigüidade de interpretação.

Questão 2: E sobre o problema inverso: suponha que a lista obtida através do processo de medição de um segmento via régua decimal infinita seja igual à lista que representa a expansão decimal de um racional. Podemos então dizer que este racional é a medida deste segmento?

A resposta é sim. Mais precisamente:

Teorema 3 - *Se pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento OP obtivemos uma lista finita ou infinita periódica de período não composto só por 9's, e se p/q é o racional cuja expansão decimal é dada por esta mesma lista. Então*

$$OP = \frac{p}{q}\delta,$$

e portanto

$$|OP| = \frac{p}{q}$$

É importante salientar que o resultado acima se verifica porque, no método da régua decimal infinita, escolhemos subdividir o segmento unitário δ em potências de dez.

Conseqüência das duas considerações acima:

Vimos que existem segmentos cuja medida exata não pode ser expressa por um racional, e vimos agora que se a lista for finita ou periódica então a medida do segmento é racional. Concluímos:

Se um segmento não tem medida racional a lista que expressa sua medida não é finita nem periódica, e portanto existem listas infinitas e não periódicas expressando medida de segmentos !

Assim, para que possamos medir de maneira exata *todos* os segmentos de reta através da régua decimal infinita, não nos resta outra alternativa a não ser a de ampliar nosso conceito de número, incluindo neste conceito listas do tipo $m, a_1a_2...$ com $m \in \mathbb{N}$ e a_i dígito, para todo i, e que não provêm da expansão decimal de nenhum racional (portanto infinitas e não periódicas).

No entanto, surgem aqui ainda duas questões fundamentais que devem ser ressaltadas e discutidas antes de adotarmos definitivamente esta estratégia:

Questão 3: Será que qualquer lista $m, a_1a_2...$, com $m \in N$ e a_i dígitos, representa sempre a medida de algum segmento de reta?

Questão 4: Não poderia uma situação análoga à que ocorre com os racionais, a saber, existem frações distintas representando a mesma quantidade e, portanto, determinando um mesmo número racional, ocorrer com as listas acima definidas, ou seja, não podem duas listas distintas estar representando uma mesma medida?

Começamos discutindo a Questão 3: Consideremos inicialmente uma lista infinita

$$x = m, a_1a_2...a_n...$$

Se existir um ponto P à direita de O tal que $|OP| = m, a_1a_2...a_n...$ então ele deverá pertencer a cada um dos segmentos

$$\begin{aligned}
&P(m)P(m+1),\ P(m, a_1)P(m, a_1 + \frac{1}{10}),\\
&P(m, a_1a_2)P(m, a_1a_2 + \frac{1}{100}),\\
&...,\\
&P(m, a_1a_2...a_n)P(m, a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n}), \quad .....
\end{aligned}$$

de modo que, para tal ponto ter a chance de existir, deveria pelo menos existir um ponto comum a todos os segmentos listados acima. E, de fato, a seqüência de segmentos acima é encaixante e evanescente; logo, pelo Postulado dos Segmentos Evanescentes, existe um único ponto Q comum a todos os seus segmentos. Assim, se existir um ponto P à direita de O tal que $|OP| = m, a_1a_2...a_n...$, então necessariamente ele terá que ser igual a este ponto Q. Tentemos então determinar, via régua decimal infinita, a lista que expressa o comprimento do segmento OQ :

1^o*caso* : a lista não tem período só formado por 9's. Neste caso não é muito difícil se convencer que a lista obtida, via régua decimal infinita, para medir o segmento OQ, sendo Q o ponto acima construído, é precisamente a lista $m, a_1a_2...$.

2^o*caso* : a lista é periódica de período só formado por 9's. Neste caso afirmamos que sabemos até dizer quem é o ponto Q. Vamos aqui fazer dois exemplos para apenas dar a idéia do argumento:

Exemplo 4 - *Consideremos a lista infinita* $12, 344999....$ *A tal lista associamos a seguinte seqüência de segmentos evanescentes:*

$$\begin{aligned}
&P(12)P(13),\\
&...,\\
&P(12, 344)P(12, 345),\\
&P(12, 3449)P(12, 345),\\
&P(12, 34499)P(12, 345), \quad .....,
\end{aligned}$$

que tem o ponto $P(12, 345)$ *presente em todos os seus segmentos de modo que, como estes são evanescentes,* $P(12, 345)$ *é o* ***único*** *ponto comum a todos estes segmentos.*

Mas $P(12,345)$ é um ponto graduado, e então, pelo método da régua decimal infinita, já conhecíamos a lista que expressa sua medida, a saber, a lista finita $12,345$, *que obviamente, em termos de lista, não é igual a* $12,344999...$.

Exemplo 5 - *E se a lista infinita for da forma* $12,999...$*? A tal lista associamos a seguinte seqüência de segmentos evanescentes:*

$$\begin{array}{l} P(12)P(13), \\ P(12,9)P(13), \\ P(12,99)P(13), \\ P(12,999)P(13), \\ P(12,9999)P(13), \qquad ....., \end{array}$$

que tem o ponto $P(13)$ presente em todos os segmentos acima de modo que, como estes são evanescentes, $P(13)$ é o ***único*** *ponto comum a todos estes segmentos. Mas $P(13)$ é um ponto graduado, e então, pelo método da régua decimal infinita, já conhecíamos a lista que expressa sua medida, a saber, a lista finita* 13 *ou* $13,000...$ *que obviamente, em termos de lista, não é igual a* $12,344999...$.

Conclusão: Todas as possíveis listas da forma $m, a_1a_2...$ com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, ...$ dígitos, *com exceção das listas* periódicas de período formado só por $9'$s expressam a medida de algum segmento da forma OP com P um ponto à direita de O.

Assim, se nosso problema é aumentar o conjunto numérico exclusivamente para conseguirmos expressar a medida exata de qualquer segmento, vemos que precisamos incluir as listas da forma $m, a_1a_2...$ com $m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, ...$ dígitos, *que não são* periódicas de período formado só por $9'$s.

A situação acima é um tanto antipática: melhor seria se todas as listas pudessem expressar uma quantidade numérica. O raciocínio desenvolvido no 2^o*caso* acima nos indica que, se quisermos dar um sentido numérico para listas periódicas de período formado só por 9's, um bom candidato para a lista $m, a_1a_2...a_s999...$ com $a_s \neq 9$ é

$$m, a_1a_2...a_s999... = m, a_1a_2...a_{s-1}b000...,$$

onde $b = a_s + 1$, enquanto que um bom candidato para a lista $m, 999...$ é o número $m + 1$ (ou seja, $b, 000...$, onde $b = m + 1$).

Definição 2 - *Dizemos que uma lista $m, a_1a_2...a_s999...$ com $a_s \neq 9$ expressa a mesma quantidade numérica que a lista $m, a_1a_2...a_{s-1}b000...$, onde $b = a_s + 1$, a saber, a medida do segmento $OP(m, a_1a_2...a_{s-1}b)$, enquanto que uma lista da forma $m, 999...$ expressa a mesma quantidade numérica que a lista $b, 000...$, onde $b = m + 1$.*

Concluímos que as listas $12,344999...$, $12,345000...$ e $12,345$ expressam todas a medida de um mesmo segmento de reta.

Passemos agora à Questão 4 levantada acima: podem duas listas distintas estar representando uma mesma medida? Agora a resposta é evidente: *Sim*, pela definição acima.

Reformulamos então nossa questão:

Questão 4': Será que se duas listas distintas expressarem a medida de um mesmo segmento de reta então necessariamente uma delas é periódica de período só formado por 9's? A resposta é *sim*, e a regra é seguinte:

Lema 1 - *Sejam $c, a_1a_2...$ e $d, b_1b_2...$ duas listas distintas, e sejam P_1, P_2 pontos à direita de O tais que $|OP_1| = c, a_1a_2...$e $|OP_2| = d, b_1b_2....$ Então $P_1 = P_2$ (isto é, as listas medem o mesmo segmento) $\Leftrightarrow$ as listas $c, a_1a_2...$ e $d, b_1b_2...$ se enquadram em algum dos seguintes casos:*

i) existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que elas coincidem até a posição n e, a partir daí, digamos, se $a_{n+1} < b_{n+1}$, então

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 1 + a_{n+1}, \\ 9 &= a_{n+2} = a_{n+3} = ... \\ 0 &= b_{n+2} = b_{n+3} = ... \ . \end{aligned}$$

ii) se $c \neq d$, digamos, $c < d$ então

$$d = 1 + c$$

e, para todo i,

$$\begin{aligned} a_i &= 9 \\ b_i &= 0 \end{aligned}$$

Corolário 1 - *Um segmento OP admite duas listas distintas para sua medida se, e somente se, P é um ponto graduado.*

Conclusões:

Todo segmento de reta pode ser medido por uma lista infinita $m, a_1a_2...$, onde m é um número natural e $a_1, a_2, ...$ são dígitos. Reciprocamente, toda lista $m, a_1a_2...$ é medida de algum segmento de reta. Além disso, um segmento admite duas listas distintas expressando sua medida se e sómente se é congruente a um segmento OP sendo P um ponto graduado.

Agora sim podemos ampliar o conceito de número, considerando também como números tais listas infinitas, criando assim os chamados *reais absolutos,* mas mediante a condição de igualdade explicitada:

Definição 3 - *O conjunto dos* ***números reais absolutos*** *é o conjunto de todas as listas infinitas $m, a_1a_2...$, onde $m \in \mathbb{N}$ e a_i é dígito, para $i = 1, 2, ...$, submetidas ao seguinte critério de igualdade: $m_1, a_1a_2... = m_2, b_1b_2.... \Leftrightarrow$ ambas as listas medem um mesmo segmento da reta euclidiana.*

Com isso, o conjunto dos números reais absolutos inclui todos os números racionais positivos (as listas periódicas). As listas não periódicas são chamadas de *números irracionais absolutos.* Continuamos a denominar qualquer lista que represente um real absoluto x de *expansão decimal de x.*

Afinal, $0,999...$ é ou não igual a $1,000...$ **?**

Os números reais absolutos são listas do tipo $m, a_1a_2...$, onde m é um inteiro não negativo e os a_i são dígitos, para $i = 1, 2, ...$ É essencial que sempre tenhamos em mente que:

· eles estão associados ao processo de medição de segmentos da reta euclidiana;

· dois deles só são iguais se estiverem medindo um mesmo segmento de reta. É devido a isso que escrevemos coisas como:

$$1,0000... = 0,9999....$$

· se $x = m, a_1a_2a_3...$, então x expressa uma quantidade tal que

$$m \leq x \leq m + 1,$$
$$m, a_1 \leq x \leq m, a_1 + \tfrac{1}{10},...$$

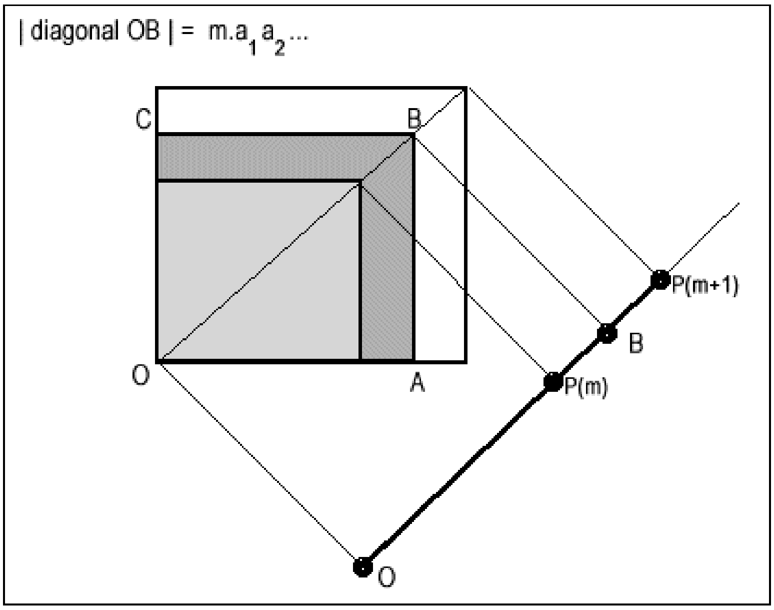
(note que agora $<$ foi substituído por $\leq$ por causa da lista periódica de período formado só do só por 9's).

Resolvemos assim, de maneira completa, o problema de medição de segmentos de reta (sem precisar criar outros números negativos!!).

Passamos gora a computar efetivamente a expansão decimal de um irracional:

Estimando a diagonal do quadrado de lado 1:

Suponhamos que $d = m, a_1a_2...$mede a diagonal OB do quadrado de lado 1. Observamos então que o natural m mede um segmento menor do que OB, enquanto que $m + 1$ mede um segmento maior do que OB.



Por Pitágoras, $m^2 \leq 2 \leq (m + 1)^2$. Sendo m um natural, a única pos - sibilidade para m é $m = 1$. Da mesma forma, a_1 deve ser um dígito tal que $(1, a_1)^2 \leq 2 \leq (1, a_1 + \frac{1}{10})^2$. Como existem no máximo 10 pos - sibilidades para o valor de a_1, de - pois de no máximo dez tentativas iremos descobrir que $a_1 = 4$ (pois $(1, 4)^2 = 1, 96$, enquanto que $(1, 5)^2 = 2, 25$). Concluímos assim que $d = 1, 4...$.

Para determinarmos a_2 vemos que

$$(1, 4a_2)^2 \leq 2 \leq (1, 4a_2 + \frac{1}{100})^2,$$

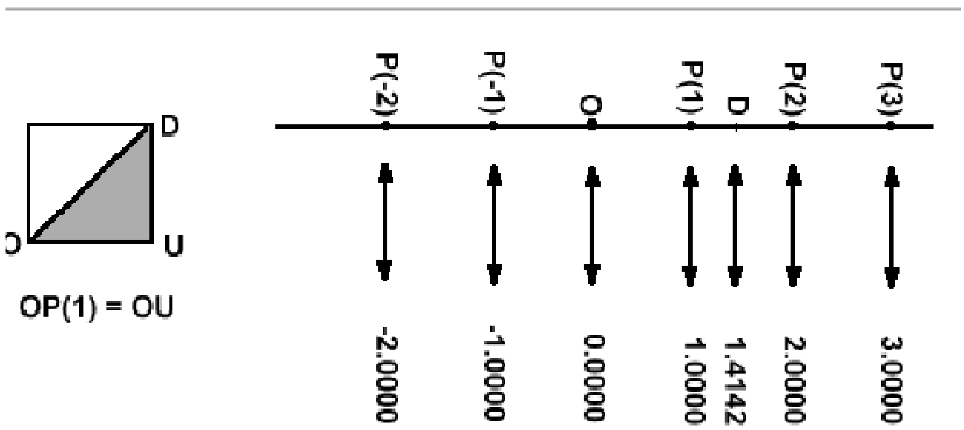
donde podemos concluir que $a_2 = 1$. Assim, $d = 1, 41...$. Procedendo desta forma mais vezes, podemos obter aproximações racionais de d tão acuradas quanto quisermos.

Operando com números reais

Não vamos aqui abordar a construção dos reais negativos, quando então os reais absolutos recebem a nomenclatura mais usual de **reais positivos.** Uma vez construído $\mathbb{R}$, prov-se o

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Geometria Analítica) - *A correspondência que associa a cada ponto de um eixo euclidano r a coordenada deste ponto é uma correspondência biunívoca entre r e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.*

O teorema Fundamental da Geometria Analítica nos dá assim uma **visualização geométrica** para o conjunto $\mathbb{R}$, comumente chamada de **reta real ou eixo real**:



Com a noção de relação de ordem entre números reais e de intervalo fechado, pode-se obter a tradução numérica do Princípio dos Segmentos Evanescentes:

Teorema 5 (*O Teorema dos Intervalos Encaixantes*) - *Seja $[x_n, y_n]$ com $n \in \mathbb{N}$ uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes. Então existe um único número real x pertencente a todos os intervalos da seqüência, isto é, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [x_n, y_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A adição de reais positivos.

Vamos utilizar a representação decimal dos reais positivos para definir, de maneira natural, a adição entre os mesmos. Note que em alguns casos é bastante difícil descrever qual o resultado esperado. Vamos proceder usando as apro-ximações por racionais dos reais a serem somados e reduzindo a definição de adição dos reais à familiar adição de racionais:

Sejam x, y reais positivos cujas expansões decimais têm a forma $x = m, a_1a_2...$ e $y = l, b_1b_2....$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos os racionais dados por

$$\begin{array}{lcl} z_n = m, a_1a_2...a_n & & u_n = l, b_1b_2...b_n \\ w_n = m, a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n} & \text{e} & v_n = l, b_1b_2...b_n + \frac{1}{10^n} \end{array}$$

Então sabemos que, para todo n,

$$\begin{cases} z_n \leq x \leq w_n \\ u_n \leq y \leq v_n \end{cases} ;$$

mais até: para cada n,

$$\begin{cases} z_n \leq z_{n+1} \leq x \leq w_{n+1} \leq w_n \\ u_n \leq u_{n+1} \leq y \leq v_{n+1} \leq v_n \end{cases}$$

Ora, z_n, w_n, u_n, v_n são todos racionais, e portanto já sabemos somá-los. Levando em conta que queremos definir a adição de números reais de uma tal forma que as propriedades válidas para adição de racionais continuem válidas para números reais, gostaríamos, em particular, de definir $x + y$ de tal forma que seja verdadeira a implicação

$$z_n \leq x \leq w_n \quad e \quad u_n \leq y \leq v_n \Rightarrow u_n + z_n \leq x + y \leq w_n + v_n.$$

Ora, se $x + y$ fosse definido de forma a satisfazer esta implicação, então ele deveria pertencer a todos os intervalos $[z_n + u_n, w_n + v_n]$. Temos aí portanto uma dica de como definir tal número: se a seqüência de intervalos $[z_n + u_n, w_n + v_n]$ for encaixante e evanescente (o que de fato acontece), então podemos definir $x + y$ como sendo o único número real pertencente a todos estes intervalos (e cuja existência e unicidade está garantida pelo Teorema dos Intervalos Evanescentes). Note que, ao definirmos desta maneira, teremos automaticamente a propriedade chamada **compatibilidade da ordem com a adição** sendo satisfeita também pelos números reais positivos.

Definição 4 - *Dados dois reais positivos* $x = m, a_1a_2...$ *e* $y = l, b_1b_2....$, *consideramos, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *os racionais* $z_n = m, a_1a_2...a_n$, $w_n = m, a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n}$, $u_n = l, b_1b_2...b_n$ *e* $v_n = l, b_1b_2...b_n + \frac{1}{10^n}$. *O número real* $x + y$ *é o único número real comum a todos os intervalos da seqüência de intervalos* $[z_n + u_n, w_n + v_n]$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

O procedimento que usamos acima para definir a soma dos reais positivos x e y não nos diz explicitamente como é a expansão decimal de $x + y$ em termos das expansões decimais de x e de y, mas nos fornece aproxi-mações racionais de $x + y$ tão boas quanto se queira mas - **atenção!** - com erro menor ou igual a $2/10^n$, e não $1/10^n$.

Exemplo: Determinemos uma aproximação racional para $x + y$, com uma precisão maior do que $1/10^5$, (isto é, com um erro menor do que $1/10^5$), sabendo que x é da forma $x = 2,79323189...$ e y é da forma $y = 13,83852153...$. Temos

$$2,793231 \leq x \leq 2,793232$$
$$13,838521 \leq y \leq 13,838522,$$

donde

$$16,632752 = 2,793231 + 13,838521 \leq x + y \leq 2,793232 + 13,838522 = 16,632754,$$

donde concluímos que $16,632752 \simeq x$, com erro $\leq 2/10^6 < 1/10^5$.

Operação de multiplicação de reais positivos:

Sejam $x = m, a_1a_2...$ e $y = l, b_1b_2....$ dois reais positivos; para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos os racionais

$$z_n = m, a_1a_2...a_n, \qquad w_n = m, a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n}, \qquad u_n = l, b_1b_2...b_n, \qquad v_n = l, b_1b_2...b_n + \frac{1}{10^n}.$$

Então, das propriedades dos racionais, afirmamos que podemos deduzir que $z_n.u_n \leq w_n.v_n$, e mais até:

$$\begin{aligned}
w_n.v_n - z_n.u_n &\leq (z_n + \tfrac{1}{10^n})(u_n + \tfrac{1}{10^n}) - z_n.u_n \\
&= \tfrac{1}{10^n}(u_n + z_n) + \tfrac{1}{10^{2n}} \\
&\leq \tfrac{1}{10^n}(v_0 + w_0) + \tfrac{1}{10^{2n}} \\
&= \tfrac{1}{10^n}(z_0 + u_0 + \tfrac{2}{10^n}) + \tfrac{1}{10^{2n}} \\
&= \tfrac{1}{10^n}(z_0 + u_0) + \tfrac{3}{10^{2n}}.
\end{aligned}$$

Daí concluímos que os intervalos $[z_n u_n, w_n v_n]$ formam uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes, e portanto existe um único real comum a todos estes intervalos.

Definição 5 - *Dados dois reais positivos* $x = m, a_1 a_2...$ *e* $y = l, b_1 b_2....$, *consideramos, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *os racionais*

$$z_n = m, a_1 a_2 ... a_n, \qquad w_n = m, a_1 a_2 ... a_n + \frac{1}{10^n}, \qquad u_n = l, b_1 b_2 ... b_n, \qquad v_n = l, b_1 b_2 ... b_n + \frac{1}{10^n}.$$

O produto de x *por* y *é o único número real comum a todos os intervalos da seqüência de intervalos* $[z_n u_n, w_n v_n]$ *com* $n \in \mathbb{N}$, *e é denotado por* xy.

Exemplo: Calculemos xy, com uma precisão de duas casas decimais, sabendo que $x = \sqrt{2} = 1,4142...$ e $y = 3,01001....$ Temos

$$1,4142 \leq x \leq 1,4143 \quad \text{e} \quad 3,0100 \leq y \leq 3,0101$$

Daí:

$$4,256742 = 1,4142 \times 3,0100 \leq xy \leq 1,4143 \times 3,0101 = 4,25918443,$$

o que nos permite afirmar que $x \simeq 4,25...$.

Observação: Note que a resolução acima não nos diz se xy é racional ou irracional. De fato, salientamos que o método acima de determinar aproximações para um número real não resolve *qualquer* questão sobre operações com números reais.

Bibliografia:

Ripoll, J.B. - Ripoll, C.C. - Silveira, J.F.P. *Números Racionais, Reais e Complexos* - Apostila do Instituto de Matemática UFRGS, 2004.