Informática e Jogos no Ensino da Matemática

Ermínia de Lourdes Campello Fanti **(fanti@mat.ibilce.unesp.br)**[1]
Aparecida Francisco da Silva **(afsilva@mat.ibilce.unesp.br)**[1]

Introdução:

O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as.

Um outro recurso que pode ser usado nesse mesmo sentido é o de jogos, que permite a formulação de problemas a partir de situações desafiadoras.

Tanto usando a informática como os jogos, a participação dos alunos sobre o seu saber é valorizada por pelo menos dois motivos. Um deles deve-se ao fato de oferecer uma oportunidade para o aluno estabelecer uma relação positiva com a aquisição do conhecimento, pois conhecer passa a ser percebido como real possibilidade. Outro motivo que justifica valorizar a participação do sujeito na construção do seu próprio saber é a possibilidade de desenvolver seu raciocínio.

Associar jogos e informática pode tornar certos conceitos bem mais claros e atrativos, sendo grande a variedade de temas do ensino fundamental e médio que podem ser explorados com tais recursos, com destaque principalmente aos de geometria. Além de ser uma atividade prazerosa e criativa, o uso de informática e jogos permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, bem como de organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado de Matemática e para resolução de problemas em geral. Nesse sentido, George Polya (Universidade Stanford, 01/08/1944) diz "*Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O Problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter*".

Ao escrever estas notas não tivemos como objetivo apresentar o conteúdo do minicurso como uma proposta fechada para ser trabalhada com os alunos, mas como sugestões que podem, e devem ser adaptadas a cada situação de ensino e aprendizagem, e a maioria já foi utilizada por um grupo de professores da rede oficial do estado (região de São José do Rio Preto-SP). Mais especificamente, este material é baseado em um curso que ministramos para professores do ensino fundamental e médio (em programa de formação continuada) e é uma versão mais abrangente do trabalho [2] que apresentamos durante o XXVI CNMAC, na sessão dedicada aos professores.

O trabalho é permeado com atividades com o software Cabri-Géomètre II, associadas a jogos/quebra-cabeças. Nos preocupamos também em apresentar um trabalho que seja acessível para quem não tem familiaridade com o software.

O Software Cabri-Géomètre II é um programa interativo desenvolvido por Jean Marie Laborde e Frank Bellemain no Instituto d'Informatiquée e Mathématiques Appliquées de Grenoble da Université Joseph Fourier de Grenoble na França, compatível com o Windows.

A escolha do software Cabri-Géometrè para o desenvolvimento deste trabalho deve-se ao fato que com o Cabri podemos construir e identificar figuras geométricas, dispondo de comandos simples e de fácil manuseio. Além disso, esse software em geral está disponível nas escolas públicas paulistas com as quais temos trabalhado.

[1] Universidade Estadual Paulista -UNESP-IBILCE/SJRP- SP, Departamento de Matemática.
Trabalho desenvolvido com apoio parcial da *Fundunesp*

Particularmente desenvolveremos neste minicurso os seguintes tópicos:

1) *Noções básicas do Cabri.*
2) *O uso do Cabri na visualização e interpretação de movimentos rígidos no plano: reflexão/simetria axial, simetria central, translação e rotação, e pavimentação do plano.*
3) *Poliminós e o Cabri*
4) *Tangram e o Cabri.*

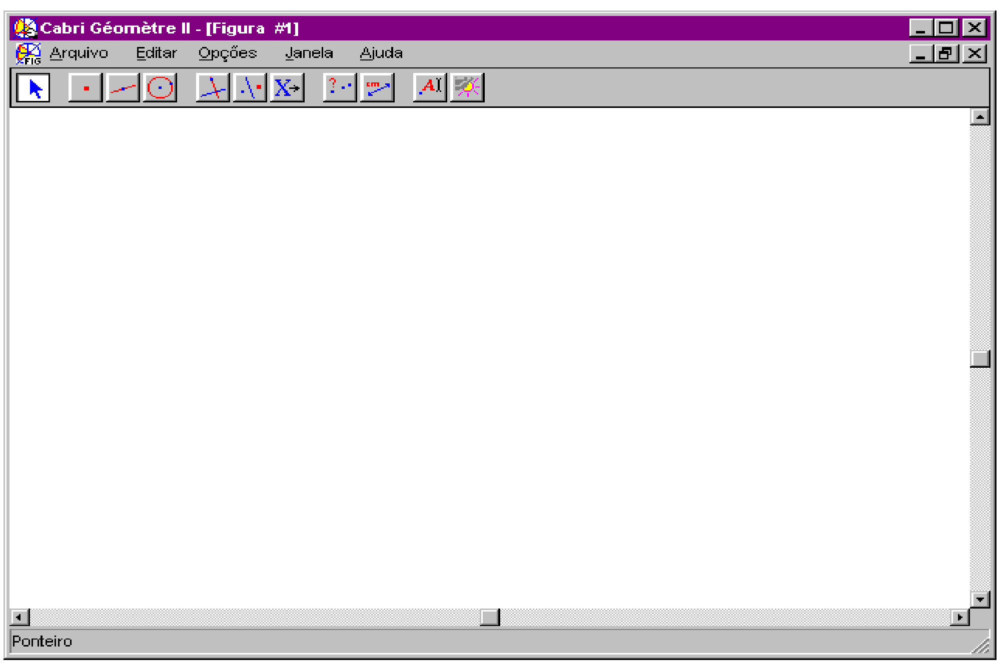
É interessante observar que os conceitos de simetria, rotação e translação, podem ser naturalmente explorados na construção das peças pelo Cabri e, durante o desenvolvimento dos jogos e soluções dos desafios.

Para finalizar gostaríamos de destacar que muito se tem desenvolvido sobre informática e jogos no ensino da matemática, havendo já uma grande gama de material disponível sobre o assunto. Vários softwares/programas tem sido criados, embora nem sempre os mesmos sejam acessíveis às escolas. Uma forma de se obter grande número informações de *sites*/softwares/jogos relacionados a um determinado assunto é utilizarmos um *site* (de busca), por exemplo, http://www.google.com.br/ e em seguida digitarmos o assunto de interesse. Certamente encontraremos alguns endereços que podem nos auxiliar na implantação de um trabalho em sala de aula.

Acreditamos, no entanto, que para utilizarmos recursos de jogos e de informática na Matemática é fundamental a *criatividade* e *interesse* dos professores e alunos. Além disso, para utilizá-los, o professor precisa planejar em que momentos devem ser introduzidos como instrumento pedagógico na abordagem de um determinado conteúdo e como isso se dará.

1) Noções Básicas do Cabri.

Ao abrir a área de trabalho do Cabri, nos deparamos com uma página (tela de trabalho) como a que segue abaixo. Nesta página, podemos notar a presença de uma *barra de menus* (arquivo, editar, opções, janela, ajuda) e um pouco abaixo uma *barra de ferramentas*, ferramentas estas que permitem a geração de construções.



A barra de ferramentas é composta de 11 *caixas* de ferramentas, cada uma delas é indicada por um *quadradinho* com uma figura, e é composta de várias ferramentas. Para ter acesso a uma das ferramentas (comandos ou opções) dentro de uma caixa de ferramentas, mantenha o botão esquerdo do mouse pressionado sobre a caixa de ferramenta (quadradinho) e vá deslizando para baixo até à ferramenta de interesse. Para fins didáticos enumeraremos as caixas de ferramentas de 1 a 11 (da esquerda para a direita). Mostramos abaixo as ferramentas/comandos de cada caixa:

n^{o}. 1

n^{o} 2

n ^{o}. 3

n ^{o}. 4

n ^{0} . 5

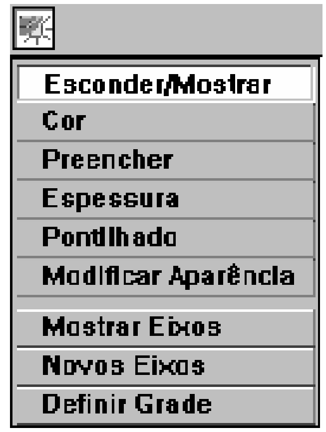
n ^{0} . 6

n ^{0} . 7

n ^{0} . 8

n^{0}. 9

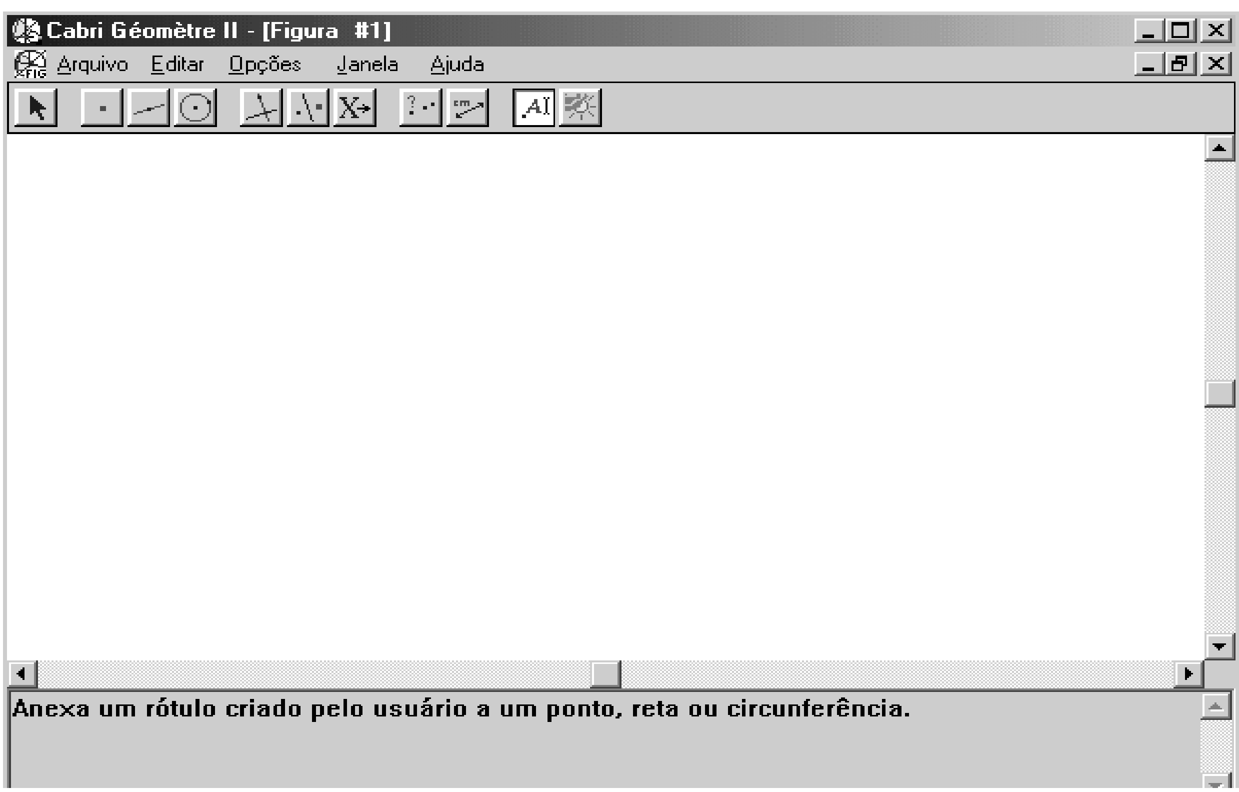
n^{0}. 10



Clicando em ***ajuda*** na barra de menus podemos obter a descrição dos comandos de todas as ferramentas das caixas de ferramentas. Assim por exemplo ao clicarmos com o mouse em ***ajuda*** (e com o mouse pressionado, selecionarmos a opção ***ajuda***) e em seguida em ***rótulo*** (que é uma das ferramentas dentro da penúltima caixa de ferramentas, a saber, a n^{o}. 10), obtemos ao final da tela de trabalho a informação:

"anexa um rótulo criado pelo usuário a um ponto, reta ou circunferência"

como mostrado na figura seguinte.



Motivados por essa facilidade, não descreveremos aqui cada ferramenta.

2) O uso do Cabri na visualização e interpretação de movimentos rígidos no plano: reflexão/simetria axial, simetria central, translação e rotação, e pavimentação do plano.

Nosso objetivo nesta seção é estudar as transformações no plano que quando aplicadas a figuras não alteram as suas medidas, ou seja, transformações que associam figuras congruentes. Mais precisamente, as ditas *transformações isométricas ou movimentos rígidos no plano*: as simetrias axial e central, translação, rotação e suas compostas. A abordagem que adotaremos aqui será mais intuitiva, não tendo a intenção de ser completa e rigorosa, e é baseada em construções geométricas utilizando o software Cabri, que dispõe de ferramentas específicas para a *simetria axial*, *simetria central, translação* e *rotação*. Para um tratamento mais completo do assunto sugerimos [4] ou [7]. Estas transformações podem ser estendidas para o espaço. No entanto, não as trataremos aqui.

Segundo os PCNs (1997) o estudo das *transformações isométricas* (transformações no plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. Desse modo transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. Duas figuras congruentes (no plano) podem ser imaginadas perfeitamente sobrepostas. Note que figuras congruentes não são necessariamente iguais, pois não ocupam o mesmo lugar no plano (não possuem os mesmos pontos).

As transformações sejam elas espaciais ou no plano, estão bastante presentes em nosso cotidiano. Observando um pouco, nota-se que em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria (de reflexão) e, em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. Por exemplo, no corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria, e a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como em desenhos de carros, aeronaves, igrejas, edifícios, móveis, etc.

As simetrias centrais e de rotação surgem em diversas situações: desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados, desenhos de flores, logotipos de empresas, entre outros. As translações aparecem em grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados entre outros.

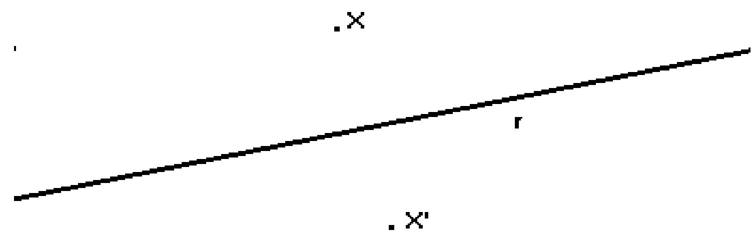
Mais precisamente, uma aplicação h: $\Pi \to \Pi$ de um plano Π, é denominada ***movimento rígido*** ou ***isometria*** se, dados dois pontos quaisquer X, Y $\in$ Π, a distância de X até Y é igual a distância de h(X)=X' a h(Y)=Y', isto é, d(X, Y) = d(h(X), h(Y)), ou ainda, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$.

A função *identidade*, isto é a função Id: $\Pi \to \Pi$ definida por Id(X) = X para todo X em Π, é claramente uma isometria.

Podem ser verificados os seguintes fatos ([4], ou [7]): Toda isometria h: $\Pi \to \Pi$ é uma *aplicação bijetora*; *transforma retas em retas*; leva *retas perpendiculares em retas perpendiculares* e, se h: $\Pi \to \Pi$ e h': $\Pi \to \Pi$ são duas isometrias quaisquer, então a *composta* h'o h: $\Pi \to \Pi$ é também uma isometria.

Vejamos a seguir exemplos importantes de isometrias ([4], [7]):

Simetria ortogonal ou axial (reflexão em torno de uma reta). Dada uma reta r, esta separa o plano em dois semiplanos. A aplicação no plano Π que associa a cada ponto X do plano o ponto X', denominado *simétrico* de X, situado no semiplano oposto ao que contém X, de tal modo que a reta r seja a mediatriz do segmento XX' é uma isometria, denotada por R_r e denominada *reflexão em torno de r*, ou *simetria ortogonal* ou ainda *simetria axial*. A reta r recebe o nome de *eixo de simetria*.

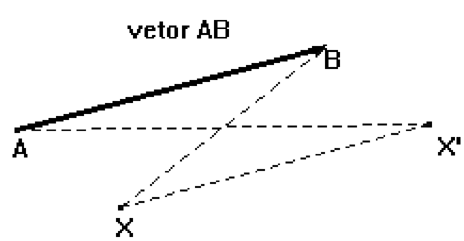


Mais precisamente, a função R_r: $\Pi \rightarrow \Pi$ é definida por:

$$R_r(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \in r \\ X', & \text{se } X \notin r \end{cases}$$

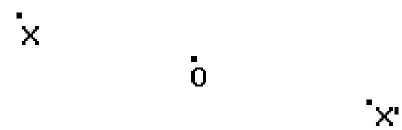
onde X' é escolhido de tal modo que a reta r é a mediatriz do segmento XX'. Observe que R_r funciona como um "espelho" e, por definição, os pontos da reta r são fixados por R_r.

Translação: Intuitivamente falando uma *translação* pode ser entendida como sendo o resultado de um deslocamento, sem giro, de uma figura de uma posição à outra. Uma translação fica determinada por uma direção, um sentido e uma distância. O ente matemático que possui estas características é chamado *vetor* (em latim "vehere" que significa transportar). Assim basta um "*vetor* $\overrightarrow{AB}$" (determinado a partir de um segmento orientado AB, onde A e B são pontos do plano) para definir uma translação. Grosseiramente falando, um vetor no plano R^2 é uma classe de segmentos com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo (comprimento). Considerando um vetor $\overrightarrow{AB}$, a translação definida por $\overrightarrow{AB}$ é a aplicação que associa a cada ponto X do plano, o ponto X' tal que XX' é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou ainda, uma *translação por* $\overrightarrow{AB}$ é a função T_{AB}: $\Pi \rightarrow \Pi$, definida por $T_{AB}(X) = X'$, onde X' é o único ponto tal que AX' e BX tenham o mesmo ponto médio.



Considerando $v = \overrightarrow{AB}$, $T_v = T_{AB}$ e utilizando a linguagem vetorial, teremos que a translação nos fornece a seguinte relação, $v = T_v(X) - X$ ou $T_v(X) = X + v$.

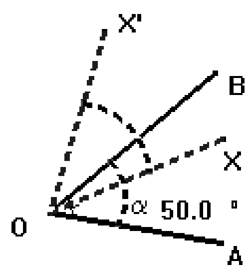
Simetria central ou reflexão em torno de um ponto O (simetria em relação a um ponto O): Fixando um ponto O no plano, chamamos *simetria central* à transformação que associa a cada ponto X, um ponto X' (o transformado do ponto X), de forma que o ponto O seja o ponto médio do segmento XX'. O ponto O é chamado *centro de simetria.*



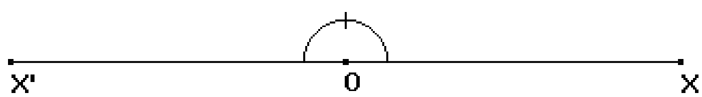
Rotação: Pode ser entendida como a transformação do plano por giro (de um ângulo α fixado) em torno de um ponto O, chamado *centro da rotação*, de modo que cada ponto X no plano seja levado em um ponto X' de tal forma que os segmentos OX e OX' sejam congruentes. Uma rotação fica determinada por um sentido (horário ou anti-horário) e por um ângulo α (de giro). Mais precisamente, sejam A, B e O pontos não colineares no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo orientado de vértice O. A função $C_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$ definida por:

$$C_{O,\alpha}(X) = \begin{cases} O & \text{se} \quad X = O \\ X' & \text{se} \quad X' \neq O \end{cases}$$

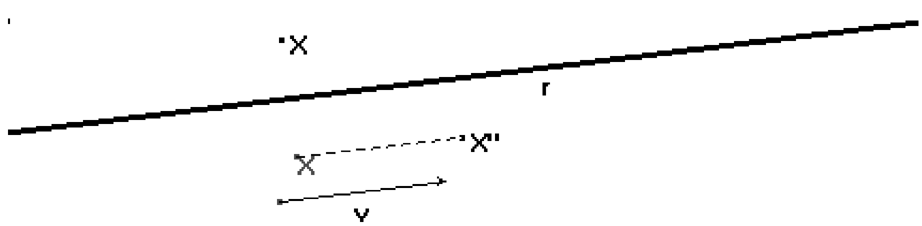
onde X' é tal que $\overline{XO} = \overline{X'O}$, $X\hat{O}X' = \alpha$, e o sentido de rotação de X para X' é o mesmo que o de OA para OB é uma isometria, denominada *rotação de ângulo α em torno do ponto O.* No Cabri a rotação é efetuada no sentido anti-horário.



Observação: A simetria central (em torno de um ponto O) é uma rotação de ângulo $\alpha = 180^0$ em torno de O, mais especificamente, a rotação $C_{O,180^o}$, corresponde à simetria central em torno de O. (Isso pode ser melhor visualizado usando uma figura e as ferramentas do Cabri, ver adiante, **Atividade 2.27 a)** **).**



Reflexão com deslizamento. Sejam v um vetor não nulo e r uma reta paralela a v. A *reflexão com deslizamento segundo o vetor v e a reta r,* é a isometria $D_{v,r} = T_v \circ R_r: \Pi \to \Pi$, obtida efetuando-se a reflexão R_r seguida da translação T_v (composição). Na figura, $(T_v \circ R_r)(X) = X''$



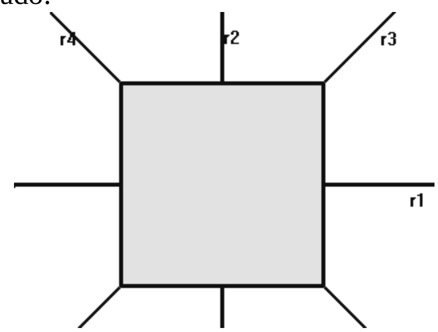
Pode-se mostrar que os exemplos de isometrias anteriormente apresentados são os únicos tipos existentes. Mais precisamente, temos:

Teorema**:** ([4], [7]) Existem apenas quatro tipos de isometrias $h: \Pi \to \Pi$ além da identidade, a saber: a reflexão em uma reta, a translação, a rotação e a reflexão com deslizamento.

Um conceito interessante relacionado com isometria é o de ***simetria de uma figura***:

Simetria de uma figura ([4], p.60). Seja E o conjunto de todas as *isometrias* do plano. Dado um subconjunto F do plano, que denominaremos ***modelo*** ou ***figura geométrica plana***, ou simplesmente ***figura***, dizemos que uma isometria h é uma ***simetria da figura*** F se h(F) = F. Consideremos o subconjunto de E formado pelas simetrias da figura F, isto é, $G_F = \{h \in E$ tais que $h(F) = F\}$. Esse conjunto é denominado ***conjunto das simetrias*** de F. Se F tiver conjunto de simetrias não unitário então dizemos que F é uma ***figura simétrica***, caso contrário, dizemos que é uma ***figura assimétrica***.

O quadrado (ver figura abaixo) é claramente uma figura simétrica, pois, por exemplo, as simetrias axiais Rr_1, Rr_2 Rr_3 Rr_4 são simetrias do quadrado. Também a rotações de 90, 180 e 270 graus, em torno do seu centro são simetrias do quadrado.



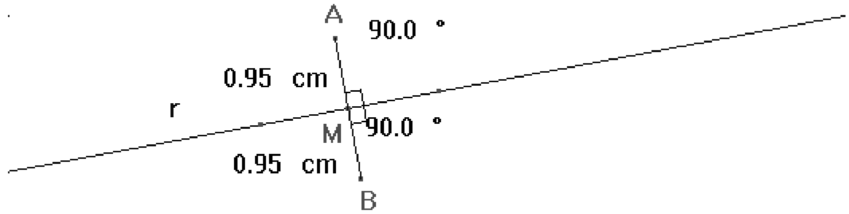
No que segue apresentamos algumas atividades por meio de construções com o Cabri envolvendo essas transformações. Destacamos que no minicurso nos deteremos apenas às atividades cujos enunciados encontram-se em negritos uma vez que não dispomos de tempo suficiente para o desenvolvimento de todas.

2.1 Explorando a simetria axial:

Atividade 2.1: ***Representar o simétrico de um ponto em relação a uma reta r (simetria axial).***

Passos:

1) Crie uma reta. Para isso selecione a ferramenta ***reta*** na caixa 3 e clique 2 vezes na tela em lugares distintos. Digite em seguida a letra r para nomear essa reta (também podemos fazer isso selecionando ***rótulo*** na caixa 10, movendo o cursor e clicando em seguida bem próximo da reta e digitando a letra r na caixa de edição que irá aparecer, nomeando/rotulando assim a reta de r).
2) Selecione ***ponto*** no quadro 2, e marque um ponto na tela fora de r, digite em seguida a letra A para nomear/rotular esse ponto (ou utilize o comando ***rótulo***).
3) Selecione ***simetria axial*** na caixa nº. 6, e clique no ponto A (aparecerá o texto "simétrico deste ponto") e em seguida clique sobre a reta r (note que vai aparecer o texto "em relação a este ponto", mas o que se obtém é o simétrico em relação a uma reta ou eixo). Imediatamente parecerá um ponto na tela. Digite B para nomear esse ponto. B é o simétrico de A em relação à r. (É importante que se obedeça a ordem acima: 1º. clique no ponto A e a seguir na reta r).

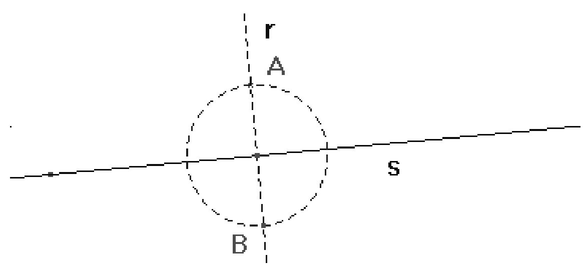


Passos complementares (podemos completar essa atividade de modo a verificar as propriedades dessa transformação, do seguinte modo):

4) Selecione ***segmento*** no quadro 3 e represente o segmento AB clicando no ponto A e em seguida em B.
5) Selecione ***ponto de intersecção*** no quadro 2 e clique no segmento AB e na reta r para obter o ponto de intersecção entre o segmento e a reta r. Digite M, para nomear esse ponto. Crie os segmentos AM e MB (usando ***segmento***) e, a seguir meça-os selecionado ***distância e comprimento*** na caixa 9 e clicando sobre cada segmento.
6) Marque o ângulo formado pela retas $\overleftrightarrow{AB}$ (a reta que contém o segmento AB) e r. Para isso selecione na caixa n$^{o.}$ 10 ***marca de ângulo*** e clique em 3 pontos, A, M e um ponto qualquer de r (de modo a dar a abertura do ângulo). Repita com os pontos B e M.
7) Selecione ***ângulo*** na caixa 9 e leve o cursor até um dos ângulos marcados e quando aparecer *esta marca*, dê um clique para obter a medida do ângulo. Repita com o outro ângulo marcado. (Para medir o ângulo pode-se também selecionar ***ângulo*** e clicar em 3 pontos (dando a abertura do ângulo) como fizemos para marcar um ângulo).
8) Selecione ***Rastro On/Off*** na caixa n$^{o.}$ 10 e clique nos pontos A e em seguida em B. Observe o que ocorre com o desenho construído ao movimentar o ponto A (para movimentar o ponto A, selecione ***ponteiro*** na caixa de ferramentas n$^{o.}$ 1, clique em A e, mantendo o botão do mouse apertado vá movimentando/arrastando o ponto A).

Podemos montar um roteiro para obter o simétrico de um ponto usando o Cabri, mas sem usar a ferramenta simetria axial:

Atividade 2.2: Construir o simétrico B, de um ponto A em relação a uma reta s, sem usar a ferramenta/comando simetria axial do Cabri.
(Uma solução possível é a dada nos passos seguintes, porém há outras).



Passos:
1) Crie um ponto A (usando ***ponto*** na caixa n^{o} 2), e uma reta s (com ***reta*** na caixa 3).
2) Selecione ***reta perpendicular*** na caixa 5 e clique sobre s e em seguida no ponto A para obter uma reta r perpendicular a s, contendo o ponto A.
3) Marque o ponto de interseção usando ***ponto de interseção*** na caixa 2 e clicando nas duas retas.
4) Para obter B use ***circunferência*** na caixa 4 e clique no ponto de intersecção entre r e s (centro da circunferência) e em seguida em A. selecione ***ponto de intersecção*** na caixa 2 e clique sobre a reta r e a circunferência. Nomeie esse ponto de B (usando ***rótulo***). Tal ponto B é o simétrico de A.
5) Para esconder as construções intermediárias, selecione ***esconder/mostrar*** na caixa 11 e clique sobre a reta r e a circunferência.

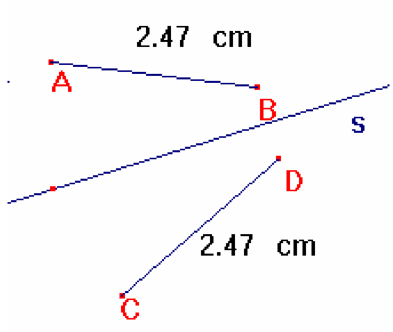
A partir dessas construções básicas podemos observar como é a imagem de diferentes figuras pela simetria axial.

Atividade 2.3: Construir a imagem de um segmento AB por uma simetria axial.

Passos:
1) Crie um segmento AB (com a ferramenta ***segmento***), e uma reta s (usando ***reta***).
2) Selecione ***simetria axial*** na caixa 6 e clique primeiro no segmento AB e em seguida sobre a reta s.

(O que acontece se ao selecionarmos ***simetria axial*** clicarmos primeiro na reta s e depois no segmento?).

3) Nomeie as extremidades do segmento obtido de C e de D (usando ***rótulo***, na caixa 10).

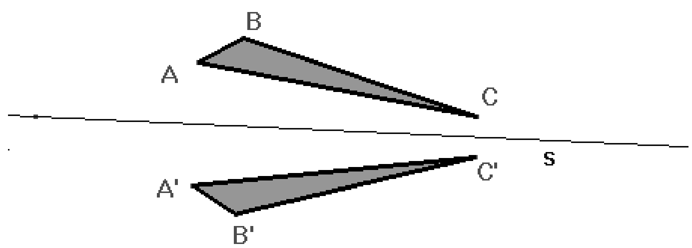


Passos complementares:

4) Meça os segmentos AB e CD, usando ***distância e comprimento*** na caixa 9. Movimente A ou B e observe o que ocorre com as medidas de AB e CD.

5) Movimente a reta s e observe as medidas dos segmentos.

Atividade 2.4: ***Construir a imagem de um triângulo ABC por uma simetria axial.***



Passos:

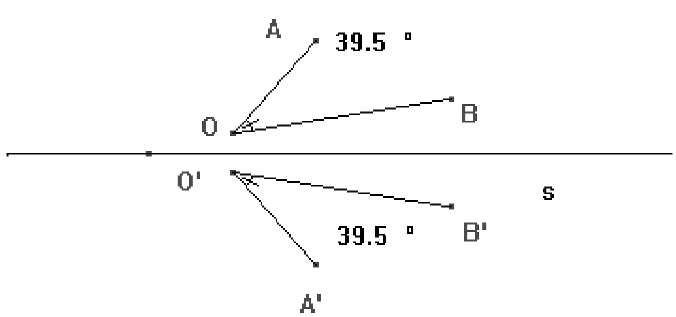
1) Crie um triângulo ABC. Para tanto selecione a ferramenta ***triângulo*** na caixa 3, e clique em 3 pontos quaisquer na tela. Nomeie os pontos usando ***rótulo*** (caixa 10).
2) Construa uma reta s (eixo de simetria), selecione ***simetria axial*** (na caixa 6) e clique primeiro no triângulo ABC e em seguida sobre a reta s. Nomeie os vértices (correspondentes) do triângulo obtido de A'B'C'.

Passos complementares:

3) Pinte a região interna do triângulo para isso selecione ***preencher*** na caixa 11. Irá aparecer uma paleta de cores. Clique na cor escolhida e aproxime o cursor do triângulo a ser preenchido. Quando aparecer a "canequinha" e o texto "este triângulo" (indicando qual região será preenchida) aperte o botão do mouse e a região será pintada na cor escolhida. A seguir feche a paleta de cores.
4) Movimente o ponto A (B ou C) e observe o que ocorre.

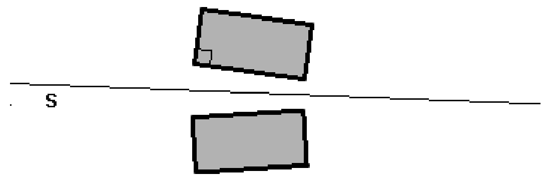
Podemos ainda obter as áreas e os perímetros dos triângulos utilizando, respectivamente, as ferramentas ***área*** e, ***distância e comprimento*** da caixa 9.

Atividade 2.5: Construir a imagem de um "ângulo" AÔB por uma simetria axial.



O "ângulo" é obtido construindo-se dois segmentos e, para obter o simétrico, temos que refletir cada segmento. *Complemente essa atividade do seguinte modo*: Nomeie o novo ângulo de A'Ô' B', meça os ângulos AÔB e A'Ô'B' (para marcar e medir os ângulos use, respectivamente, ***marca de ângulo*** na caixa 10 e ***ângulo*** na caixa 9, clicando nos pontos AOB e A'Ô'B"de modo a dar a abertura do ângulo). Movimente A ou O ou B e observe as medidas dos ângulos. O que você pode concluir?

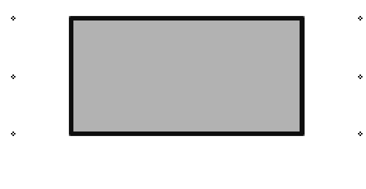
Atividade 2.6: ***Construir a imagem de um retângulo por uma simetria axial***.



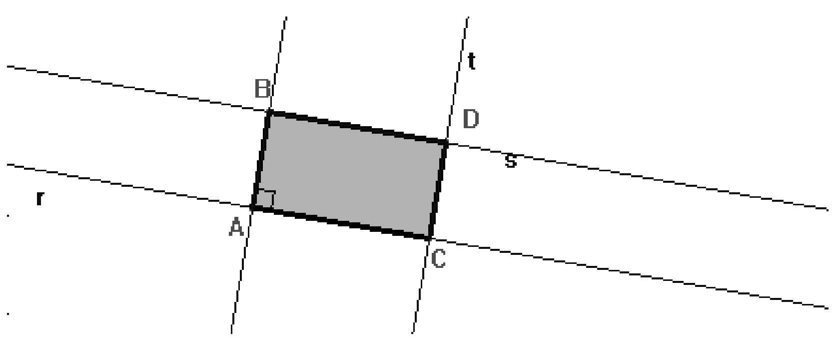
Para isso note que é necessário construir um retângulo usando as ferramentas do Cabri. Uma forma simples de obter um retângulo é utilizando ***linha de grade***:

***Passos*:**
1) Selecione ***mostrar eixos*** na caixa 11 e clique sobre a tela do cabri;
2) Selecione ***definir grade*** da caixa 11 e aproxime o cursor dos eixos (com o auxílio do mouse) e ao aparecer a mensagem "estes eixos", clique na tela do Cabri (aparecerá uma malha pontilhada).
3) Selecione ***polígono*** na caixa 3 e clique em 4 pontos da malha de modo a obter um retângulo.

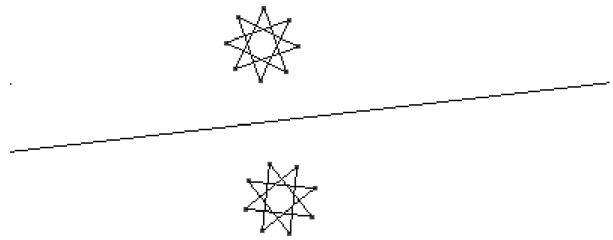
A seguir, podemos pintar a região interna e, para obter a simetria, basta construir uma reta e usar a ferramenta *simetra axial*, como em situações anteriores.



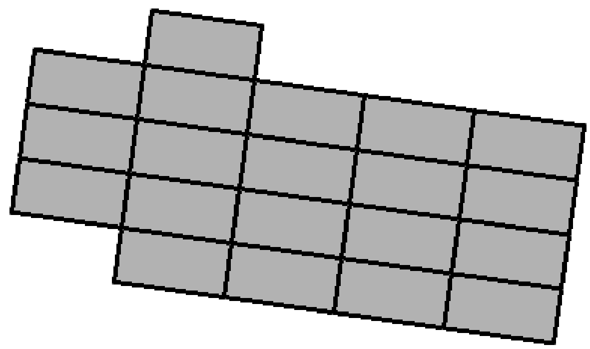
Note que há outros modos (sem usar *linha de grade*) de construirmos um retângulo, por exemplo, usando ***reta***, ***ponto*** e as ferramentas da caixa 5: ***reta perpendicular*** e/ou ***reta paralela*** (a uma reta ou "segmento", passando por um ponto). Após obter o retângulo, selecione ***polígono*** e clique nos vértices do retângulo (ABDCA até fechar o contorno). Para esconder as retas auxiliares, selecione ***esconder***/***mostrar*** na última caixa e clique sobre cada reta.



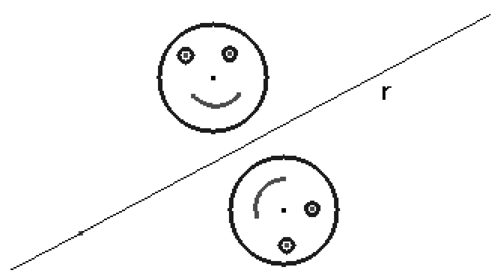
Atividade 2.7: Construir uma figura geométrica e a sua imagem por uma simetria axial.
(Aqui construímos um polígono estrelado, usando a ferramenta ***polígono regular*** na caixa 3).



Atividade 2.8: ***Construir um retângulo e, usando apenas simetria axial (do polígono em relação aos eixos que contém os seus lados) pavimentar/cobrir o plano com retângulos***.
(Podemos utilizar o retângulo já construído anteriormente caso tal atividade tenha sido salva no computador ou em disquete).



Atividade 2.9: Construir a imagem de uma circunferência/carinha por uma simetria axial.
(Notemos que em geral o Cabri não reflete a figura toda de uma só vez, a não ser que “ele” a reconheça como uma única figura, assim temos que usar o comando simetria axial para cada parte da figura).

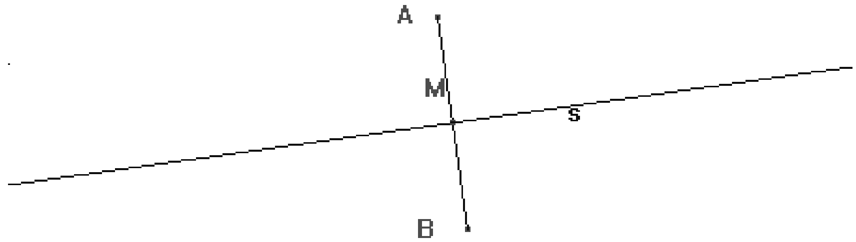


Por vezes, queremos “descobrir” o ***eixo de simetria*** de algumas figuras. No que segue apresentamos algumas sugestões de como fazer isto em certos casos.

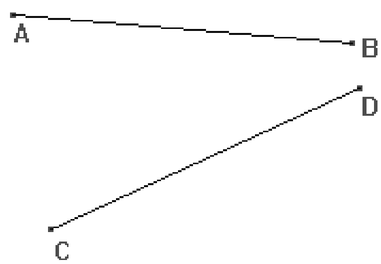
Atividade 2.10: A partir de dois pontos dados, recuperar o eixo de simetria.

Passos:
1) Crie os pontos A e B, usando ***pontos*** na caixa 2 (vamos supor B simétrico de A).
2) Crie o segmento AB (com a ferramenta ***segmento***), e usando ***ponto médio*** na caixa 5, obtenha o ponto médio M do segmento AB.
3) Selecione ***reta perpendicular*** na caixa 5 e clique no segmento AB e em seguida no ponto M para obter a reta s (perpendicular ao “segmento”). Tal reta é o eixo de simetria.

Observação: poderíamos simplesmente ter usado a ferramenta ***mediatriz*** na caixa 5 (com relação ao segmento AB).



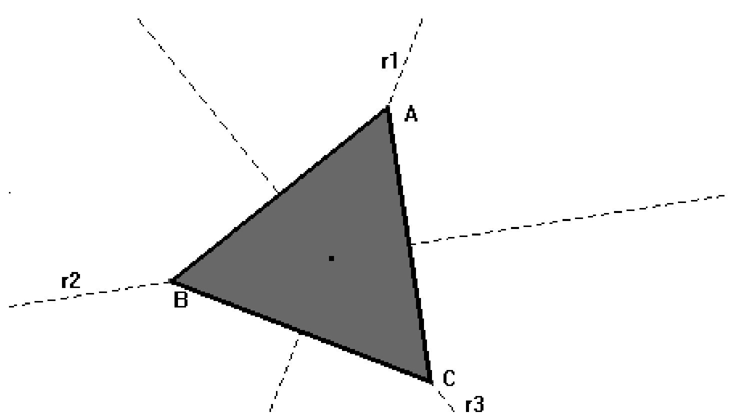
Atividade 2.11: Dados dois segmentos AB e CD, simétricos, recuperar o eixo de simetria**.**



***Passos*:**

1) Crie um segmento AB, uma reta s e a imagem CD de AB, por uma simetria axial em relação à reta s.
2) Selecione ***esconder/mostrar*** na caixa 11 de ferramentas, clique sobre s e em seguida em ***ponteiro*** (a reta s desaparecerá).
3) Recupere agora, usando construções geométricas, o eixo de simetria (por exemplo, usando ***ponto médio*** na caixa 5 entre os pontos AC e BD , ou usando ***mediatriz*** em relação, por exemplo, ao segmento AC).
4) Movimente A ou B para comprovar que a reta construída é de fato o eixo de simetria.

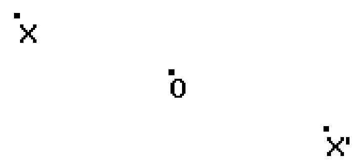
Atividade 2.12: ***Obter os eixos de simetria de um triângulo eqüilátero ABC.***
Para obter um triângulo eqüilátero ABC: use ***polígono regular*** na caixa 3, clique em um ponto na tela (centro) e em seguida em um outro ponto qualquer e gire para a esquerda até aparecer o número 3 (que corresponde ao número de lados), agora clique novamente na tela. Podemos ver que um triângulo eqüilátero é uma *figura simétrica* e possui 3 eixos de simetria. Após exibir os eixos, podemos confirmar se tais eixos são realmente eixos de simetria efetuando com o Cabri, *simetria axial* do triângulo em relação a cada eixo.



Atividade complementar: Represente geometricamente outras figuras com o auxílio do Cabri (um retângulo, triângulo isósceles, quadrado, paralelogramo, etc...) e verifique se as mesmas possuem eixos de simetria.

2.2 Explorando a simetria axial:

Atividade 2.13: ***Construir a imagem de um ponto X por uma simetria central (em relação a O).***

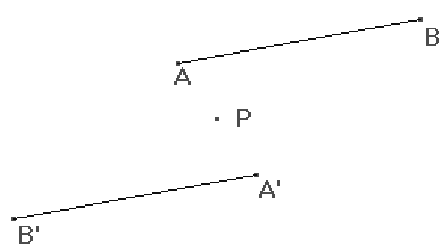


Passos

1) Crie dois pontos X e O (nomeie esses pontos, usando ***rótulo*** na caixa 10).
2) Selecione ***simetria central*** na caixa 6 e clique no ponto X e em seguida em O (nessa ordem).
3) Nomeie o ponto obtido por X'.

Atividade 2.14: ***Construir a imagem de um segmento por uma simetria central (em P).***
Passos.

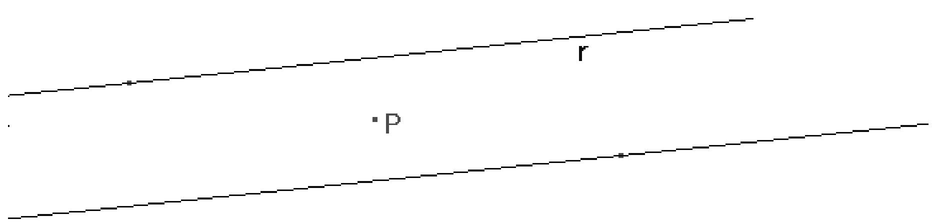
1) Crie o segmento AB e um ponto P fora dele.
2) Selecione ***simetria central*** na caixa 6 e clique no segmento AB e em seguida em P.
3) Nomeie de A' o simétrico de A e de B' o simétrico de B.



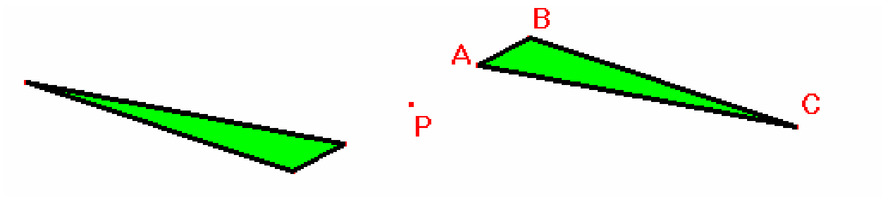
Passos complementares, para se explorar as propriedades da simetria central.

4) Meça AB e A'B', usando ***distância e comprimento*** na caixa 9.
5) Movimente A, ou B, ou P e observe o que ocorre com o segmento A'B'.
6) Verifique que AB e A'B' são paralelos (pode-se concluir isso usando a ferramenta ***reta paralela*** ("a um segmento") ou selecionando ***paralelo*** na caixa 8 e clicando nos dois segmentos e em seguida em qualquer lugar da tela. Deverá aparecer o texto *objetos paralelos*.
7) Observe o que acontece se no passo 1 tomamos P pertencente ao segmento AB. Para isso basta selecionar ***ponteiro***, clicar em P e arrastá-lo sobre AB.

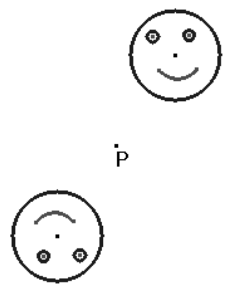
Atividade 2.15: Construir a imagem de uma reta r por simetria central (em um ponto P).



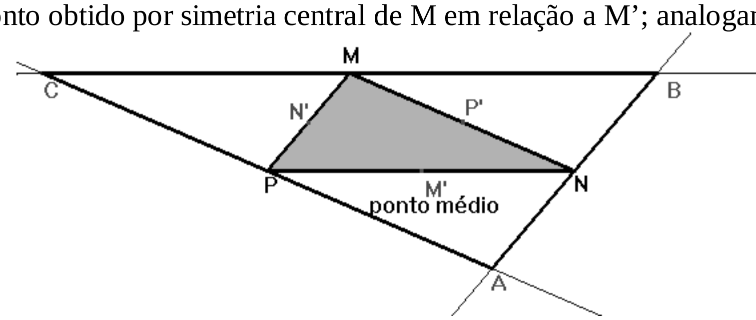
Atividade 2.16: Construir a imagem de um triângulo ABC por uma simetria central em relação a um ponto P fora do triângulo. Verifique que os triângulos são congruentes, movimente o ponto P, de modo a obter um paralelogramo unindo os 2 lados dos triângulos. (O que acontece se o ponto P estiver no interior do triangulo?)



Atividade 2.17: Construir a imagem de uma circunferência/carinha por uma simetria central.
(Compare com a simetria axial, construindo retas passando por P)

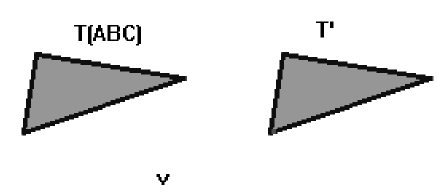


Atividade 2.18: Dado um triângulo MNP, use simetria central para construir um triângulo ABC, de modo que M, N e P sejam pontos médios dos lados desse triângulo.
Sugestão: determine os pontos médios N', P', e M', dos segmentos PM MN e MP, respectivamente, e observe que A é o ponto obtido por simetria central de M em relação a M'; analogamente para B e C.



2.3 Explorando a translação:

Atividade 2.19: ***Construa um triângulo T(ABC), e um vetor v e obtenha o triângulo T' transladado de T pelo vetor v.***



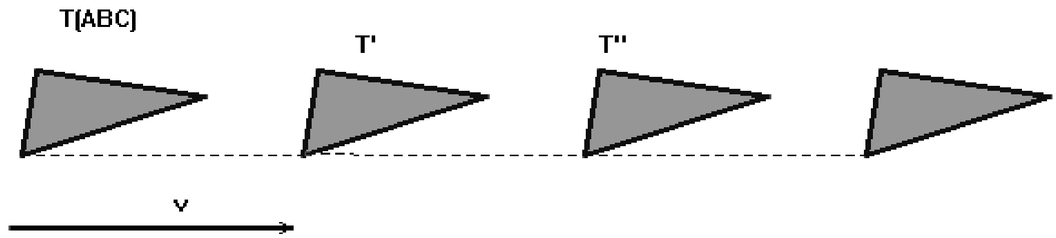
Passos:

1) Construa um triângulo T(ABC) usando a ferramenta ***triângulo*** na caixa 3 (e clicando em 3 pontos
2) da tela). Caso queira, pinte a região interna (***preencher*** na caixa 11) e use ***espessura*** (caixa 11) para obter traços mais espessos.

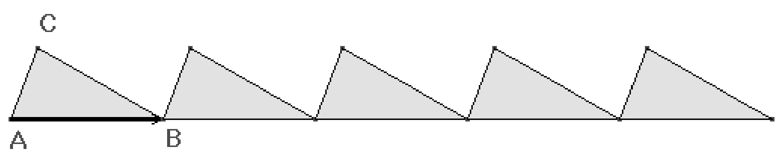
3) Construa um vetor v usando a ferramenta ***vetor*** da caixa 3.
4) Selecione ***translação*** na caixa nº. 6, e clique no triângulo T (aparecerá o texto “transladar esse triângulo”) e em seguida clique sobre o vetor (note que vai aparecer o texto “por este vetor”). Imediatamente parecerá um novo triângulo na tela (o transladado de T). Usando comentário na caixa 11 nomeie-o de T’.

Atividade complementar:

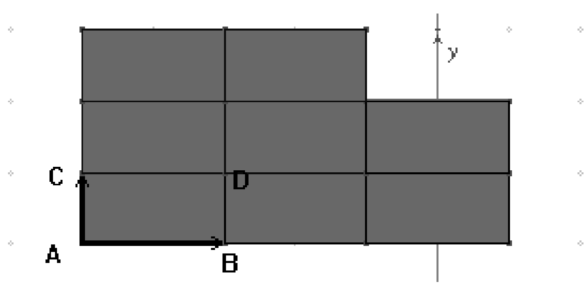
5) Crie um segmento unindo um dos vértices de T pelo seu transladado em T’ (pontilhe usando ***pontilhado*** na caixa 11)
6) Translade T’ pelo vetor v de modo a obter um triângulo T” e assim sucessivamente).
7) Movimente o ponto inicial do vetor (para cima, para baixo, para os lados). O que você observa?



Atividade 2.20 *Construa um triângulo T(ABC) e obtenha uma “seqüência” de triângulos congruentes a T, usando translação segundo o vetor* $\overrightarrow{AB}$*, onde AB é a base do triângulo inicial.*

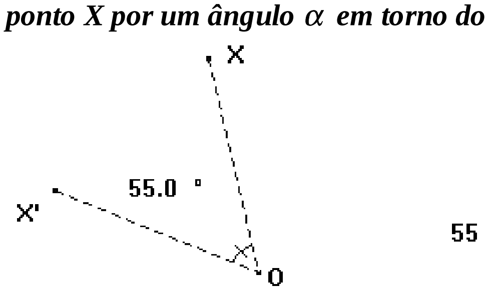


Atividade 2.21: *Construa um retângulo ABCD, e use translação segundo os vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *de modo a obter novos retângulos (transladados) como na figura abaixo.*



2.4 Explorando a rotação:

Atividade 2.22: ***Rotacionar um ponto X por um ângulo*** α ***em torno do ponto O*** (tomaremos $\alpha=55^0$).



Passos:

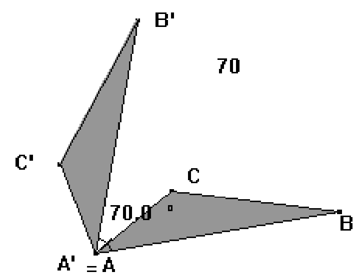
1) Marque e rotule dois pontos X e O.

2) Selecione ***edição numérica*** (caixa 10), clique na tela e digite a medida do ângulo 55.
3) Selecione ***rotação*** na caixa n^o. 6, e clique no ponto X (aparecerá o texto “girar este ponto”), clique sobre o ponto O (vai aparecer o texto “ao redor deste ponto”) e sobre o número 55 (”usando este ângulo”). Imediatamente parecerá um novo ponto na tela. Rotule-o de X’.

Passos complementares:

4) Ligue os pontos X a O e X’a O por segmentos (***pontilhar*** , usando a caixa 11).
5) Marque o ângulo XÔX’ (use ***marca de ângulo*** caixa 11 e clique em X, depois em O e em X’),
6) Meça o ângulo XÔX’(use ***ângulo*** caixa 10 e clique em X, depois em O e em X’),
7) Movimente X, movimente O, X’, o que você observa?

Atividade 2.23*: Construir um triângulo ABC e o triângulo A’B’C’ obtido de ABC por uma rotação de 70^o em torno do vértice A*.



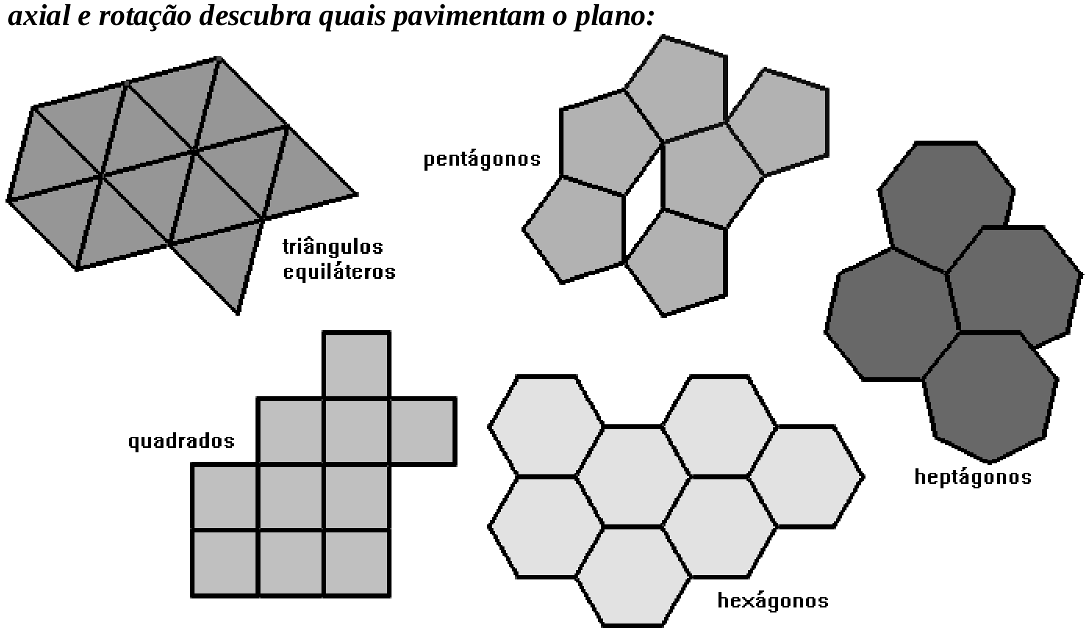
Passos:

1) Construa um triângulo ABC.
2) Selecione ***edição numérica*** (caixa 10), clique na tela e digite a medida do ângulo 70.
3) Selecione ***rotação*** na caixa n^o. 6, e clique no triângulo (aparecerá o texto “girar este triângulo”), clique sobre o vértice A e sobre o número 70.

Passos complementares:

4) Selecione edição numérica, clique duas vezes no número 70 e mova as setinhas para cima e para baixo. O que acontece?
5) Repita o procedimento para o triangulo T’, isto é, rotacione o triângulo T’em torno de A por um ângulo de 70 graus.

Atividade 2.24(extra): ***Construa polígonos regulares, usando polígono regular na caixa 3 e usando simetria axial e rotação descubra quais pavimentam o plano:***

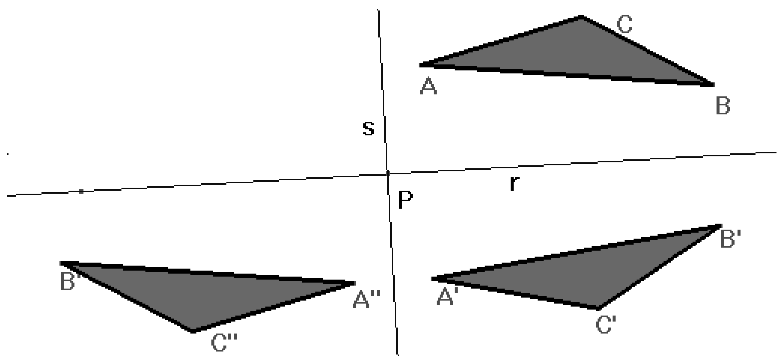


2.6 Explorando algumas relações existentes entre as isometrias.

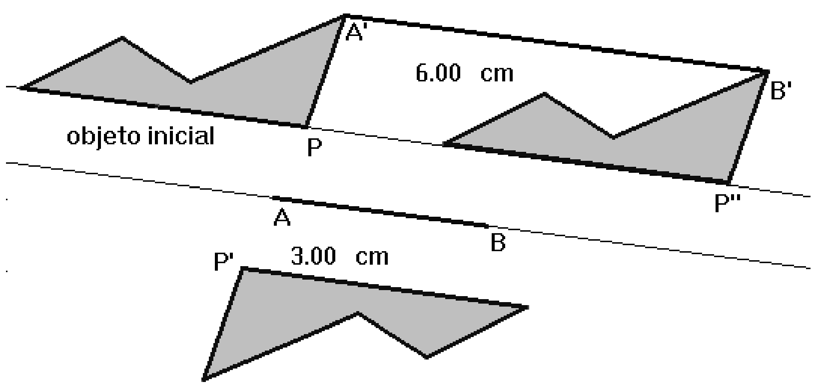
Atividade 2.25: Relacionar a simetria axial com a simetria central.

Passos:

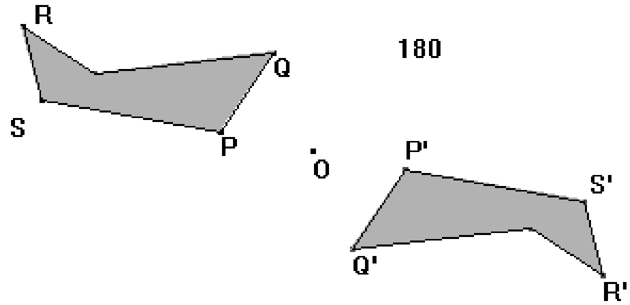
1) Crie duas retas perpendiculares: r e s.
2) Crie um triângulo ABC.
3) Construa a imagem A'B'C' do triângulo ABC por uma simetria (axial) em relação à reta r e em seguida a imagem A''B''C'' do triângulo A'B'C' por simetria (axial) em relação à reta s.
4) Obtenha agora a imagem do triângulo ABC por uma simetria (central) em relação ao ponto P. O que podemos concluir?



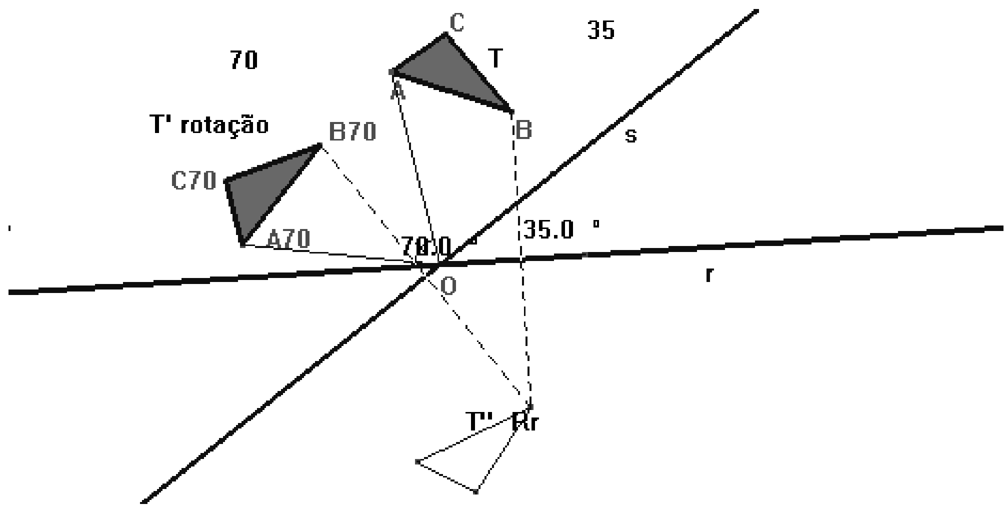
Atividade 2.26: Dados um segmento AB e uma figura geométrica qualquer (polígono), use *simetria central* em torno de um ponto A seguida de uma *simetria central* em torno do ponto B e verifique que o resultado (composição) dessas duas ações corresponde a uma translação pelo vetor 2AB.



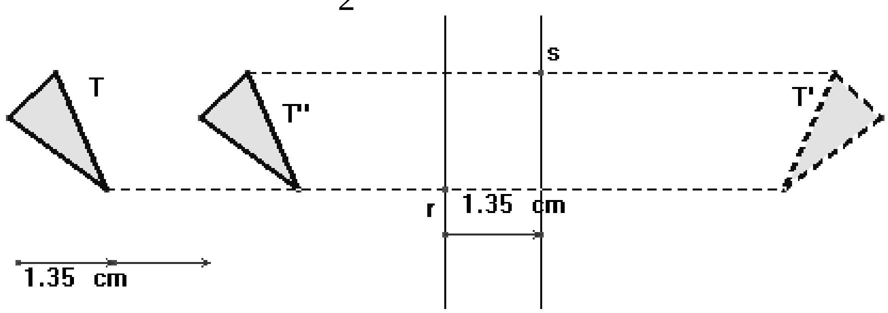
Atividade 2.27: Verifique geometricamente as seguintes propriedades:
a) Uma simetria central em relação a um ponto, corresponde a uma rotação de 180 ^{o} em torno desse mesmo ponto.
Sugestão: Construa uma figura qualquer F (polígono) e um ponto O. Use as ferramentas do cabri ***simetria central*** como ***rotação*** por um ângulo de 180^{o} e observe que a figura obtida é a mesma.



b) Toda rotação $C_{O,\alpha}$ pode ser escrita como a composta de duas reflexões em retas concorrentes em O, cujo ângulo entre elas é $\alpha/2$ (ângulo orientado). Na ilustração consideramos $\alpha=70^o$.



c) Toda translação por um vetor v "T_V" pode ser escrita como a *composta de duas reflexões (simetrias axiais) sobre retas paralelas* r e s distantes $\frac{|v|}{2}$ uma da outra e perpendiculares a v.



3) Poliminós e o Cabri.

Os poliminós foram inicialmente estudados por Salomon W. Golomb em 1953. De modo não formal, cada poliminó é um conjunto formado por n quadrados de mesma área que são unidos por justaposição dos lados de acordo com os seguintes critérios:

- ao unirmos dois dos quadrados, os lados justapostos tem os dois vértices em comum,
- a união de todos os lados (dos quadrados) que não estão justapostos forma um polígono.

A classificação dos poliminós é bem natural, pois é baseada na contagem dos seus quadrados componentes. Eles são classificados em *monominós*, *dominós*, *triminós*, *tetraminós*, *pentaminós*, *hexaminós*, *heptaminós*, etc., se são compostos, respectivamente, de um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, etc., quadrados básicos. A menos de equivalência (por isometria ou movimento rígido no plano, que faça um poliminó coincidir com o outro) há um único tipo de monominó, apenas um de dominó, 2 tipos de triminós, 5 de tetraminós, 12 de pentaminós, etc..

Desde o artigo de Colomb em 1953 muitos jogos e desafios tem sido propostos a partir dos poliminós. De fato muitos dos jogos podem ser apresentados como um desafio na forma de um ***quebra-cabeça***. Acreditamos que a maior divulgação dos poliminós foi dada por Martin Gardner, nos vários artigos publicados no Scientific American e em seus livros, como por exemplo, [3] p.135. Até hoje o estudo dos poliminós é tema de pesquisas.

Apresentaremos aqui, primeiramente, a construção dos poliminós com o Cabri, e em seguida algumas atividades, com os poliminós, mais particularmente, as que se referem a cobrir/pavimentar "*o plano*", "faixas" ou "*tabuleiros*" com tetraminós e pentaminós, além de uma rápida passagem pelo problema da duplicação de uma peça dada. Abordaremos, por exemplo, os seguintes problemas: É possível recobrir um tabuleiro retangular 4x6 usando apenas o tetraminó L? "É possível distribuir as 12 peças de pentaminós em um "*tabuleiro* 8x8" deixando 4 casas vazias?"

Observamos, entretanto, que não faz parte da nossa proposta discutir todas as possíveis soluções para cada desafio/jogo/quebra-cabeça, mesmo porque em muitas situações o número de soluções é bem grande, e há casos em que não se conhecem todas as soluções possíveis. Em geral, apresentaremos apenas uma solução, uma vez que nosso intuito é ilustrar como tais desafios podem ser explorados com os recursos de informática.

No entanto, vale destacar que, mais recentemente, vários trabalhos tem sido publicados sobre problemas envolvendo os poliminós, muitos deles com soluções para cada uma das atividades propostas (vide, por exemplo, [1] e [6]).

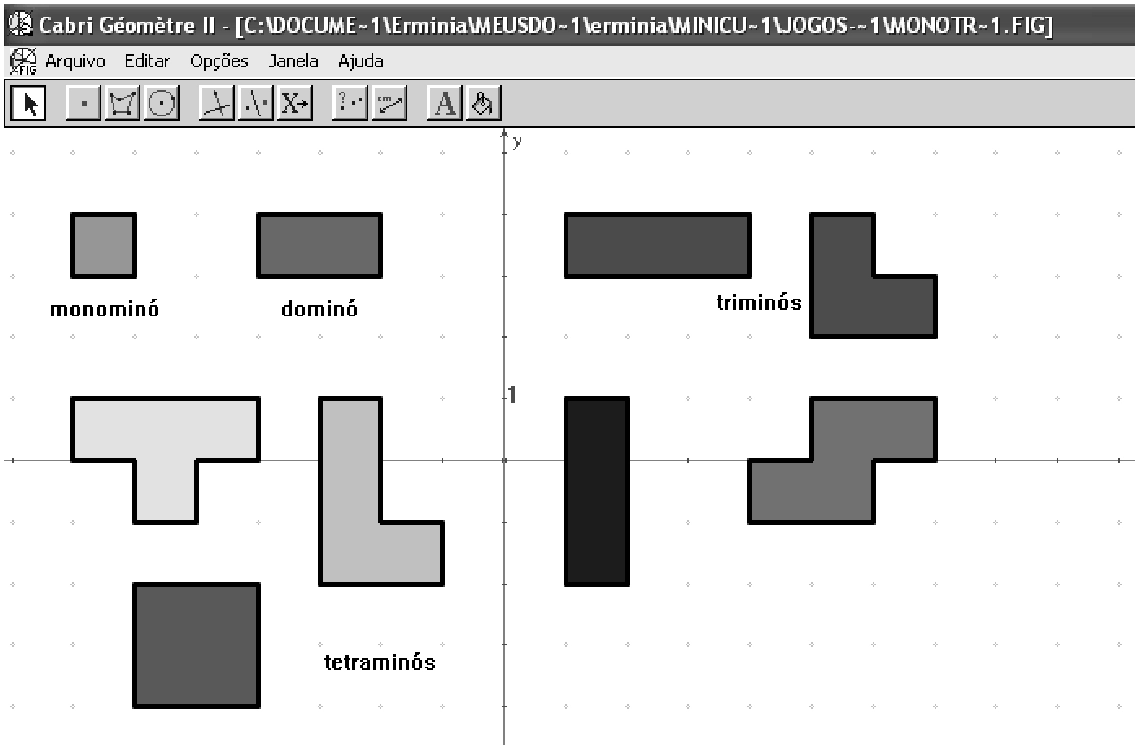
3.1 Construção dos Poliminós com o Cabri:

Os poliminós (que em certas ocasiões nos referiremos também como *peças* de um determinado jogo) podem ser construídos no Cabri da seguinte maneira:

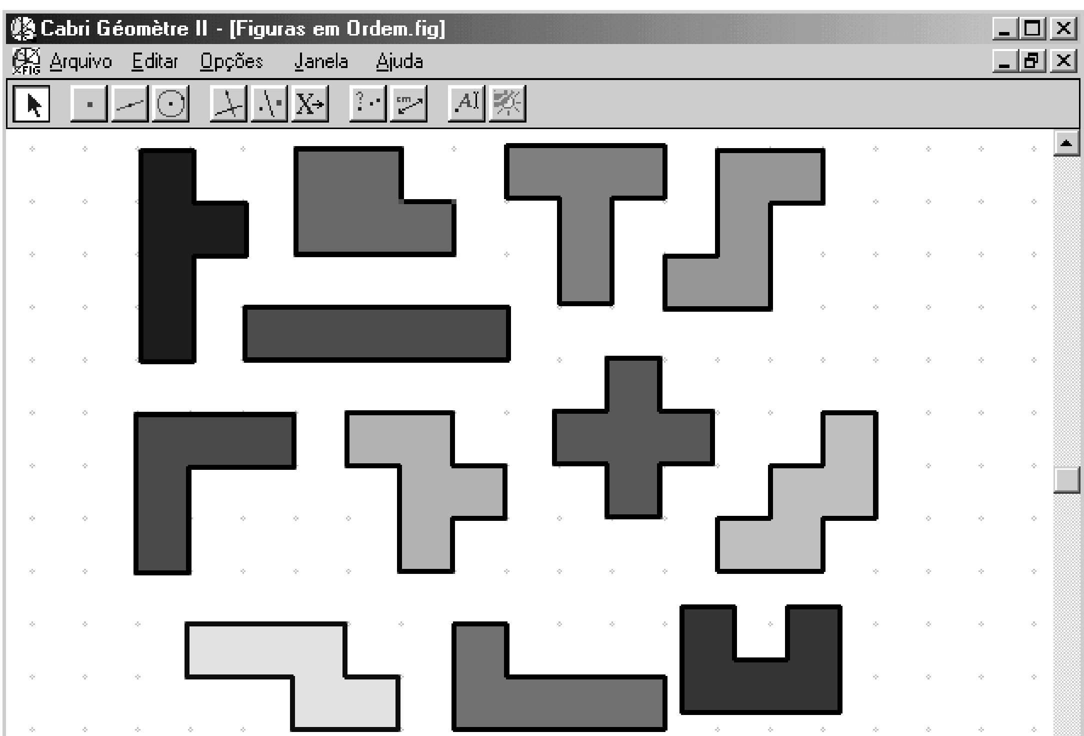
Passos:

1) Selecione ***mostrar eixos*** na caixa n^{o} 11 e clique na tela de trabalho, em seguida selecione ***definir grade*** e aproxime o cursor dos eixos e clique (obterá uma malha pontilhada).
2) Usando a ferramenta ***polígonos*** na caixa 3, e utilizando os pontos da malha pontilhada (pontos de grade) construa na tela do Cabri os polígonos dado pela união dos lados não justapostos dos quadrados dos poliminós (ou seja o *contorno* do poliminós).
3) Para os contornos ficarem mais destacados, selecione, na caixa de ferramentas n^{o} 11, ***cor*** (escolha o preto no quadro que aparece) e em seguida clique sobre cada polígono. Use, ainda, a ferramenta ***espessura*** (a média) também na caixa 11 e clique novamente em cada polígono para obter um contorno mais grosso.
4) No quadro 11 selecione ***preencher***, em seguida escolha uma cor e clique no polígono (a região interna desse polígono ficará colorida de acordo com a cor escolhida). Repita para os demais.

Apresentamos na próxima figura os monominós, dominós, triminós e tetraminós, e na figura seguinte, os pentaminós (todos os *tipos* a menos de equivalência por isometrias).



Os 12 pentaminós (a menos de equivalência):

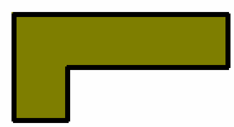


Passos complementares: *Construção das peças (soltas) para os jogos virtuais.*

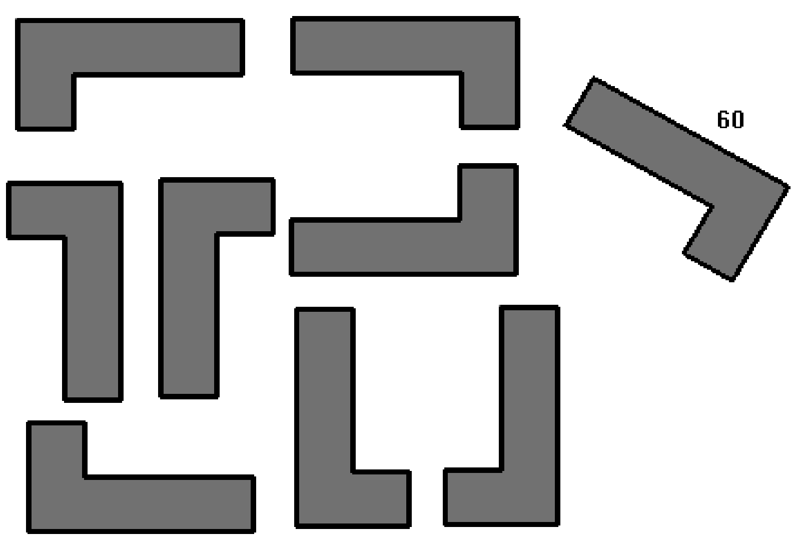
5) Selecione ***ponteiro*** da caixa 1 e clique sobre um poliminó (que ficará piscando), aperte ao mesmo tempo as teclas **Ctrl** e **C** do teclado (para copiar) e em seguida **Ctrl** e**V** (para colar) com isso obtemos uma cópia da peça do poliminó escolhido). Aperte a tecla **Del** para deletar o poliminó inicial. Assim ficará apenas a cópia da peça, que pode agora ser facilmente arrastada quando selecionamos ***ponteiro,*** clicamos sobre ela e arrastamos com o mouse. Repita isso com todas as peças.
6) Salve em arquivo as peças (soltas): um com os monominós, triminós e tetraminós e um outro só com os pentaminós.

Sempre que for realizar uma atividade que envolva tais peças você pode abrir um desses arquivos, salvá-lo com outro nome e a partir daí fazer as modificações necessárias (por exemplo, deletando as peças que não serão usadas). Para deletar uma peça, sem deixar as marcar dos seus pontos (vértices), podemos usar ***ponteiro*** e encaixá-la dentro da caixa pontilhada e depois usar a tecla Del.

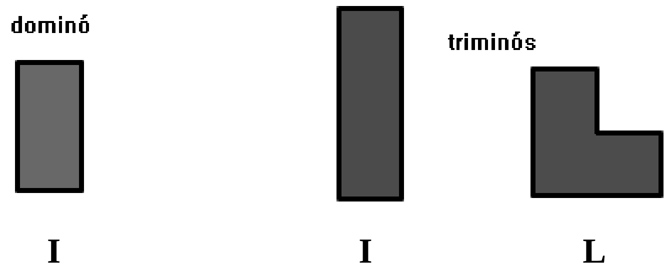
Peças equivalentes:
Observe que podemos rotacionar, refletir/inverter uma peça obtendo todas as outras peças equivalentes (por isometria) a ela, isto é peças que se sobrepostas à peça original se encaixam perfeitamente. Por exemplo, podemos ***construir peças equivalentes à peça abaixo (pentaminó L)***. (Poderíamos usar qualquer outro poliminó):

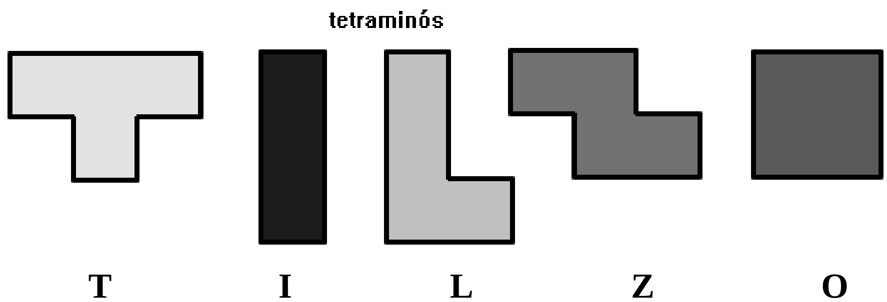


Não vamos exibir os passos, mas lembramos que para isso podemos utilizar as ferramentas do Cabri: ***simetria axial***, ***simetria central*** e ***rotação*** (de acordo com o ângulo definido através da ***edição numérica***). Observamos também que para girarmos uma peça (sem fixar um ângulo) podemos usar também a ferramenta ***giro*** na caixa 1. Nesse caso, para obter um contorno mais "reto" clique sobre a peça com *ponteiro* e aperte a tecla Shift. Apresentamos a seguir todas as soluções para esse caso (a menos das obtidas por rotação). É interessante observar que peças como a última à direita, em geral não serão utilizadas nas atividades abaixo uma vez estaremos trabalhando com "tabuleiros" ou "faixas":

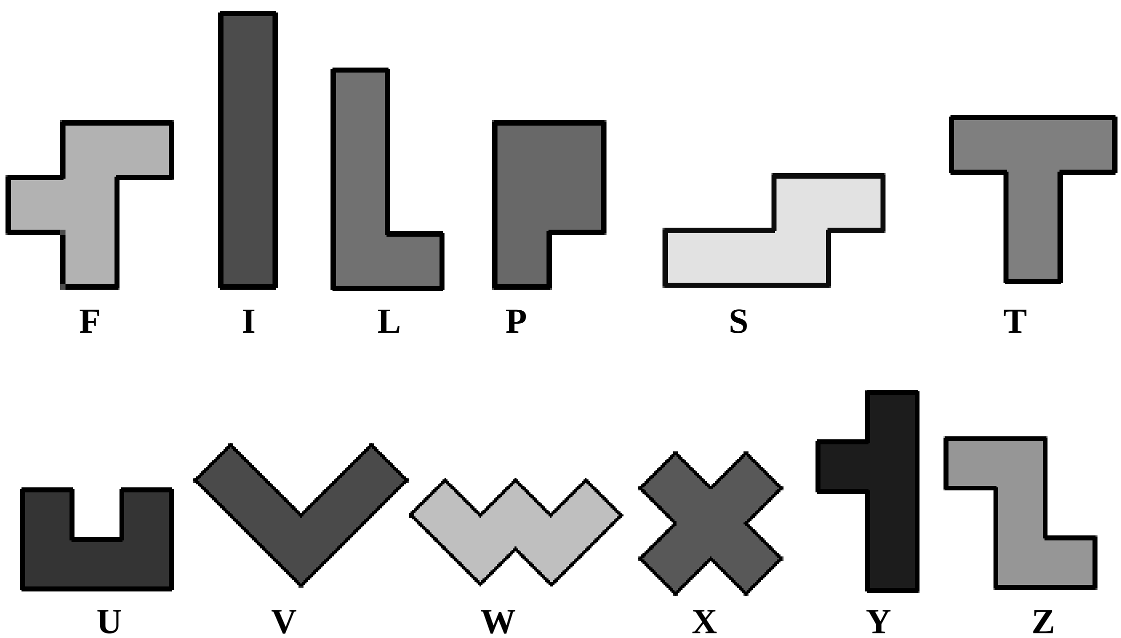


Para facilitar a identificação das peças (poliminós) é usual dar a cada uma o nome da letra que a sua forma evoca (efetuando, se necessário, rotações ou reflexões).





Pentaminós



Os poliminós “I” são também denominados *polininós* retos, os “Z” de *zigue-zague* ou *escada* e o tetraminó “O” de tetraminó *quadrado*.

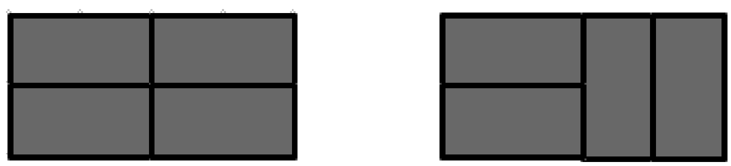
Vejamos, agora, algumas atividades com os poliminós. Como já citamos, nosso intuito é ilustrar como tais desafios/atividades podem ser explorados com os recursos de informática e não necessariamente discutir sobre todas as soluções possíveis. Na maioria dos casos teremos que construir peças isométricas a uma peça dada usando as ferramentas do Cabri "simetria axial, rotação e translação" e suas cópias o que pode se constituir em exercício de fixação do uso dessas ferramentas.

3.2 Atividades com dominós, triminós e tetraminós:

3.2.1 *Atividades relativas a pavimentação:*

Atividade 3.1. Usando a mesma unidade de medida das peças dos poliminós construir um tabuleiro retangular (ou simplesmente um retângulo) 2x4 e cobri-lo/pavimentá-lo com dominós I (reto).

Sugestão: Partir de um dominó, inicialmente dado, e obter os demais usando transformações isométricas e cópias (Ctrl c, Ctrl v) se necessário. Para obter o tabuleiro selecione ***mostar eixos*** na caixa 11, clique na tela, selecione ***linha de grade*** também na caixa 11(e clicando próximo ao eixo) e construa um retângulo 2x4 usando a malha pontilhada (use espessura para obter contorno mais grosso). Encaixe então as peças dentro do retângulo:



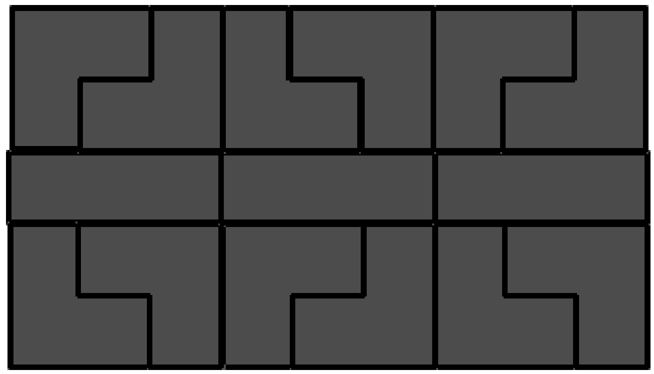
Proponha outras atividades a serem desenvolvidas com os dominós.

Atividade 3.2. Construir faixas (cheias), de largura 2, usando apenas triminós I (reto).

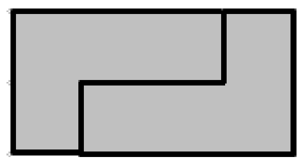
Sugestão: Partir de um triminó inicialmente dado, e obter os demais usando transformações isométricas e cópias (Ctrl c, Ctrl v) se necessário. Quantos modelos diferentes podem ser obtidos?

Atividade 3.3 Construir um retângulo 2x6 e cobri-lo usando apenas triminós L. Estender de modo a obter uma faixa.

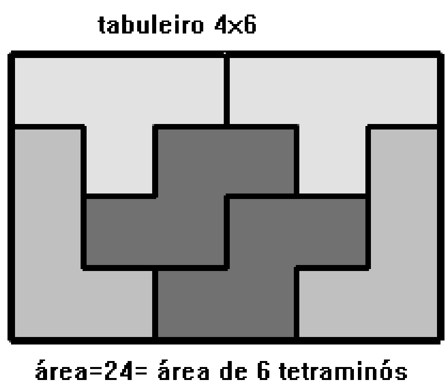
Atividade 3.4. Construir um retângulo 5x9 e pavimentá-lo, usando triminós L e reto.



Atividade 3.5. Pavimentar um retângulo 4x4 usando tetraminós L.



Atividade 3.6. Pavimentar um retângulo 4x6 usando exatamente 2 tetraminós L, 2 T e 2 Z.



É claro que várias outras atividades similares e interessantes relativas à pavimentação podem ser desenvolvidas utilizando domimós, triminós e tetraminós (poliminós de um modo geral). Note, também, que o conceito de *área* pode ser naturalmente explorado com questões como: quantos tetraminós são necessários para pavimentar uma região retangular 8x3? E um quadrado 6x6? Há possibilidade de pavimentar uma região retangular 5x5 usando tetraminós? Utilizando essas atividades em sala de aula podemos conduzir os alunos a descobrirem que: *uma região retangular só* ***terá chance*** *de ser pavimentada com tetraminós se sua área for divisível por 4*. Isso vale mais geralmente (e proporcionalmente) para poliminós. Sugerimos a seguir mais alguns desafios/atividades envolvendo os tetraminós:

1) Construir faixas (cheias) de largura 3, usando apenas tetraminós retos.

2) Construir uma faixa cheia de largura 2, usando apenas tetraminós zigue-zague ou Z. Partir de um modelo e obter a faixa usando apenas translação. E de largura 4? É possível cobrir/pavimentar algum retângulo usando apenas tetraminós Z?

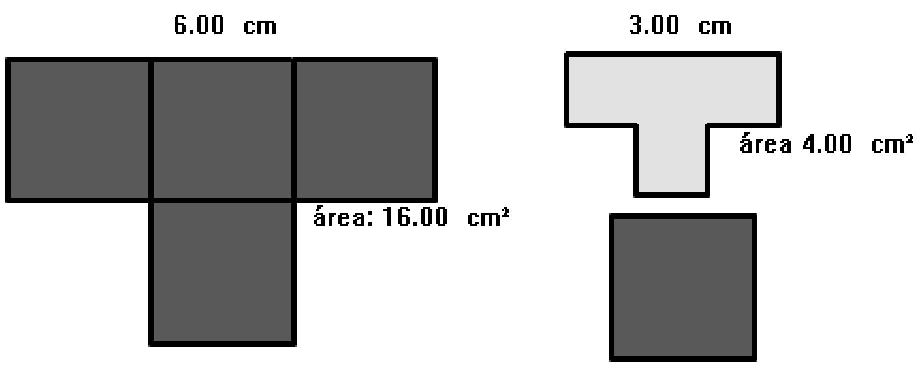
3) Exibir uma pavimentação de um retângulo 4x4 usando tetraminós reto. Há quantos tipos possíveis? Idem para retângulos 4x5 e 4x6. Todos os retângulos podem ser pavimentados fazendo uso apenas de

tetraminós retos? Tente pavimentar um retângulo 5x6. Qual é uma condição necessária para pavimentar um retângulo com tetraminós retos? Tal condição é suficiente? Tente pavimentar um retângulo 6x6.
4) Pavimentar retângulos 2x8, 4x4, 3x8, 4x6, usando apenas tetraminós L.
5) Pavimentar retângulos 4x8 usando só tetraminós T. É possível pavimentar um retângulo 2xn com tetraminós T?

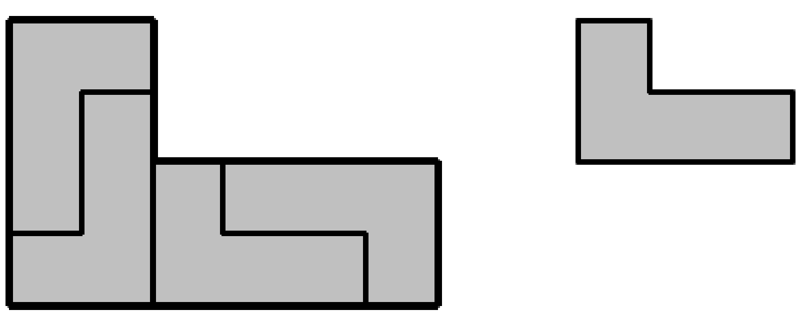
3.2.2: Duplicação de peças (tetraminós):

Podemos ainda discutir o problema de ***duplicar e triplicar tetraminós*** ou mais geralmente poliminós ([6] p. 97 e [1]). (Duplicação aqui é entendida como duplicação dos lados da figura). É interessante explorar com tais atividades a relação área-razão de semelhança. Observar também que a figura obtida é semelhante, mas não congruente e, quando uma peça (tetraminó) é duplicada, sua área necessariamente é quadruplicada.

Atividade 3.7. ***Usando tetraminós quadrados obter a duplicação de todas as peças dos tetraminós***. (Apresentamos aqui apenas a duplicação do tetraminó T).
Compare as medidas dos lados e a área usando ***distância e comprimento*** (entre os pontos extremos dos lados) e ***área*** na caixa 9. (Note que para obter a área do tetraminós duplicado precisamos usar ***polígono*** na caixa 3 e contornar o tetraminó duplicado por seus vértices).



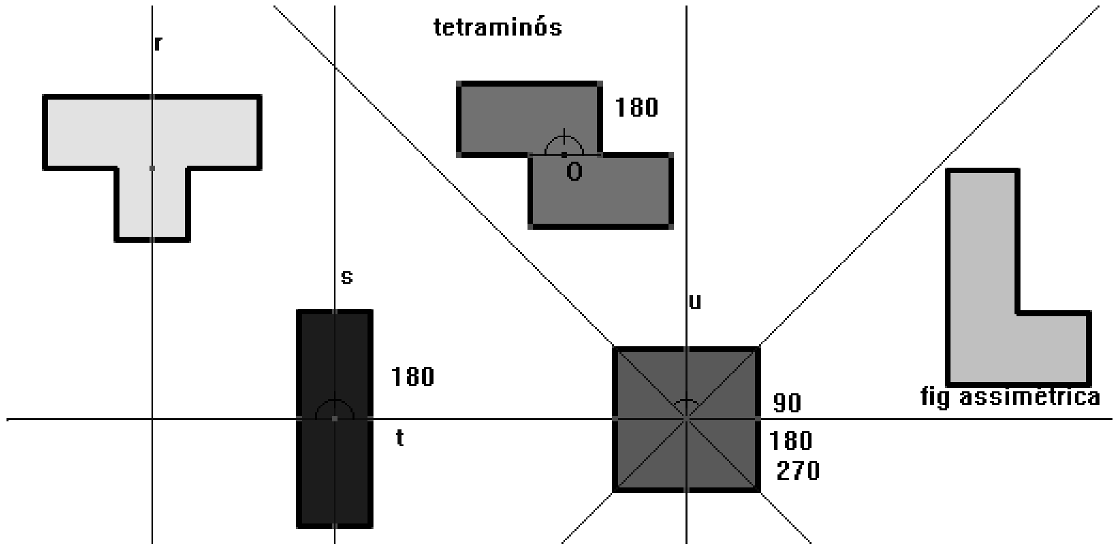
Atividade 3.8 ***Duplicar o tetraminó L (obter uma réplica dupla de L) utilizando peças da mesma forma***:



Observação: Nem sempre é possível duplicar uma peça usando apenas peças do mesmo tipo (por exemplo, os tetraminós, T e Z não podem ser duplicados nessas condições).

3.2.3 Determinando peças que são figuras simétricas:

Atividade 3.9: ***Determinar quais tetraminós são figuras simétricas, determinar os eixos de simetrias, ângulos de rotação, etc... quando for o caso.***



3.3 Atividades com pentaminós:

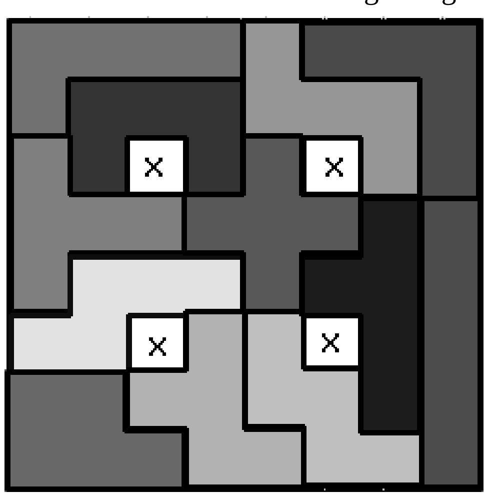
Atividade 3.10: Construir um "tabuleiro 8x8" e verificar se *é possível distribuir os 12 pentaminós (distintos) sobre o tabuleiro de modo a deixar 4 casas (quadradinhos) vazias*.

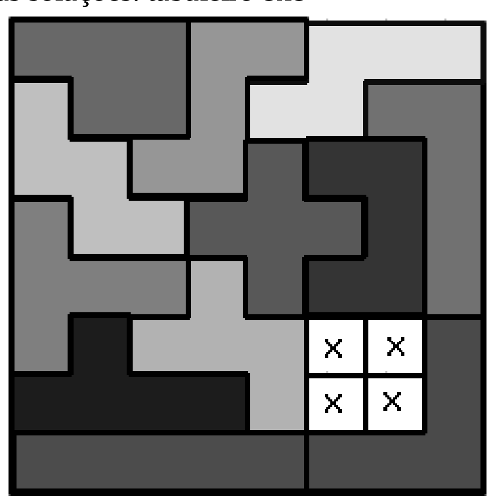
Note que a área ocupada pelos 12 pentaminós é 12.5 = 60, que juntamente com a área dos 4 quadradinhos (que não serão preenchidos) nos dá 64, exatamente a área do tabuleiro. Ressaltamos que a unidade de medida adotada para a construção do tabuleiro deverá ser a mesma usada na construção das peças.

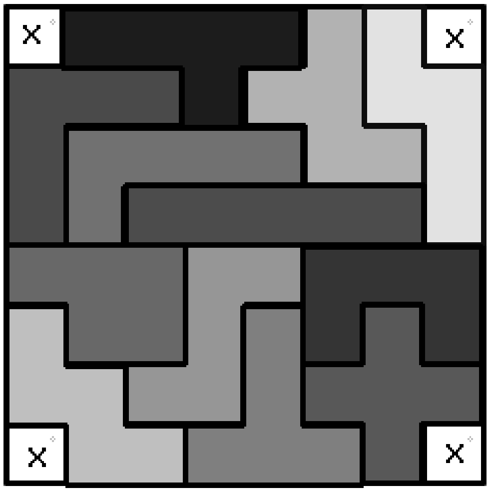
Passos:

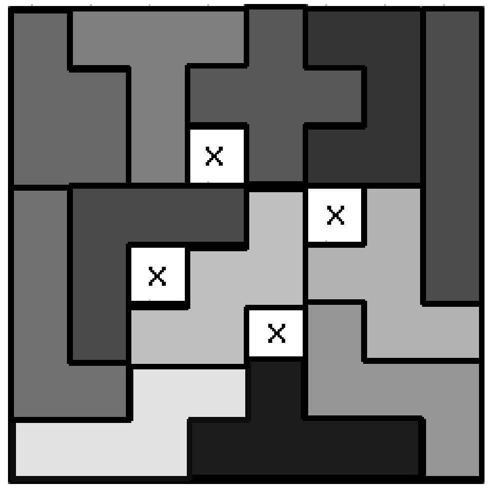
1) Abra o arquivo onde os 12 pentaminós foram construídos.
2) Usando ***polígono regular*** na caixa 3, construa um quadrado 8x8 usando os pontos de grade.
3) Mova as peças usando ***ponteiro*** de modo a cobrir o tabuleiro, deixando apenas 4 casas vazias. Lembramos que em algumas situações necessitaremos construir peças equivalentes (caso elas ainda não tenham sido construídas).

Ilustramos a seguir algumas das soluções: tabuleiro 8x8





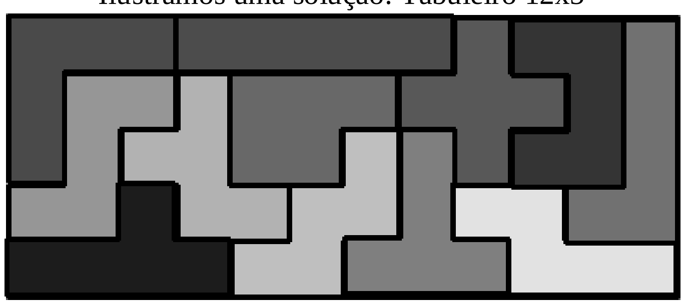




Observe que como que é possível girar e inverter os tabuleiro, a partir dessas 4 soluções já é possível obtermos outras soluções. De fato não se sabe ainda quantas soluções diferentes desse jogo (8x8) de pentaminós existem.

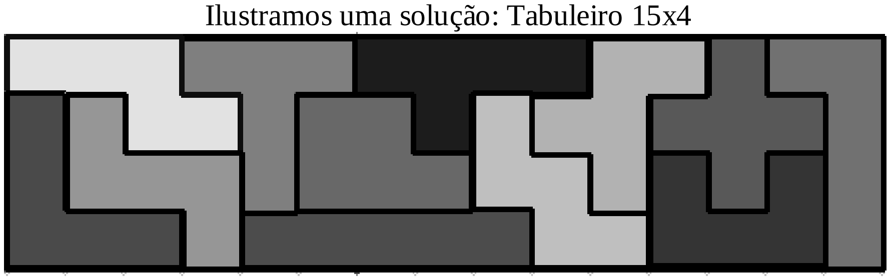
Atividade 3.11: Construir um tabuleiro 12x5 (usando a mesma unidade de medida que foi usada na construção das peças dos pentaminós) e cobrí-lo utilizando os 12 pentaminós (um de cada tipo).

Ilustramos uma solução: Tabuleiro 12x5



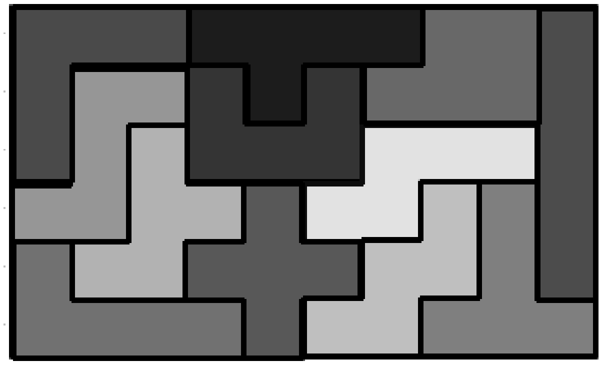
Atividade 3.12 : Construir um tabuleiro 15x4 e cobri-lo utilizando os 12 tipos de pentaminós.

Ilustramos uma solução: Tabuleiro 15x4



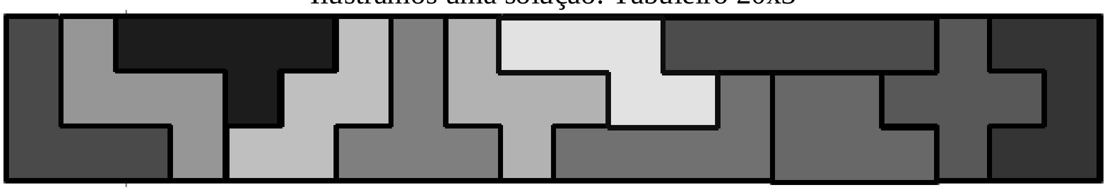
Atividade 3.13: Preencher utilizando os 12 tipos de pentaminós um tabuleiro 10x6.

Ilustramos uma solução: Tabuleiro 10x6



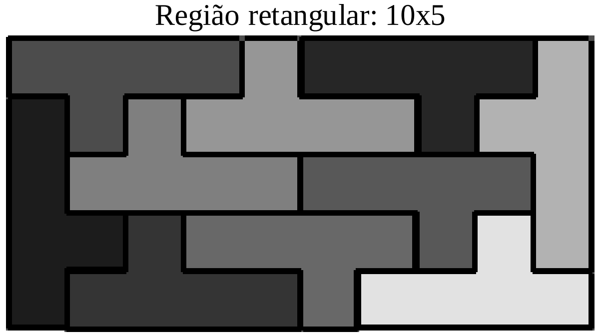
Atividade 3.14: Construir um tabuleiro 20x3 e cobri-lo utilizando os 12 tipos de pentaminós.

Ilustramos uma solução: Tabuleiro 20x3



Atividade 3.15 *(desafio):* Determine a menor região retangular que podemos construir usando apenas pentaminós Y.

Região retangular: 10x5

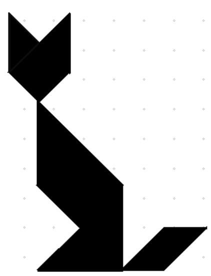


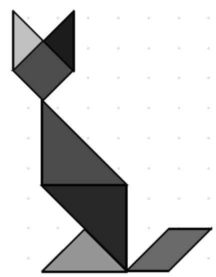
***Observação*:** Como no caso dos tetraminós, outras atividades similares e interessantes podem ser desenvolvidas. Deixamos a cargo do leitor a elaboração de novas atividades**.**

4. Tangram e o Cabri

Não se sabe ao certo a origem do *Tangram*, mas estima-se que tenha originado na China por volta de 250 a.C. Segundo uma lenda, o jogo surgiu quando um monge chinês deixou cair uma porcelana quadrada, que partiu-se em sete pedaços – daí seu nome, que significa "tábua das sete sabedorias" ou " tábua das sete sutilezas". Embora em tempos recentes tenham sido criadas modalidades competitivas de Tangram, o jogo é tradicionalmente praticado individualmente. Uma das principais "propostas" é descobrir como formar com todas as peças do Tangran, desenhos/sombras, como esse (do gato) apresentado abaixo, bem como criar novos desenhos.

gato



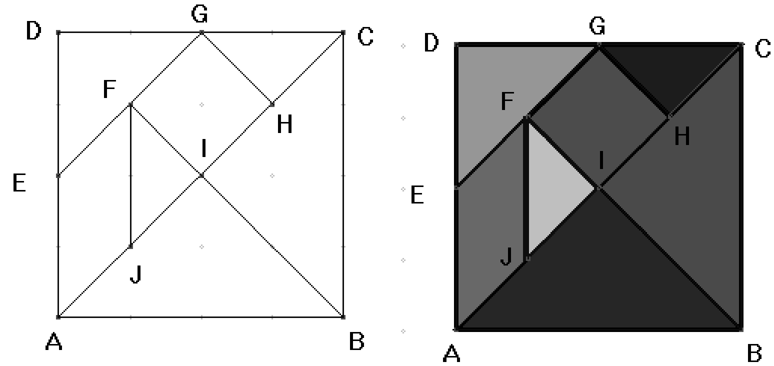


4.1 Construção das peças do Tangram no Cabri:

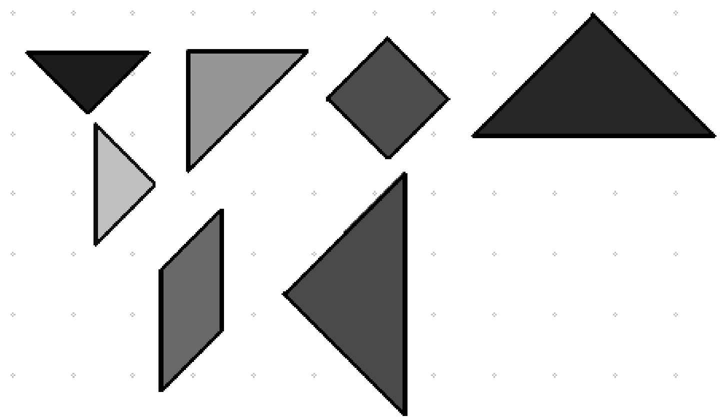
As peças do *Tangram* são construídas a partir de um quadrado. Nesse quadrado são desenhadas as ***sete*** figuras geométricas básicas do Tangram: ***cinco triângulos*** (dois triângulos maiores, um médio e dois pequenos); ***um quadrado*** e ***um paralelogramo***, com certas propriedades de simetria, que podem ser separadas e posteriormente movimentadas. Apresentaremos a seguir os passos para a construção.

Passos:

1) Selecione ***mostrar eixos*** na caixa n^o 11 e clique na tela de trabalho, em seguida selecione ***definir grade***.
2) Usando a ferramenta ***polígono*** na caixa n^o 3, construa um quadrado 4x4, usando 4 pontos da grade. Rotule seus vértices por A, B, C e D, usando a ferramenta ***rótulo*** na caixa 10.
3) Usando ***segmento*** na caixa 3, construa os segmentos AC, EG, FB, FJ e GH, como mostrado na figura abaixo (rotular os pontos E, F, G, H, I, J).
4) Com a ferramenta ***polígono*** na caixa 3 e usando os pontos de grade, construa os *triângulos* AIB, BIC, CHG, DEG e FJI, o *quadrado* FIHG, e o *paralelogramo* AJFE.
5) Para os contornos ficarem mais destacados, use ***cor*** (escolha o preto) e em seguida clique sobre cada polígono. Usando ***espessura*** (média) clique novamente em cada polígono para obter um contorno mais forte.
6) Usando ***preencher*** na caixa 11, selecione uma cor e clique sobre um polígono. Repita para os demais.
7) Novamente selecionando cada polígono com ***ponteiro*** e usando **Ctrl C** e **Ctrl V** faça as cópias de modo que agora possamos arrastá-las, usando a mesma técnica utilizada na construção dos poliminós.



Para obter as peças equivalentes (por isometrias), basta, como nos poliminós, aplicar movimentos de reflexão/simetria, translação e rotação. A partir daí, estamos prontos para ***brincar com o Tangram virtual***. As *peças virtuais* construídas no Cabri estão representadas a seguir :

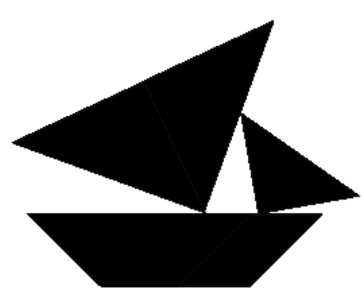


Observação: Poderíamos ter construído as peças do Tangram sem usarmos as linhas de grade. Neste caso, durante a construção outros conceitos geométricos poderiam ser explorados como perpendicularismo, ponto médio, ponto de interseção, etc...

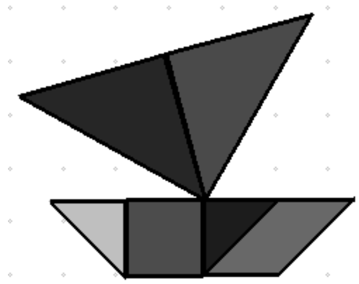
Propomos a seguir algumas atividades (desafios) para serem desenvolvidas utilizando o Tangram virtual.:

Atividade 4.1: Construir utilizando todas as peças do Tangram (virtual), o ***gato*** (inicialmente apresentado).

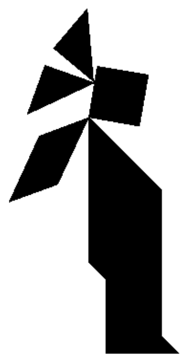
Atividade 4.2: ***Construir utilizando as peças do Tangram, o seguinte barco***.



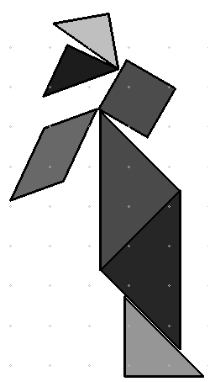
Solução:



Atividade 4.3: Construir o índio abaixo com as peças do Tangram.

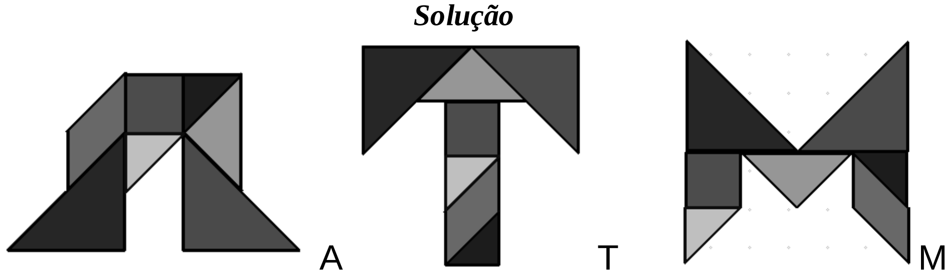


Solução:



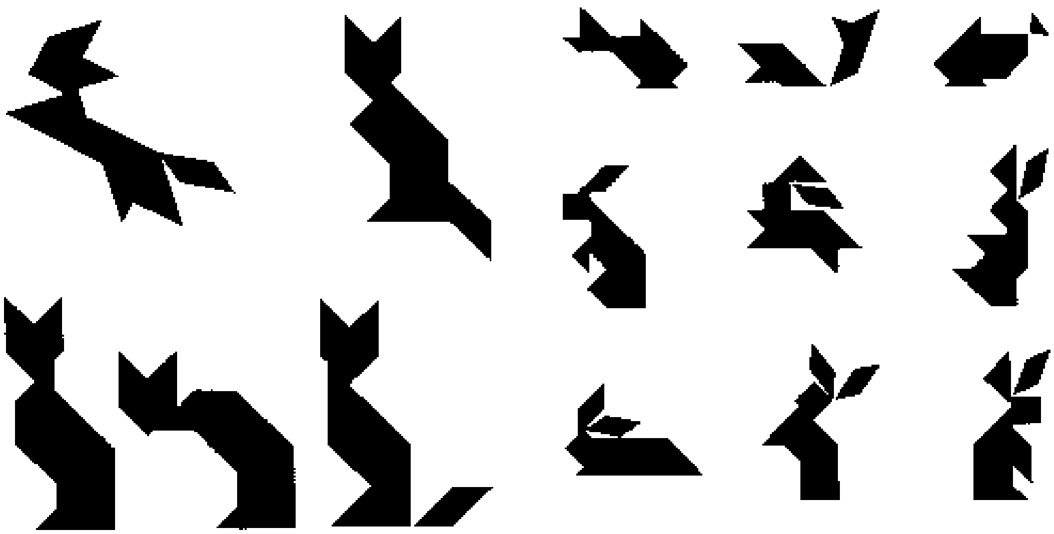
Atividade 4.4: ***Criar com as peças do Tangram, as letras A, T e M do alfabeto.***

Solução

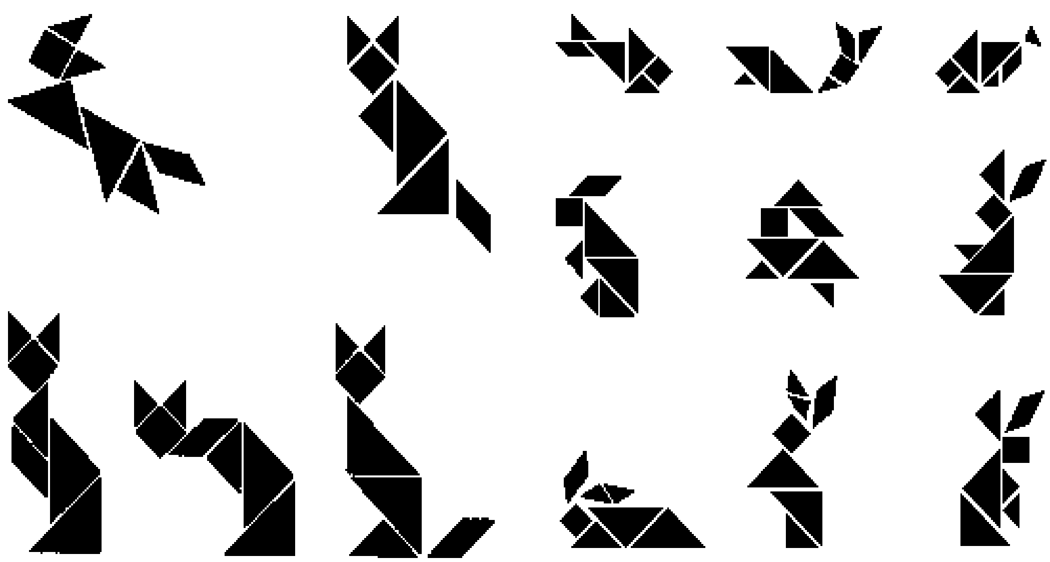


Complementando, apresentamos a seguir algumas figuras/desenhos de animais que podem ser obtidos com as peças do Tangram bem como a solução para as letras do alfabeto. É claro que muitas outras figuras podem ser propostas, basta usarmos nossa criatividade e imaginação.

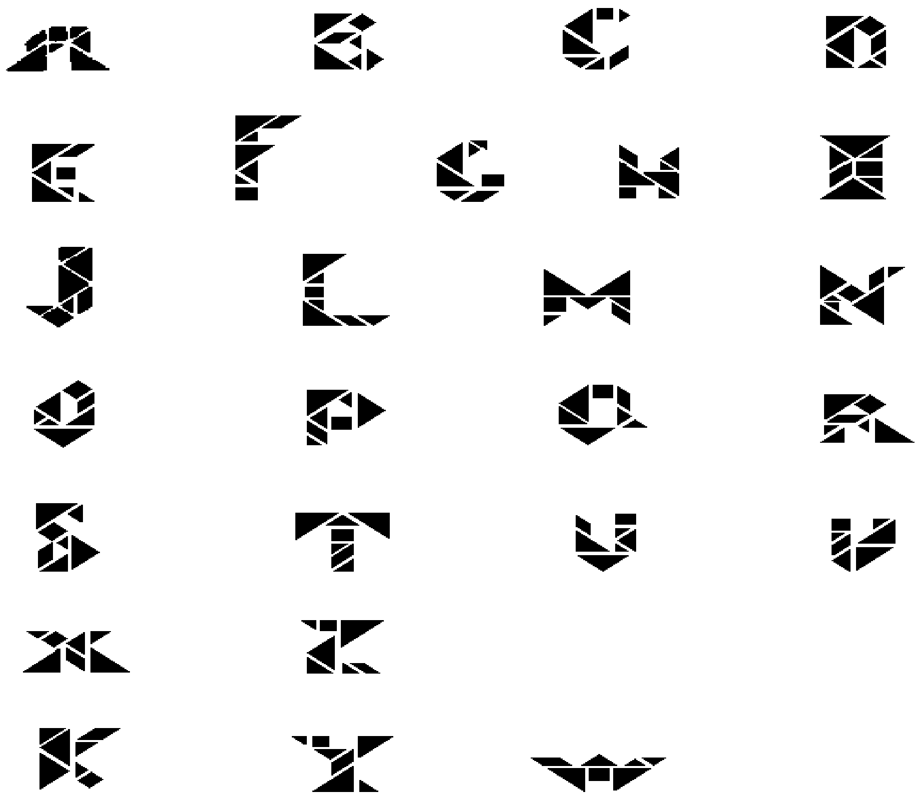
Animais



Soluções



Letras/solução



Finalmente observamos que assim como com os tetraminós, outras atividades podem ser desenvolvidas com o *Tangram* (*virtual*) e o auxílio do software Cabri. Por exemplo, podemos explorar as simetrias de cada peça. Podemos também explorar conceitos básicos como o de área e o de fração por comparação das áreas das peças que compõem o *Tangram*. Uma seqüência de atividades que podem ser desenvolvidas neste sentido é a apresentada a seguir:

1) Abra o arquivo com as peças soltas do *Tangram* e obtenha, usando a ferramenta ***área*** do Cabri, a área de todas as peças do *Tangram*. Observe que os dois triângulos pequenos além de possuírem a mesma área são congruentes. Idem para os dois triângulos grandes.

2) Compare a área do paralelogramo com as dos triângulos pequenos.

3) Compare a área do triangulo médio com as dos triângulos pequenos.

4) Compare a área do quadrado com a área do paralelogramo.

5) Compare a área do quadrado com a área do triângulo médio.

É interessante que as atividades 2 a 5 também sejam exploradas usando pavimentação, mais precisamente, recobrindo com a peça menor e suas cópias (obtidas utilizando Ctrl c para copiar e Ctrl V para colar) a figura maior (quando possível). Podemos também obter as figuras equivalentes por isometrias usando a ferramenta ***giro*** na caixa 1).

6) Construa (usando *linha de grade*) um quadrado “grande” que denotaremos por “Q” de lados igual ao que usamos para construir as peças do *Tangram*. Recubra-o usando apenas triângulos pequenos (use cópias). Quantos triângulos foram necessários para cobri-lo?

7) Recubra o quadrado Q com triângulos médios. Idem com os triângulos grandes.

8) Em cada caso, anote o resultado das comparações, observando qual a relação entre a área do quadrado Q e a área das figuras utilizadas.

8) Recubra o paralelogramo, o quadrado pequeno (peça do tangram) e o triângulo médio com triângulos pequenos. Compare as áreas.

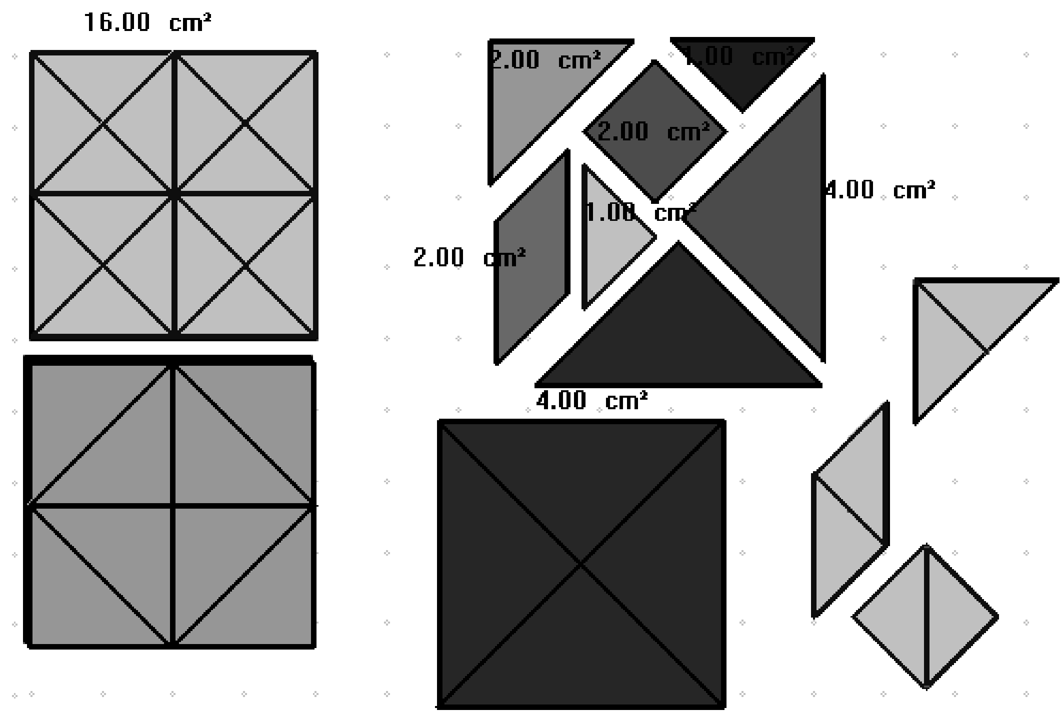
Como resultado dessas comparações podemos observar que:

a) A área do quadrado grande é 16 vezes a área do triângulo pequeno ou equivalentemente, a área do triângulo pequeno (que denotaremos por “Tp”), é 1/16 da área da peça quadrada “Q” (ou seja, Área(Tp) = (1/16).Área (Q)).

b) A área do quadrado pequeno “Qp” (peça do Tangram) é 2 vezes a área de Tp. Analogamente para o paralelogramo “Pa”. Conseqüentemente, a Área (Qp)= (1/8).Área(Q) e Área(Pa) = (1/8).Área(Q).

c) A área do quadrado grande Q é 4 vezes a área do triângulo grande Tg ou Área (Tg)= (1/4)Área(Q).

d) A área do quadrado grande Q é 8 vezes a área do triângulo médio Tm ou Área(Tm)= (1/8)Área(Q).



Desafiamos ao leitor interessado a usar sua criatividade no sentido de complementar o trabalho com frações propondo atividades que envolvam, por exemplo, a soma das frações obtidas.

Referências Bibliográficas:

[1] Barbosa, R.M.; Domingues, H.H; Silva., E. A. *Atividades Educacionais com Tetraminós*, SJRP,1995.
[2] Fanti, E. L. C., Silva, A. F. *Informática no Ensino de Matemática*, XXVI CNMAC, p.1-32, Notas de Minicurso, SJRP, 2003.
[3] Gardner, M. *Divertimentos Matemáticos*, Tradução de Bruno Mazza, IRASA- SP, 1967.
[4] Gerônimo, J. R., Franco, V. S., *Simetrias no Plano: uma abordagem geométrica e algébrica*, 2002.
[5] Gremillion, D., Keyton, D.; *Cabri Géomètre II, Guia de utilização para Windows*, *Texas Instruments*, 1997.
[6] Kodama, H.Y, Silva, A. F. *Poliminó*s, Interciência- Ciências Exatas, no. 2, p.95-102, 2004.
[7] Lima, E. L. *Isometrias*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1996.
[8] Loureço, M. L. *Cabri - Géomètre II, Introdução e Atividades*, FAFICA, 2000.
Sites: http://www.artefatospoeticos.hpg.ig.com.br/
http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26s3.html