II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

Universidade Federal da Bahia, Salvador - BA

25 a 29 de outubro de 2004

Frações Contínuas: algumas propriedades e aplicações

Eliana Xavier Linhares de Andrade

Cleonice Fátima Bracciali

Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Câmpus de São José do Rio Preto - SP

Sumário

1 Conceitos básicos **1**

2 Expansão de números racionais em frações contínuas **1**

3 Aspectos históricos **6**

4 Convergentes de frações contínuas simples finitas **7**

5 Expansão de números irracionais em frações contínuas **11**

5.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas simples 11

5.2 Outras expansões para números irracionais 14

6 Convergentes de frações contínuas simples infinitas **16**

6.1 Convergentes de frações contínuas simples infinitas 16

6.2 Alguns resultados sobre convergência 17

6.3 Frações contínuas periódicas 24

6.4 Seqüência de Fibonacci 27

7 Expansão de funções em frações contínuas **29**

8 Aplicações **33**

8.1 Aproximações racionais para números irracionais 33

8.2 Modelo para construção de calendário 42

Referências **44**

1 Conceitos básicos

Uma *fração contínua* é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}} \quad , \tag{1.1}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots$ e $b_1, b_2, b_3, \dots$ são números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito. Podemos, também, denotar a fração contínua (1.1) da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 +} \dots \quad ,$$

onde $\dfrac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, ...$, são chamados de *quocientes parciais*. Chamaremos a_i e b_i, respectivamente, de denominador e numerador do quociente parcial $\dfrac{b_i}{a_i}$.

Uma forma mais simples de (1.1) é a *fração contínua simples* ou *fração contínua regular*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \dots \quad ,$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots$ são números inteiros positivos e a_0, um inteiro qualquer.

Uma *fração contínua simples finita* tem a forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \dots \frac{1}{+ a_n},$$

que também é denotada por $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.

2 Expansão de números racionais em frações contínuas

Veremos que, por meio de simples manipulações, podemos expressar um número racional como uma fração contínua. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{87}{59} &= 1 + \frac{28}{59} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{59}{28}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{28}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 2, 9, 3]. \end{aligned}$$

Observamos que o número $\dfrac{87}{59}$ admite uma expansão em fração contínua simples finita.

A pergunta natural que se coloca é: qualquer número racional possui uma expansão em fração contínua simples finita? Caso a resposta seja afirmativa, a expansão é única?

Antes, vamos considerar mais alguns exemplos:

1)

$$\begin{aligned}\frac{87\times 3}{59\times 3} &= \frac{261}{177} = 1+\frac{84}{177} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{177}{84}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{84}}\\ &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{84}{9}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{3}{9}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}} = [1;2,9,3].\end{aligned}$$

2)

$$\frac{59}{87} = 0+\cfrac{1}{\cfrac{87}{59}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}}} = [0;1,2,9,3].$$

3)

$$\begin{aligned}-\frac{87}{59} &= -1-\frac{28}{59} = -1-\frac{28}{59}+\frac{59}{59}-1 = -2+\frac{31}{59}\\ &= -2+\cfrac{1}{\cfrac{59}{31}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{28}{31}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{31}{28}}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{28}}}\\ &= -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{28}{3}}}} = -2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}}}\\ &= [-2;1,1,9,3].\end{aligned}$$

A resposta à questão acima colocada é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração: A demonstração da primeira parte é imediata.

Para a recíproca, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Pelo algoritmo da divisão, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q},$$

onde $\quad 0 \leq r_1 < q \quad$ e $\quad a_0 = \left\lfloor \dfrac{p}{q} \right\rfloor$. $\quad \lfloor a \rfloor$ significa maior inteiro menor que a.

Se $r_1 = 0$, $\dfrac{p}{q}$ é um número inteiro e, então, o processo termina. Caso contrário, escrevemos

$$\frac{p}{q} \;=\; a_0 + \frac{1}{\dfrac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Repetimos, agora, o mesmo procedimento com $\dfrac{q}{r_1}$ e obtemos

$$\frac{q}{r_1} \;=\; a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, então o processo termina e, assim,

$$\frac{p}{q} \;=\; a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o mesmo procedimento com a fração $\dfrac{r_1}{r_2}$.

Observamos que o processo termina quando $r_n = 0$ para algum n, o que ocorre, pois $q > r_1 > r_2 > \ldots$ é uma seqüência decrescente de inteiros positivos. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q}, && 0 < r_1 < q,\\
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1}, && 0 < r_2 < r_1,\\
&\vdots\\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, && 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1}, && r_n = 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}\\
&= [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}],
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. ■

Como $\dfrac{1}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{(a_{n-1} - 1) + \dfrac{1}{1}}$, segue que $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} - 1, 1]$ é também uma expansão de $\dfrac{p}{q}$. Ressalva feita à possibilidade de expressar um número inteiro k também como $(k-1)+1$, a unicidade da expansão segue do algoritmo da divisão. Por exemplo, podemos escrever

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} = [1;2,3,4]$$

como

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4-1+\cfrac{1}{1}}}} = [1;2,3,3,1].$$

Suponhamos, agora, $r_{n+1} = 0$ para algum n. Procedendo como na demonstração do teorema anterior, obtemos um método para encontrar a representação de $\frac{p}{q}$ em fração contínua simples, da seguinte maneira:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} \quad \Rightarrow \quad p = a_0 q + r_1, \qquad 0 < r_1 < q.$$

Mas, podemos escrever

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}.$$

Repetindo o mesmo procedimento, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} && \Longrightarrow \; q = a_1 r_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1, \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} && \Longrightarrow \; r_1 = a_2 r_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2, \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} && \Longrightarrow \; r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1}, \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n + \frac{r_{n+1}}{r_n} && \Longrightarrow \; r_{n-1} = a_n r_n, \quad r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Este é o algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum entre p e q (que é r_n).

		a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-1}	r_n	$r_{n+1} = 0$

Precisamos demonstrar que existe uma única representação de $\frac{p}{q}$ da forma $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$, com $a_n \ge 2$. Se $a_n = 1$, a representação não é única.

Do algoritmo de Euclides, temos que $a_n = \frac{r_{n-1}}{r_n}$. Como $r_{n-1} > r_n$, obtemos $a_n > 1$. Sendo a_n um inteiro positivo, segue que $a_n \ge 2$. A unicidade da representação decorre do fato de ser única a representação para $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ através do algoritmo de Euclides, com $a_n \ge 2$.

Neste texto, consideraremos $a_n \ge 2$ para frações contínuas simples finitas $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Exemplo 2.1 *Encontre a fração contínua que representa o número* $\dfrac{97}{35}$ *usando o algoritmo de Euclides.*

Como

$$\begin{array}{rcll} 97 & = & \mathbf{2}\cdot 35 & + & 27, \\ 35 & = & \mathbf{1}\cdot 27 & + & 8, \\ 27 & = & \mathbf{3}\cdot 8 & + & 3, \\ 8 & = & \mathbf{2}\cdot 3 & + & 2, \\ 3 & = & \mathbf{1}\cdot 2 & + & 1, \\ 2 & = & \mathbf{2}\cdot 1 & + & 0, \end{array},$$

ou seja,

		2	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**
97	35	27	8	3	2	1	0

temos

$$\frac{97}{35} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = [2; 1, 3, 2, 1, 2].$$

Propriedade 2.1 *Sejam* $p > q$ *e* $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. *Então,* $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$. *Reciprocamente, se* $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$, *então* $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Demonstração: Como, por hipótese, $p > q$, então $\dfrac{q}{p} = 0 + \dfrac{1}{\frac{p}{q}}$. Mas, $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ e, assim,

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Verifiquemos que a recíproca também vale. Se, por hipótese,

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n] = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

então,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,$$

onde

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

■

3 Aspectos históricos

Citaremos, agora, alguns aspectos da história das frações contínuas. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados nas referências [1, 6, 10, 16].

- Os gregos conheciam o algoritmo de Euclides (306A.C. - 283A.C.) para o cálculo do máximo divisor comum (mdc), apesar de não terem conhecimento sobre frações contínuas.

- Brezinski afirma, em [1], que frações contínuas foram usadas durante séculos antes de seu próprio descobrimento. O primeiro uso conhecido de frações contínuas foi dado por Bombelli (1526-1573) em 1572 na aproximação de $\sqrt{13}$ por

$$\sqrt{13} \simeq 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

  No século XVI se conhecia a seguinte aproximação

$$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}.$$

- Cataldi (1548-1626) (italiano considerado o descobridor das frações contínuas), em 1613, obteve

$$\sqrt{18} \simeq 4 \& \cfrac{2}{8 \& \cfrac{2}{8 \& \cfrac{2}{8 \ddots}}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}},$$

  que ele abreviou como

$$4 \; \& \frac{2}{8.} \; \& \frac{2}{8.} \; \& \frac{2}{8.} \; \cdots .$$

- A primeira expansão em fração contínua infinita envolvendo π ($\simeq$ 1658), sem prova, foi dada por Lord Brouncker (1620 - 1686), 1º presidente da Royal Society of London. Ele encontrou

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}} = 1+\frac{1^2}{2\,+}\,\frac{3^2}{2\,+}\,\frac{5^2}{2\,+}\,\frac{7^2}{2\,+}\,\frac{9^2}{2\,+}\,\ldots,$$

demonstrada por Euler (1707-1783) em 1775. Acredita-se que tenha sido obtida através da representação

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots},$$

devido a Wallis (1655), que marca o início do desenvolvimento da teoria de frações contínuas.

- Euler sistematizou o desenvolvimento da teoria de frações contínuas. Em 1737, encontrou o seguinte desenvolvimento para o número e:

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$$

ou,

$$e = 2+\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{6\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{8\,+}\,\cdots.$$

- Lambert, em 1766, mostrou que

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

4 Convergentes de frações contínuas simples finitas

Seja $\frac{p}{q}$ uma fração racional, cuja expansão em fração contínua simples finita é dada por:

$$\frac{p}{q} = a_0+\frac{1}{a_1\,+}\,\frac{1}{a_2\,+}\,\ldots\,\frac{1}{+\,a_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]. \tag{4.1}$$

Consideremos, agora, as frações contínuas

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{1} \\ c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

obtidas de (4.1), considerando-se, sucessivamente, o primeiro termo da expansão, o primeiro e segundo termos da expansão e, assim sucessivamente, até o $(n+1)$-ésimo termo.

Definição 4.1 *Chamamos convergente de ordem i da fração contínua* (4.1)*, o número*

$$c_i = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \ \dots \ \frac{1}{+ a_i}, \quad 0 \le i \le n.$$

Note que o n-ésimo convergente de (4.1), c_n, é a própria fração contínua.

Definição 4.2 *Os números p_i e q_i tais que $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ são chamados, respectivamente, numerador e denominador do i-ésimo convergente.*

Vamos, agora, apresentar algumas propriedades algébricas dos convergentes de frações contínuas simples.

Dada a fração contínua (4.1), podemos escrever

$$c_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}.$$

Assim, $\quad p_0 = a_0 \quad$ e $\quad q_0 = 1$.

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Logo, $\quad p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad$ e $\quad q_1 = a_1$.

$$\begin{aligned} c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} \\ &= a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_0(a_2 a_1 + 1) + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2} \end{aligned}$$

e, então, $\quad p_2 = a_2 p_1 + p_0 \quad$ e $\quad q_2 = a_2 q_1 + q_0$.

Assim procedendo, parece ser possível encontrar uma expressão simples para o numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i.

Teorema 4.1 *O numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ satisfazem às equações*

$$\begin{cases} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{4.2}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 &= a_0 \\ q_0 &= 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p_1 &= a_1 a_0 + 1 \\ q_1 &= a_1 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Demonstração: Os cálculos que fizemos para c_0 e c_1 mostram que as condições iniciais estão satisfeitas. O cálculo feito para c_2 mostra, também, que as equações estão satisfeitas para $i = 2$.

Vamos, então, supor que o resultado seja válido para algum inteiro k, $k \geq 2$, e mostremos que é verdadeiro para $k + 1$.

Temos que

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \ldots + \frac{1}{a_{k-1} +} \frac{1}{a_k +} \frac{1}{a_{k+1}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \ldots + \frac{1}{a_{k-1} +} \frac{1}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)} \\ &= \left[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo, c_{k+1} é o k-ésimo convergente da fração contínua $[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k^*, a_{k+2}, \ldots, a_n]$ com $a_k^* = a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$. Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(a_{k+1} a_k + 1) p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{(a_{k+1} a_k + 1) q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \end{aligned}$$

■

Observações:

1) $a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$ não é, necessariamente, um número inteiro, apesar de a_k e a_{k+1} o serem.

Na demonstração do teorema não foi usado, em momento algum, o fato de os a_i serem inteiros. A mesma demonstração é válida quando os a_i são números reais ou complexos.

2) Note que

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1},$$

onde definimos $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$, lembrando que $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$.

Com essas definições para p_{-1} e q_{-1}, as equações dadas anteriormente são satisfeitas também para $i = 1$. Podemos, então, reescrevê-las como

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases},$$

observando que p_{-1} e q_{-1} não definem numerador e denominador de convergente.

Teorema 4.2 (Fórmula do Determinante)

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}, \quad i \geq 0, \tag{4.4}$$

onde p_i e q_i são os numeradores e denominadores, respectivamente, dos convergentes $c_i, i \geq 0$, de uma fração contínua simples.

Demonstração: Cálculos simples mostram que (4.4) se verifica para $i = 0, 1$. De fato,

- se $i = 0$, $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = -1 = (-1)^{-1}$,
- se $i = 1$, $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 p_0 + p_{-1}) q_0 - p_0 (a_1 q_0 + q_{-1}) = 1 = (-1)^0$.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para $i \leq k$, com $k \geq 0$, ou seja, $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}$, para $i = 0, 1, 2, ..., k$.

Mostremos que vale para $i = k + 1$. Assim, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} &= (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_i - p_i (a_{i+1} q_i + q_{i-1}) \\ &= -(p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i) \\ &= -(-1)^{i-1} = (-1)^i. \end{aligned}$$

■

Corolário 4.1 *Todo convergente $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, $i \geq 1$, de uma fração contínua simples é um racional irredutível, isto é, $(p_i, q_i) = \pm 1$, onde (a, b) significa o máximo divisor comum entre a e b.*

Demonstração: Temos que

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}, \quad i \geq 0.$$

Suponhamos que exista r inteiro, tal que $p_i = r p_i'$ e $q_i = r q_i'$, onde p_i' e $q_i' \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$r p_i' q_{i-1} - p_{i-1} r q_i' = (-1)^{i-1}.$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por r, temos que

$$p_i' q_{i-1} - p_{i-1} q_i' = \frac{(-1)^{i-1}}{r} \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $r = \pm 1$, o que demonstra o resultado. ■

5 Expansão de números irracionais em frações contínuas

5.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas simples

Para construir a expansão de um número irracional em fração contínua simples utilizaremos substituições sucessivas, da forma que descreveremos a seguir. Sejam x um número irracional qualquer e $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Podemos escrever x como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \text{onde} \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1.$$

Então, $x_1 = \dfrac{1}{x - a_0} > 1$ é um número irracional.

Da mesma forma, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \text{onde} \quad a_1 = \lfloor x_1 \rfloor \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

e obtemos $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$, que é, também, um número irracional.

Repetindo-se esse processo, obtemos, sucessivamente, as equações

$$\begin{array}{rcll} x & = & a_0 + \dfrac{1}{x_1}, \quad x_1 > 1, & \\ x_1 & = & a_1 + \dfrac{1}{x_2}, \quad x_2 > 1, & \quad a_1 \geq 1, \\ \vdots & & & \\ x_n & = & a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, & \quad a_n \geq 1, \\ \vdots & & & \end{array}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são inteiros e $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ são irracionais.

Notemos que este processo não termina, pois isto só ocorreria se $x_n = a_n$ para algum n, o que é impossível, pois x_n é irracional para todo n.

Fazendo substituições apropriadas, obtemos a fração contínua simples infinita

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \\ &= \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \end{aligned}$$

que também denotamos por $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo 5.1 *Expressar $\sqrt{2}$ como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 1.414213...\rfloor = 1$. Podemos encontrar a fração contínua da seguinte forma

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Continuando, temos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots \quad .$$

Exemplo 5.2 *Expressar $-\sqrt{2}$ como uma fração contínua simples.*

Como $\lfloor -\sqrt{2}\rfloor = \lfloor -1.414213...\rfloor = -2$, então $a_0 = -2$.

$$-\sqrt{2} = -2 + (-\sqrt{2} + 2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_1} = -\sqrt{2} + 2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \;\Rightarrow\; a_1 = 1.$$

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2} = 1 + (\frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+2}{2} - 1} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots \quad .$$

Logo,

$$-\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots \quad .$$

Exemplo 5.3 *Expressar $\sqrt{13}$ como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor\sqrt{13}\rfloor = \lfloor 3.605551...\rfloor = 3$. Logo, $a_0 = 3$.

$$\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_1} = \sqrt{13} - 3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \;\Rightarrow\; a_1 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + (\frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} \Rightarrow a_2 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + (\frac{\sqrt{13}+1}{3} - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} - 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{3} - 1} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} \Rightarrow a_3 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + (\frac{\sqrt{13}+2}{3} - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} - 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+2}{3} - 1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} \Rightarrow a_4 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + (\frac{\sqrt{13}+1}{4} - 1) \Rightarrow \frac{1}{x_5} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} - 1 \Rightarrow x_5 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13}+3}{1} \Rightarrow a_5 = 6,$$

$$\frac{\sqrt{13}+3}{1} = 6 + (\frac{\sqrt{13}+3}{1} - 6) \Rightarrow \frac{1}{x_6} = \frac{\sqrt{13}+3}{1} - 6 \Rightarrow x_6 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+3}{1} - 6} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \Rightarrow a_6 = 1.$$

Então,

$$a_7 = 1, \quad a_8 = 1, \quad a_9 = 1, \quad a_{10} = 6, \quad a_{11} = 1, \ldots .$$

Logo,

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\ldots .$$

Quando os denominadores dos quocientes parciais se repetem, podemos usar a seguinte notação

$$\sqrt{2} \;=\; [1; 2, 2, 2, ...] \;=\; [1; \overline{2}].$$

Outros exemplos

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} &= [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}].\\
\sqrt{18} &= [4; \overline{4, 8}].\\
\sqrt{19} &= [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}].\\
\sqrt{53} &= [7; \overline{3, 1, 3, 14}].\\
\sqrt{82} &= [9; \overline{18}].
\end{aligned}$$

Exemplo 5.4 *Expressar π como uma fração contínua simples.*

Note que $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3.1415926535897932... \rfloor = 3$. Logo, $a_0 = 3$.

$$\begin{aligned}
\pi = 3 + 0.14159265358979... \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1} = 0.14159265358979...\\
&\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{0.14159265358979...}\\
&\Rightarrow \quad x_1 = 7.06251331041...\\
&\Rightarrow \quad x_1 = 7 + 0.06251331041...
\end{aligned}$$

Logo, $a_1 = 7$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_2} = 0.06251331041... \quad &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{0.06251331041...} = 15.9965932606...\\
&\Rightarrow \quad x_2 = 15 + 0.9965932606...
\end{aligned}$$

Logo, $a_2 = 15$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_3} = 0.9965932606... \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 1.00341838495...\\
&\Rightarrow \quad x_3 = 1 + 0.00341838495...
\end{aligned}$$

Logo, $a_3 = 1$.

$$\frac{1}{x_4} = 0.00341838495... \quad \Rightarrow \quad x_4 = 292.535807004...$$
$$\Rightarrow \quad x_4 = 292 + 0.535807004...$$

Logo, $a_4 = 292$.

Continuando desta forma, encontramos,

$$a_5 = 1 \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 2, ...$$

Assim,

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{14+}\cdots$$

Exemplo 5.5 *Alguns exemplos de expansões em frações contínuas simples*

$$e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$$

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\frac{1}{26+}\frac{1}{30+}\frac{1}{34+}\frac{1}{38+}\frac{1}{42+}\cdots$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\frac{1}{22+}\frac{1}{26+}\frac{1}{30+}\frac{1}{34+}\frac{1}{38+}\frac{1}{42+}\cdots$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{9+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{13+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{17+}\cdots$$

5.2 Outras expansões para números irracionais

Quando $x = \sqrt{N}$, onde $N \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, podemos, também, encontrar expansões em frações contínuas, que podem não ser simples, da seguinte forma:

• encontramos a e $b \in \mathbb{N}$ tais que $N = a^2 + b$ e calculamos

$$\sqrt{N} - a = \frac{(\sqrt{N}-a)(\sqrt{N}+a)}{\sqrt{N}+a} = \frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a} = \frac{b}{2a+\sqrt{N}-a},$$

• em seguida, substituímos o valor de $\sqrt{N} - a$, que aparece do lado direito da equação acima, por todo o segundo membro

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}}},$$

• procedendo assim, sucessivamente, encontramos

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}} \quad .$$

Exemplo 5.6 *Expressar $\sqrt{2}$ como uma fração contínua.*

Como $2 = 1^2 + 1$, então

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1+1-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$$

e obtemos

$$\sqrt{2} - 1 \;=\; \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} \;=\; \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}} \;=\; \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}} \quad .$$

Logo,

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} \;=\; 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\ldots \quad ,$$

que é a fração contínua simples encontrada no Exemplo 5.1.

Exemplo 5.7 *Expressar $\sqrt{18}$ como uma fração contínua.*

Como $18 = 4^2 + 2$, seguindo o mesmo raciocínio, encontramos

$$\sqrt{18} \;=\; 4 + \cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}} \;=\; 4 + \frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\ldots \quad .$$

Neste caso, conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $b = 2$ divide $2a = 8$. Para isto, basta dividir numerador e denominador de algumas frações intermediárias por b. Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{18} \;&=\; 4 + \frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{\div 2}{\div 2}\left\{\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\ldots\right\}\right\} \\
\sqrt{18} \;&=\; 4 + \frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}+\frac{2/2}{8/2+}\,\frac{2/2}{8}+\frac{2/2}{8/2+}\,\ldots \\
&=\; 4 + \frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{8+}\,\ldots \quad .
\end{aligned}$$

Exemplo 5.8 *Expressar $\sqrt{13}$ como uma fração contínua.*

Como podemos escrever $13 = 3^2 + 4$, então

$$\sqrt{13} - 3 = \frac{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}{\sqrt{13}+3} = \frac{13-9}{\sqrt{13}+3+3-3} = \frac{4}{6+\sqrt{13}-3} \,.$$

Seguindo o raciocínio anterior, obtemos

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\ldots \quad .$$

Neste caso, não conseguimos transformar esta fração contínua numa fração contínua simples, pois $b = 4$ não divide $2a = 6$.

Exemplo 5.9 *Encontrar uma fração contínua para expressar $\sqrt{6}$.*

Analogamente, podemos escrever $6 = 2^2 + 2$ e, assim, obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &= 2 + \frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\frac{2}{4+}\,\ldots\\ &= 2 + \frac{2/2}{4/2+}\,\frac{2/2}{4+}\,\frac{2/2}{4/2+}\,\frac{2/2}{4+}\,\frac{2/2}{4/2+}\,\ldots\\ &= 2 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\ldots\end{aligned}$$

Exemplo 5.10 *Outros exemplos de expansões de números irracionais em frações contínuas (não simples)*

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi} &= 1 + \frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\frac{7^2}{2+}\,\frac{9^2}{2+}\,\frac{11^2}{2+}\,\ldots & \textit{(Brouncker)}\\ \pi &= \frac{4}{1+}\,\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\frac{7^2}{2+}\,\frac{9^2}{2+}\,\frac{11^2}{2+}\,\ldots\\ e-1 &= 1 + \frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\,\frac{4}{4+}\,\frac{5}{5+}\,\frac{6}{6+}\,\frac{7}{7+}\,\frac{8}{8+}\,\frac{9}{9+}\,\ldots & \textit{(Euler)}\\ &= 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{2}{3+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{4}{5+}\,\frac{5}{6+}\,\frac{6}{7+}\,\frac{7}{8+}\,\ldots\\ \frac{1}{e-2} &= 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{2}{3+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{4}{5+}\,\frac{5}{6+}\,\frac{6}{7+}\,\frac{7}{8+}\,\frac{8}{9+}\,\ldots\end{aligned}$$

6 Convergentes de frações contínuas simples infinitas

6.1 Convergentes de frações contínuas simples infinitas

Os convergentes da fração contínua simples infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\ldots\quad ,$$

são calculados da mesma forma que no caso das frações contínuas finitas, isto é, tomando-se

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \qquad p_0 = a_0, \quad q_0 = 1,\\ c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1a_0+1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad p_1 = a_1a_0+1, \quad q_1 = a_1,\\ &\vdots\\ c_i &= a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\ldots\,\frac{1}{+a_i} = \frac{p_i}{q_i},\\ &\vdots\end{aligned}$$

Também neste caso, o numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente c_i satisfazem às equações

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases} \quad i \geq 1, \tag{6.1}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases}. \tag{6.2}$$

Exemplo 6.1 *Considere a fração contínua simples*

$$x = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\ldots \;. \tag{6.3}$$

Seus primeiros convergentes são dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1} && = 1 = \underline{1}, \\
c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} && = \frac{3}{2} = \underline{1}.5, \\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0} = \frac{2\cdot 3 + 1}{2\cdot 2 + 1} && = \frac{7}{5} = \underline{1.4}, \\
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{2\cdot 7 + 3}{2\cdot 5 + 2} && = \frac{17}{12} = \underline{1.41}66667, \\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2} = \frac{2\cdot 17 + 7}{2\cdot 12 + 5} && = \frac{41}{29} = \underline{1.41}37931, \\
c_5 &= \frac{p_5}{q_5} = \frac{a_5p_4 + p_3}{a_5q_4 + q_3} = \frac{2\cdot 41 + 17}{2\cdot 29 + 12} && = \frac{99}{70} = \underline{1.4142}857.
\end{aligned}$$

6.2 Alguns resultados sobre convergência

Observe que $\sqrt{2} = 1.41421356237...$. No Exemplo 5.6, vimos que a fração contínua (6.3) pode ser obtida da expansão de $\sqrt{2}$. Além disso, tudo indica que os convergentes desta fração contínua convergem para $\sqrt{2}$.

Veremos, nesta seção, alguns resultados sobre convergência de frações contínuas simples infinitas.

É fácil verificar que a fórmula do determinante

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 0, \tag{6.4}$$

também vale para os convergentes de frações contínuas simples infinitas.

Propriedade 6.1 *Os convergentes de frações contínuas simples infinitas satisfazem*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{6.5}$$

e

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2. \tag{6.6}$$

Demonstração: Para $n \geq 2$, dividimos ambos os membros de (6.4) por $q_n q_{n-1}$, obtendo

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}},$$

de onde segue (6.5).

Para mostrar (6.6), tomamos

$$c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} .$$

Mas,

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2} \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n (-1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-2}}{q_n q_{n-2}}.$$

■

Vamos, agora, demonstrar um resultado fundamental sobre os convergentes de frações contínuas simples infinitas.

Teorema 6.1 *Os convergentes de ordem par, c_{2n}, de uma fração contínua simples infinita formam uma seqüência numérica crescente, enquanto que os convergentes de ordem ímpar, c_{2n+1}, formam uma seqüência decrescente e todo convergente de ordem par é menor do que qualquer convergente de ordem ímpar. Além disso, cada convergente c_n, $n \geq 2$, está entre os convergentes c_{n-1} e c_{n-2}. Os termos da seqüência $\{c_n\}$ satisfazem*

$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots < c_{2n} < \ldots < c_{2n+1} < \ldots < c_5 < c_3 < c_1. \tag{6.7}$$

Demonstração: Lembrando que $a_n > 0$, para $n \geq 1$ e $q_n > 0$, para $n \geq 0$, então, de (6.6), temos

$$c_{2n} - c_{2n-2} = \frac{a_{2n}(-1)^{2n-2}}{q_{2n} q_{2n-2}} > 0 \implies c_{2n-2} < c_{2n}, \tag{6.8}$$

$$c_{2n+1} - c_{2n-1} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n-1}}{q_{2n+1} q_{2n-1}} < 0 \implies c_{2n+1} < c_{2n-1}, \tag{6.9}$$

e, de (6.5), temos

$$c_{2n} - c_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n} q_{2n-1}} < 0 \implies c_{2n} < c_{2n-1} \tag{6.10}$$

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1} q_{2n}} > 0 \implies c_{2n} < c_{2n+1}. \tag{6.11}$$

De (6.8) e (6.9) podemos concluir, respectivamente, que $\{c_{2n}\}$ é uma seqüência crescente e que $\{c_{2n+1}\}$ é uma seqüência decrescente. De (6.8), (6.11) e (6.9) podemos escrever

$$c_{2n-2} < c_{2n} < c_{2n+1} < c_{2n-1}. \tag{6.12}$$

Portanto, c_n está entre c_{n-1} e c_{n-2}.

Em (6.12), fazendo

- $n = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_0 < c_2 < c_3 < c_1.$
- $n = 2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 < c_4 < c_5 < c_3.$ Portanto, $c_0 < c_2 < c_4 < c_5 < c_3 < c_1.$
- $n = 3 \quad \Longrightarrow \quad c_4 < c_6 < c_7 < c_5.$ Portanto, $c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < c_7 < c_5 < c_3 < c_1.$

Continuando desta forma, obtemos

$$c_0 < c_2 < \ldots < c_{2n-2} < c_{2n} < \ldots < c_{2n+1} < c_{2n-1} < \ldots < c_3 < c_1,$$

e, assim, os resultados estão demonstrados. ■

Além disso, é possível mostrar que

Teorema 6.2 *Toda fração contínua simples infinita é convergente e seu limite, l, é dado por*

$$l = \lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1}.$$

Demonstração: Sabemos que $\{c_{2n}\}$ é uma seqüência crescente e que $\{c_{2n+1}\}$ é uma seqüência decrescente. De (6.7), podemos, ainda, notar que

$$c_{2n} \to l_U, \quad \text{pois } \{c_{2n}\} \text{ é limitada superiormente por } c_1$$

e

$$c_{2n+1} \to l_L, \quad \text{pois } \{c_{2n+1}\} \text{ é limitada inferiormente por } c_0.$$

Mostremos que $l_U = l_L$. Sabemos que $c_{2n} - c_{2n-1} = \dfrac{-1}{q_{2n}q_{2n-1}}$. Assim, $c_{2n} - c_{2n-1} \longrightarrow 0$, pois os valores q_n são inteiros, positivos e $q_{n+1} < q_n$, uma vez que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} (c_{2n} - c_{2n-1}) = 0,$$

ou seja, $l_L - l_U = 0$. Portanto, $l_L = l_U$, o que demonstra o teorema. ■

Vamos, agora, mostrar o seguinte resultado.

Teorema 6.3 *A seqüência dos convergentes* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge para um número irracional.*

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $\lim\limits_{n\to 0} c_n = l = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{p}{q}.$$

Do Teorema 6.1,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Daí,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} > 0.$$

Mas, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \neq \dfrac{p}{q}$. Logo, $p_{2n+1}q - pq_{2n+1} \geq 1$. Dividindo ambos os lados por $q_{2n+1}q$ obtemos

$$\frac{p_{2n+1}q - pq_{2n+1}}{q_{2n+1}q} \geq \frac{1}{q_{2n+1}q},$$

ou seja, $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \dfrac{p}{q} \geq \dfrac{1}{q_{2n+1}q}$. Mas,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p}{q} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}},$$

ou seja, $\dfrac{1}{q_{2n+1}q} < \dfrac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$.

Portanto, $q_{2n} < q$ para todo $n \geq 1$. Contradição, pois $\{q_n\}$ é uma seqüência crescente. ■

Definição 6.1 *Considere a fração contínua* $x = [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$. *Definimos como cauda de ordem* n *da fração contínua* x *a fração contínua*

$$x_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, ...] \,. \tag{6.13}$$

É fácil verificar que $x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, x_n]$ e $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Logo, $a_n < x_n < a_n + 1$ e

$$x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Podemos, agora, demonstrar o importante resultado a seguir.

Teorema 6.4 *Se um número irracional positivo* x *é expandido em uma fração contínua simples infinita* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = x,$$

onde $\{c_n\}$ *é a seqüência dos convergentes da fração contínua* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Demonstração: Seja

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}\,.$$

Logo,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}\,,$$

onde x_n é a cauda definida por (6.13).

$$\text{Como} \quad x_{n+1} > a_{n+1} \Longrightarrow \begin{cases} x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \\ \\ a_n < x_n < a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \end{cases}$$

ou, então,

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}.$$

Observe que

- $c_0 = a_0 < x_0 < a_0 + \dfrac{1}{a_1} = c_1 \qquad \Longrightarrow \qquad c_0 < x < c_1.$
- $c_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} > x = a_0 + \dfrac{1}{x_1} > a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = c_2 \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 < x < c_1.$
- $x = a_0 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} < a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} \Longrightarrow x < c_3.$ Portanto, $c_2 < x < c_3$.

Continuando desta forma, podemos concluir que

$$c_{2n} < x < c_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Como, pelo Teorema 6.2,

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = l \Longrightarrow l = x.$$

■

Desses resultados, podemos concluir que, no Exemplo 6.1, $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$.

Teorema 6.5 *Seja x um irracional qualquer e $\{c_n\}$ a seqüência dos convergentes da fração contínua simples associada a x. Então,*

$$|x - c_k| < |x - c_{k-1}|, \qquad k \geq 1.$$

<u>Demonstração</u>: Tomemos $x = [a_0; a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}]$, onde $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots]$. Sabemos que

$$x = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

Daí, obtemos

$$x(x_{k+1}q_k + q_{k-1}) = x_{k+1}p_k + p_{k-1},$$

que, para $k \geq 1$, pode ser escrita como

$$x_{k+1}(xq_k - p_k) = -q_{k-1}\left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right).$$

Dividindo-se a última equação por $x_{k+1}q_k$ e calculando-se o valor absoluto, obtemos

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|-\frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k}\right|\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

Como $x_{k+1} > 1$ para $k \geq 1$ e, além disso, $q_k > q_{k-1} > 0$, segue que

$$0 < \frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k} < 1.$$

Assim,

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|, \quad k \geq 1,$$

o que mostra o resultado. ■

Teorema 6.6 *Seja x um irracional qualquer e $\{c_n\}$ a seqüência dos convergentes da fração contínua simples associada a x. Então,*

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{6.14}$$

<u>Demonstração</u>: Temos que

$$c_{k+1} - c_k = \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1$$

e, portanto,

$$|c_{k+1} - c_k| = \frac{1}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1. \tag{6.15}$$

Logo, do teorema anterior, segue que

$$\begin{aligned} |x - c_k| &= |x - c_{k+1} + c_{k+1} - c_k| \geq |c_{k+1} - c_k| - |x - c_{k+1}| \\ &> |c_{k+1} - c_k| - |x - c_k| = \frac{1}{q_{k+1}q_k} - |x - c_k|. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Como, do Teorema 6.1 e de (6.15), $c_k < x < c_{k+1}$ ou $c_{k+1} < x < c_k$, segue, imediatamente, que $|x - c_k| < |c_{k+1} - c_k| = \dfrac{1}{q_{k+1}q_k}$.

Portanto, da última desigualdade acima e de (6.16), obtemos

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2},$$

pois $q_{k+1} > q_k$. ■

Consideremos, agora, uma fração contínua da forma (1.1). Para este caso, também podemos definir convergentes do mesmo modo que fizemos para as frações contínuas simples. Assim,

$$c_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\,\frac{b_2}{a_2 +}\,\ldots\,\frac{b_n}{+\,a_n}, \quad n \geq 0,$$

é o n-ésimo convergente da fração contínua (1.1). Esses convergentes satisfazem $c_k = \dfrac{p_k}{q_k}$, $k \geq 0$, onde

$$\begin{cases} p_k &= a_kp_{k-1} + b_kp_{k-2} \\ q_k &= a_kq_{k-1} + b_kq_{k-2} \end{cases}, \qquad k \geq 2,$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0, & p_1 = a_0a_1 + b_1, \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1. \end{cases}$$

Observe que é possível termos certos convergentes indefinidos. Por exemplo, se $a_1a_2 = -b_2$, o convergente c_2 não está definido. Apesar disso, podemos, ainda, considerar a correspondente fração contínua. Vamos, então, apresentar a seguinte definição.

Definição 6.2 *A fração contínua* (1.1) converge para o valor K (finito) se no máximo um número finito de convergente c_n é indefinido e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Se a fração contínua converge para K, escrevemos

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\,\frac{b_2}{a_2 +}\,\frac{b_3}{a_3 +}\,\ldots = K.$$

Esta notação envolve a mesma ambigüidade que ocorre com séries infinitas quando escrevemos $\sum a_k = S$, de modo que $\sum a_k$ denota tanto a série como a sua soma.

6.3 Frações contínuas periódicas

Quando a seqüência dos valores a_i apresenta repetição, algum 'período', como nos exemplos 5.1 e 5.3, a fração contínua simples é chamada de *fração contínua periódica* e pode ser denotada por

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}}],$$

onde $a_{k+n} = a_k$ e os valores $a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}$ formam o período que se repete. A fração contínua

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}}]$$

é chamada *fração contínua puramente periódica.*

Chamamos *irracional quadrático* um número irracional x que é raiz da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são inteiros e $b^2 - 4ac > 0$ não é um quadrado perfeito.

Há dois resultados fundamentais sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos, os teoremas de Euler e Lagrange.

Teorema 6.7 (Euler) *Se x é um fração contínua periódica, isto é, se*

$$x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1}}],$$

então x é um número irracional quadrático.

Demonstração: De fato, vamos tomar $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$, onde $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$. Assim,

$$x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}, x_k]$$

e, então,

$$x_k = \frac{x_k p' + p''}{x_k q' + q''},$$

ou seja,

$$q' x_k^2 + (q'' - p')x_k - p'' = 0, \tag{6.17}$$

onde $\dfrac{p''}{q''}$ e $\dfrac{p'}{q'}$ são os dois últimos convergentes de $[a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}]$. Mas,

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Logo,

$$x_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}.$$

Substituindo-se o valor de x_k dado acima em (6.17) e simplificando-se, obtemos

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a &= q' q_{k-2}^2 - (q'' - q')q_{k-2}q_{k-1} - p'' q_{k-1}^2, \\ b &= 2(p'' p_{k-1} q_{k-1} - q' p_{k-2} q_{k-2}) + (q'' - p')(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1}), \\ c &= q' p_{k-2}^2 - (q'' - p')p_{k-2}p_{k-1} - p'' p_{k-1} \end{aligned}$$

e, portanto a, b e c são números inteiros. Como x é irracional, então $b^2 - 4ac > 0$. ■

Teorema 6.8 (Lagrange) *A fração contínua que representa um irracional quadrático x é periódica.*

Demonstração: Sabemos que um número quadrático irracional satisfaz a uma equação quadrática com coeficientes inteiros, que pode ser escrita como

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{6.18}$$

Se $x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k, ...]$, tomando-se $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$, então $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$. Além disso,

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Substituindo-se o valor acima em (6.18), obtemos

$$A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k = 0, \tag{6.19}$$

onde

$$\begin{aligned} A_k &= a p_{k-1}^2 + b p_{k-1} q_{k-1} + c q_{k-1}^2, \\ B_k &= 2a p_{k-1} p_{k-2} + b(p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-1}) + 2c q_{k-1} q_{k-2}, \\ C_k &= a p_{k-2}^2 + b p_{k-2} q_{k-2} + c q_{k-2}^2. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Se $A_k = 0$, isto é, $a p_{k-1}^2 + b p_{k-1} q_{k-1} + c q_{k-1}^2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= \frac{-b q_{k-1} \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) q_{k-1}^2}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} q_{k-1}. \end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Então, a equação (6.18) tem um número racional $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ como raiz, o que é impossível, pois x é irracional. Portanto, $A_n \neq 0$ e a equação quadrática

$$A_k y^2 + B_k y + C_k = 0,$$

tem x_k como uma de suas raízes.

De (6.20), e da fórmula do determinate, obtemos

$$\begin{aligned} B_k^2 - 4A_k C_k &= [2a p_{k-1} p_{k-2} + b(p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-1}) + 2c q_{k-1} q_{k-2}]^2 \\ &\quad -4(a p_{k-1}^2 + b p_{k-1} q_{k-1} + c q_{k-1}^2)(a p_{k-2}^2 + b p_{k-2} q_{k-2} + c q_{k-2}^2) \\ &= (b^2 - 4ac)(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1})^2 \\ &= b^2 - 4ac. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Pelo Teorema 6.6, temos que $x q_{k-1} - p_{k-1} > -\dfrac{1}{q_k}$. Logo, existe um número δ_{k-1}, com $|\delta_{k-1}| < 1$, tal que

$$p_{k-1} = x q_{k-1} + \frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Portanto, da equação acima e de (6.18), obtemos

$$\begin{aligned} A_k &= a\left(xq_{k-1}+\frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2 + bq_{k-1}\left(xq_{k-1}+\frac{\delta_{k-1}}{q_{k-1}}\right) + cq_{k-1}^2 \\ &= (ax^2+bx+c)q_{k-1}^2 + 2ax\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1} \\ &= 2ax\delta_{k-1} + a\frac{\delta_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\delta_{k-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|A_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Mas, como $C_k = A_{k-1}$,

$$|C_k| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

De (6.21), obtemos

$$\begin{aligned} B_k^2 &\leq a|A_kC_k| + |b^2-4ac| \\ &< 4(2|ax|+|b|+|c|)^2 + |b^2-4ac|. \end{aligned}$$

Observe que os valores absolutos de A_k, B_k e C_k são menores do que números que não dependem de k. Como A_k, B_k e C_k são números inteiros, existe apenas um número finito de triplas (A_k, B_k, C_k) diferentes entre si. Logo, podemos encontrar uma tripla (A, B, C) que ocorre pelo menos 3 vezes, digamos $(A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1})$, $(A_{k_2}, B_{k_2}, C_{k_2})$ e $(A_{k_3}, B_{k_3}, C_{k_3})$. Portanto, de (6.19), x_{k_1}, x_{k_2} e x_{k_3} são raízes de

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

É claro que pelo menos duas delas são iguais, por exemplo, x_{k_1} e x_{k_2}. Então,

$$a_{k_2} = a_{k_1}, \quad a_{k_2+1} = a_{k_1+1}, \quad a_{k_2+2} = a_{k_1+2}, ...$$

e a fração contínua é periódica. ∎

Observações:

1) Dos Exemplos 5.1 e 5.3 observamos que a fração contínua para $\sqrt{N}$, onde N não é um quadrado perfeito, é periódica e o período começa em a_1 e vai até $a_k = 2a_0$, isto é,

$$\sqrt{N} = [a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, 2a_0}].$$

Além disso, $\sqrt{N} + a_0 = [\overline{2a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}}]$ é uma fração contínua puramente periódica. Veja [6] para demonstração.

2) Note, também, que as frações contínuas no Exemplo 5.5 são números transcendentais e suas expansões em frações contínuas simples não são frações contínuas periódicas.

6.4 Seqüência de Fibonacci

Veremos, aqui, uma fração contínua simples bastante interessante.

Exemplo 6.2 *Considere a fração contínua*

$$x = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots\;. \tag{6.22}$$

Podemos notar que

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.61803398874989... \\ \text{ou} \\ -.61803398874989... \end{cases}$$

Como a fração contínua (6.22) produz um número positivo, temos

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989...\;.$$

Observe que

$$\frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803398874989...\;,$$

isto é,

$$\frac{1}{x} \;=\; x - 1 \;=\; \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots\quad.$$

O valor de x é conhecido como *número áureo* ou *seção áurea* e é denotado por $\Phi = 1.61803398874989...$. O valor $\dfrac{1}{x}$ é denotado por $\phi = 0.61803398874989...$.

De (6.1) e (6.2), temos que os convergentes da fração contínua (6.22) satisfazem

$$\begin{cases} p_n &= p_{n-1} &+ p_{n-2} \\ q_n &= q_{n-1} &+ q_{n-2} \end{cases}, \qquad n \geq 2, \tag{6.23}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = 1, & p_1 = 2, \\ q_0 = 1, & q_1 = 1. \end{cases} \tag{6.24}$$

A seqüência dos denominadores $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$, de (6.23), está relacionada com a *seqüência de Fibonacci*, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, que é definida por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{6.25}$$

onde $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$. Os primeiros números da seqüência de Fibonacci são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$.

A seqüência de Fibonacci pode ser originada do problema "quase real" do número de coelhos em um viveiro. Para este problema, devemos supor que:
- num viveiro coloca-se um casal de coelhos recém-nascidos;
- coelhos podem reproduzir-se com 1 mês de vida;
- uma coelha sempre dá à luz um casal de coelhos todo mês, a partir de seu segundo mês de vida;
- coelhos nunca morrem.

Quantos casais de coelhos haverá no início de cada mês?

A resposta a esta pergunta está na Tabela 1, que fornece o número de casais de coelhos no início de cada mês.

início do mês	nº de casais	descrição	seqüência
1	1	primeiro casal	$F_0 = 1$
2	1	primeiro casal	$F_1 = 1$
3	2	1 + 1 que nasceu	$F_2 = 2$
4	3	2 + 1 que nasceu	$F_3 = 3$
5	5	3 + 2 que nasceram	$F_4 = 5$
6	8	5 + 3 que nasceram	$F_5 = 8$
7	13	8 + 5 que nasceram	$F_6 = 13$
8	21	13 + 8 que nasceram	$F_7 = 21$
9	34	21 + 13 que nasceram	$F_8 = 34$
10	55	34 + 21 que nasceram	$F_9 = 55$
11	89	55 + 34 que nasceram	$F_{10} = 89$
12	144	89 + 55 que nasceram	$F_{11} = 144$
13	233	144 + 89 que nasceram	$F_{12} = 233$

Tabela 1: Seqüência de Fibonacci, número de casais de coelhos

Comparando (6.23) e (6.24) com (6.25), concluímos que

$$p_n = F_{n+1} \quad \text{e} \quad q_n = F_n, \quad n \geq 1.$$

Como os convergentes $\dfrac{p_n}{q_n}$ da fração contínua convergem para o número áureo Φ, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \Phi = 1.61803398874989... \, .$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \phi = 0.61803398874989... \, .$$

Observe que

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{p_0}{q_0} & = & \dfrac{F_1}{F_0} & = & \dfrac{1}{1} & = & 1 \\[2ex]
\dfrac{p_1}{q_1} & = & \dfrac{F_2}{F_1} & = & \dfrac{2}{1} & = & 2 \\[2ex]
\dfrac{p_2}{q_2} & = & \dfrac{F_3}{F_2} & = & \dfrac{3}{2} & = & 1.5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{p_6}{q_6} & = & \dfrac{F_7}{F_6} & = & \dfrac{13}{8} & = & \underline{1.6}25 \\[2ex]
\dfrac{p_6}{q_6} & = & \dfrac{F_7}{F_6} & = & \dfrac{21}{13} & = & \underline{1.61}5384615384615 \\[2ex]
\dfrac{p_7}{q_7} & = & \dfrac{F_8}{F_7} & = & \dfrac{34}{21} & = & \underline{1.61}9047619047619 \\[2ex]
\dfrac{p_8}{q_8} & = & \dfrac{F_9}{F_8} & = & \dfrac{55}{34} & = & \underline{1.61}7647058823529 \\[2ex]
\dfrac{p_9}{q_9} & = & \dfrac{F_{10}}{F_9} & = & \dfrac{89}{55} & = & \underline{1.618}181818181818 \\[2ex]
\dfrac{p_{10}}{q_{10}} & = & \dfrac{F_{11}}{F_{10}} & = & \dfrac{144}{89} & = & \underline{1.61}7977528089888 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{p_{34}}{q_{34}} & = & \dfrac{F_{35}}{F_{34}} & = & \dfrac{14930352}{9227465} & = & \underline{1.61803398874989}0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
\quad .
$$

7 Expansão de funções em frações contínuas

Pode-se, também, utilizar frações contínuas para expandir funções. Por exemplo, a função exponencial tem a seguinte expansão em frações contínuas (que não é única)

$$
e^x = 1 + \frac{x}{1\,-}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{3\,-}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{5\,-}\,\frac{x}{2\,+}\,\frac{x}{7\,-}\,\frac{x}{2\,+\,\ldots} \quad .
$$

Euler obteve a seguinte expansão para a função exponencial

$$
e^x = 0 + \frac{1}{1\,+}\,\frac{-2x}{2+x\,+}\,\frac{x^2}{6\,+}\,\frac{x^2}{10\,+}\,\frac{x^2}{14\,+}\,\frac{x^2}{18\,+\,\ldots} \quad . \tag{7.1}
$$

Os primeiros convergentes são dados por

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= \frac{0}{1} \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} \\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{(2+x)p_1 + (-2x)p_0}{(2+x)q_1 + (-2x)q_0} = \frac{2+x}{2-x} \\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{6p_2 + x^2 p_1}{6q_2 + x^2 q_1} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \\
\frac{p_4}{q_4} &= \frac{10p_3 + x^2 p_2}{10q_3 + x^2 q_2} = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} \\
\frac{p_5}{q_5} &= \frac{14p_4 + x^2 p_3}{14q_4 + x^2 q_3} = \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Note que os convergentes são funções racionais que podem aproximar valores para a função e^x. Podemos, por exemplo, aproximar o valor de e^{-1} através desses convergentes. Vamos compará-los com os valores obtidos pela expansão em série de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \; . \tag{7.2}$$

Queremos aproximar o valor $e^{-1} = 0.367879441171...$. Fazendo $x = -1$, obtemos os seguintes valores:

nº termos	convergentes	Taylor
1	0	1
2	1	0
3	0.3333333333	0.5000000000
4	0.3684210526	0.3333333333
5	0.3678756477	0.3750000000
6	0.3678794561	0.3666666667

A fração contínua

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,-}\;\frac{x/2}{1\,+}\;\frac{x/6}{1\,-}\;\frac{x/2}{1\,+}\;\frac{x/10}{1\,-}\;\frac{x/2}{1\,+}\;\frac{x/14}{1\,-}\;\frac{x/2}{1\,+}\;\ldots \tag{7.3}$$

também é uma expansão da função exponencial.

Definição 7.1 *Dizemos que uma fração contínua corresponde a uma série de potências se os convergentes de ordem $n+1$ da fração contínua, quando expandidos em série de potências, coincidem com os n primeiros termos da série.*

Por exemplo, a fração contínua (7.3) corresponde à série (7.2) pois,

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= \frac{1}{1} = 1 \\
\frac{p_1}{q_1} &= 1 + \frac{x}{1} = \frac{1+x}{1} = 1 + x \\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1 + (-x/2)p_0}{q_1 + (-x/2)q_0} = \frac{1 + (1/2)x}{1 - (1/2)x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots \\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{p_2 + (x/6)p_1}{q_2 + (x/6)q_1} = \frac{1 + (2/3)x + (1/6)x^2}{1 - (1/3)x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{18}x^4 + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observe que, para $n \geq 3$, os convergentes de ordem n da fração contínua (7.1), quando expandidos em série de potências, coincidem com $2n-1$ termos da série (7.2)

$$
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots ,
$$

pois,

$$
\begin{aligned}
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{2+x}{2-x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots \\
\frac{p_3}{q_3} &= \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{144}x^5 + \cdots \\
\frac{p_4}{q_4} &= \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4800}x^7 + \cdots \\
\frac{p_5}{q_5} &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{23}{8467200}x^9 + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Para calcular a expansão de uma função em fração contínua, podemos também utilizar substituições sucessivas. Seja f uma função. Calculamos $T_1, T_2, ..., T_{n+1}, ...$, tais que

$$
\begin{aligned}
f &= a_0 + T_1, \\
T_1 &= \frac{b_1}{a_1 + T_2}, \\
T_2 &= \frac{b_2}{a_2 + T_3}, \\
&\vdots \\
T_i &= \frac{b_i}{a_i + T_{i+1}}, \quad 2 \leq i \leq n,
\end{aligned}
$$

onde b_0, a_i, b_i são escolhidos arbitrariamente e podem ser funções dos argumentos de f. Deste modo, temos que

$$
f = a_0 + T_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + T_2} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \ldots \frac{b_{n-1}}{+ a_{n-1} +} \ldots \frac{b_n}{+ a_n + T_{n+1}}.
$$

Continuando este processo de substituições sucessivas, obtemos a fração contínua.

Exemplo 7.1 *Considere a expansão em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função e^x,*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots .$$

Tomando $a_0 = 1$, obtemos

$$e^x = a_0 + T_1 = 1 + T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = e^x - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T_1 &= x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \cdots\right) \\
&= \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \cdots\right)^{-1}} \\
&= \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots} = \frac{x}{1 - x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_1 = \dfrac{b_1}{a_1 + T_2}$, onde escolhemos $b_1 = x$, $a_1 = 1 - x$ e $T_2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + \cdots$.
Mas,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{360} + \cdots\right) = \frac{x}{2}\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{360} + \cdots\right)^{-1}} \\
&= \frac{x}{2}\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} - \frac{x^3}{540} + \cdots\right)} = \frac{x}{2 - x + \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{18} - \frac{x^3}{270} + \cdots\right)}.
\end{aligned}$$

Logo, $T_2 = \dfrac{b_2}{a_2 + T_3}$, onde escolhemos $b_2 = x$, $a_2 = 2 - x$ e $T_3 = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{18} - \dfrac{x^3}{270} + \cdots$.
Porém, podemos escrever T_3 como

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{2}{3}x\left(1 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{180} + \cdots\right) = \frac{2}{3}x\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{180} + \cdots\right)^{-1}} \\
&= \frac{2}{3}x\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{80} + \cdots\right)} = \frac{2x}{3 - x + \left(\frac{3x}{4} + \frac{3x^2}{80} + \cdots\right)}.
\end{aligned}$$

Assim, $T_3 = \dfrac{b_3}{a_3 + T_4}$, onde $b_3 = 2x$, $a_3 = 3 - x$ e

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{3}{4}x\left(1 + \frac{x}{20} + \cdots\right) = \frac{3}{4}x\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{20} + \cdots\right)^{-1}} \\
&= \frac{3}{4}x\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{20} + \cdots\right)} = \frac{3x}{4 - x + \left(\frac{4x}{5} + \cdots\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_4 = \dfrac{b_4}{a_4 + T_5}$, onde $b_4 = 3x$, $\quad a_4 = 4 - x \quad$ e $\quad T_5 = \dfrac{4}{5}x(1 + \cdots)$.

Se continuarmos deste modo, encontraremos $b_i = (i-1)x$, $a_i = i - x$ e

$$T_{i+1} = \frac{ix}{i+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k x^k\right),$$

o que novamente sugere escolhermos $b_{i+1} = ix$ e $a_{i+1} = (i+1) - x$. Logo,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1-x+}\,\frac{x}{2-x+}\,\frac{2x}{3-x+}\,\frac{3x}{4-x+}\,\frac{4x}{5-x+\ \ldots}\ .$$

Exemplo 7.2 *Considere a expansão em série de Taylor em torno da origem da função $ln(1+x)$,*

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots .$$

Fazendo $a_0 = 0$, obtemos, analogamente ao exemplo anterior, a seguinte expansão em fração contínua para esta série

$$ln(1+x) = \frac{x}{1+}\,\frac{x/2}{1\ +}\,\frac{x/6}{1\ +}\,\frac{x/3}{1\ +\ \ldots}\ .$$

8 Aplicações

8.1 Aproximações racionais para números irracionais

Notamos, nos Exemplos 6.1 e 6.2, que os convergentes das frações contínuas simples (6.3) e (6.22) formam aproximações racionais para os valores irracionais $\sqrt{2}$ e Φ, respectivamente. Nesta seção, consideraremos o problema de encontrar aproximações racionais para números irracionais.

Definição 8.1 *Chamamos o número racional $\dfrac{a}{b}$ (irredutível) de melhor aproximação racional para o número irracional x se*

$$|bx - a| < |qx - p|, \tag{8.1}$$

para qualquer racional $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{a}{b}$, tal que $0 < q \leq b$.

É fácil ver que (8.1) implica em

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|. \tag{8.2}$$

De fato,

$$q < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{q} \Rightarrow \left|\frac{1}{b}(bx-a)\right| < \left|\frac{1}{q}(qx-p)\right| \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$

Por outro lado, (8.2) não implica em (8.1).

Por exemplo, $\left|\pi - \frac{179}{57}\right| < \left|\pi - \frac{22}{7}\right|$. Mas, $|57\pi - 179| > |7\pi - 22|$.

Parece mais natural utilizar (8.2) para definir melhor aproximação, mas utilizamos a Definição 8.1 por ser mais fácil para caracterizá-la. Por exemplo, vamos mostrar que qualquer melhor aproximação para x é um convergente da fração contínua simples associada a x e, como uma exceção trivial, qualquer convergente da fração contínua associada a x é uma melhor aproximação para x, definida pela Definição 8.1. Por outro lado, se utilizarmos (8.2), uma melhor aproximação pode ou não ser um convergente.

Para simplificar, denotemos por d_k a k-ésima diferença

$$d_k = q_k x - p_k, \quad k \geq 1, \tag{8.3}$$

com $d_{-1} = -1$ e $d_0 = x - a_0 = \{x\}$, onde $\{x\}$ significa a parte fracionária de x.

Primeiramente, vamos investigar as relações entre x, os convergentes $\frac{p_k}{q_k}$ e $d_k = q_k x - p_k$.

Como p_k e q_k satisfazem às relações de recorrências (6.1), segue que

$$d_{k+1} = a_{k+1} d_k - d_{k-1}, \quad k \geq 0. \tag{8.4}$$

Tomando $x = [a_0; a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}]$, então $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots]$ e, assim,

$$x = \frac{x_{k+1} p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} q_k + q_{k-1}}, \quad k \geq 1. \tag{8.5}$$

Portanto,

$$x - \frac{p_k}{q_k} = \frac{-(-1)^{k-1}}{q_k(q_k x_{k+1} + q_{k-1})}.$$

Assim, o k-ésimo convergente aproxima x com erro

$$x - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k^2 \left(x_{k+1} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k} \right)}. \tag{8.6}$$

Logo, da equação (8.6), temos que

$$d_k = q_k x - p_k = \frac{(-1)^k}{q_k x_{k+1} + q_{k-1}}. \tag{8.7}$$

Como $x_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{x_{k+2}}$, da equação acima, obtemos

$$d_k = \frac{(-1)^k}{a_{k+1} q_k + q_{k-1} + \dfrac{q_k}{x_{k+2}}} = x_{k+2} \frac{(-1)^k}{q_{k+1} x_{k+2} + q_k}$$

e de (8.7)

$$d_{k+1} = -\frac{d_k}{x_{k+2}}. \tag{8.8}$$

Assim, a seqüência $\{d_k\}$ tem sinais alternantes e a seqüência $\{|d_k|\}$ tende para zero monotonicamente. Como $a_{k+1} < x_{k+1}$, de (8.7), temos que

$$|d_k| = \left|\frac{(-1)^k}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}\right| < \frac{1}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} = \frac{1}{q_{k+1}} \leq \frac{1}{2}, \quad k \geq 1, \tag{8.9}$$

pois $q_2 = a_1 a_2 + 1 \geq 2$. Note que esta propriedade é análoga a (6.14).

Além disso, como $x_{k+1} < a_{k+1} + 1$, obtemos

$$|d_k| = \left|\frac{(-1)^k}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}\right| > \frac{1}{q_k(a_{k+1} + 1) + q_{k-1}} = \frac{1}{q_k + q_{k+1}}. \tag{8.10}$$

Veremos, agora, resultados sobre os convergentes da expansão de x em fração contínua simples e aproximações racionais para x.

Teorema 8.1 *Seja x um número real. Qualquer melhor aproximação racional de x, definida pela Definição* 8.1, *é um convergente da expansão de x em fração contínua simples.*

Demonstração: Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Se x é racional, exigimos que $a_n \geq 2$, onde a_n é o denominador do último quociente parcial. Como os convergentes são aproximações de x alternadamente por cima e por baixo (Teorema 6.1), podemos observar que

$$a_0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} < a_0 + 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que a melhor aproximação $\frac{a}{b}$ não é um convergente. Primeiramente, consideremos $\frac{a}{b} < \frac{p_0}{q_0}$. Então,

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|x - \frac{a}{b}\right| > |x - a_0|,$$

o que contradiz o fato de $\frac{a}{b}$ ser melhor aproximação.

Agora, suponhamos $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$. Como $\frac{p_1}{q_1} > x$, temos que

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq b\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq b\frac{1}{q_1 b} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Mas, como $|x - a_0| < \frac{1}{a_1}$, chegamos novamente a uma contradição.

Finalmente, se $\frac{a}{b}$ está entre $\frac{p_0}{q_0}$ e $\frac{p_1}{q_1}$ e não é um convergente, então deve estar entre dois convergentes de valores consecutivos, digamos os de ordem k e $k+2$, ou seja,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} < \frac{a}{b} < \frac{p_k}{q_k} < \cdots < \frac{p_1}{q_1}.$$

Assim, de (4.4) e das desigualdades acima, temos

$$\frac{1}{q_k q_{k+1}} = \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k b},$$

e, então, $b > q_{k+1}$. Mas,

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| > b\left|\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{a}{b}\right| \geq b\frac{1}{q_{k+2}b} = \frac{1}{q_{k+2}}.$$

Como, por (8.9), $|q_{k+1}x - p_{k+1}| < \dfrac{1}{q_{k+2}}$, $\dfrac{a}{b}$ não pode ser melhor aproximação e o teorema está demonstrado. ■

Vamos, agora, mostrar que todo convergente é uma melhor aproximação, mas há uma exceção. Suponhamos que x seja um número do tipo $x = a_0 + 1/2$. Então, $|x-(a_0+1)| = |x-a_0|$ e, neste caso, seu convergente não é uma melhor aproximação. Temos, então, o seguinte resultado

Teorema 8.2 *Seja x diferente da forma $a_0 + 1/2$. Então, todo convergente da expansão de x em fração contínua simples é uma melhor aproximação para x.*

Demonstração: Consideremos q_n dado e B um valor para b tal que $0 < b \leq q_n$ e $|bx - a|$ é minimizado (se há várias escolhas para B, então tomamos a menor delas). Seja A o correspondente valor para a e suponhamos que A é único. Nestas condições, $\dfrac{A}{B}$ é uma melhor aproximação e, pelo Teorema 8.1, é um convergente $\dfrac{p_k}{q_k}$, para algum $k \leq n$. Se $k < n$, sabemos, de (8.10), que

$$|q_k x - p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}} \geq \frac{1}{q_{n-1} + q_n},$$

enquanto que $|q_n x - a_n| < \dfrac{1}{q_{n+1}}$. Mas, se $|q_k x - a_k|$ são menores do que $|q_n x - a_n|$, devemos ter $q_{n+1} < q_n + q_{n-1}$, o que é impossível. Assim, $k = n$ e $\dfrac{A}{B}$ é o convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Agora, consideremos a situação em que A não é único. Então, Bx deve ser do tipo $A + \dfrac{1}{2}$, onde A é um inteiro positivo. Logo, $Bx - A = \dfrac{1}{2}$ e, então, $x = \dfrac{1+2A}{2B}$. Observe que se $\dfrac{1+2A}{2B} = 2$, teremos $A = \dfrac{4B-1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Logo, se $(1+2A, 2B) = m > 1$, então $(1+2A, 2B)$ não pode ser 2 e, neste caso, $(2B/m)t - (1+2A)/m = 0$, o que contradiz a definição de B.

Assim, o racional $x = \dfrac{1+2A}{2B}$ tem uma expansão em fração contínua simples que termina quando $x = \dfrac{p_n}{q_n}$, com $p_n = 1 + 2A$ e $q_n = 2B = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, onde $a_n \geq 2$. Se $n = 1$ e $a_n > 2$, ou se $n > 1$, temos $q_{n-1} < B$. Logo,

$$|q_{n-1}x - p_{n-1}| = \left|q_{n-1}\frac{p_n}{q_n} - p_{n-1}\right| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2B} \leq |Bx - A| = \frac{1}{2},$$

o que contradiz a definição de B. Como excluímos o caso em que $n = 1$ e $a_n = 2$, a demonstração está completa. ■

Exemplo 8.1 *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{14+}\ldots$$

Seus primeiros convergentes são dados por

$$\begin{array}{lllllll}
c_0 & = & \frac{p_0}{q_0} & = & \frac{3}{1} & = 3 & = 3 \\
c_1 & = & \frac{p_1}{q_1} & = & 3+\frac{1}{7} & = \frac{22}{7} & = \underline{3.14}2857142857 \\
c_2 & = & \frac{p_2}{q_2} & = & \frac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0} = \frac{15\cdot 22+3}{15\cdot 7+1} & = \frac{333}{106} & = \underline{3.1415}09433962 \\
c_3 & = & \frac{p_3}{q_3} & = & \frac{a_3p_2+p_1}{a_3q_2+q_1} = \frac{1\cdot 333+22}{1\cdot 106+7} & = \frac{355}{113} & = \underline{3.141592}920354 \\
c_4 & = & \frac{p_4}{q_4} & = & \frac{a_4p_3+p_2}{a_4q_2+q_2} = \frac{292\cdot 355+333}{292\cdot 113+106} & = \frac{103993}{33102} & = \underline{3.141592653}012
\end{array}$$

Observe que $\pi = 3.141592653589...$.

Temos, então, que $\dfrac{355}{113}$ é a melhor aproximação racional para π com denominador menor do que 113, isto é, $|113\pi - 355| < |q\pi - p|$ para $q < 113$.

Além disso, é possível mostrar o seguinte resultado

Teorema 8.3 *Seja $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, com $0 < q \leq q_{k+1}$. Então,*

$$|q_{k+1}x - p_{k+1}| < |q_kx - p_k| \leq |qx - p|.$$

<u>Demonstração</u>: A primeira desigualdade é conseqüência de (8.8).

Para mostrar a segunda desigualdade, consideremos a equação

$$\begin{aligned} qx - p &= m(q_{k+1}x - p_{k+1}) + n(q_kx - p_k) \\ &= (mq_{k+1} + nq_k)x - (mp_{k+1} + np_k). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau em x, obtemos duas equações lineares nas incógnitas m e n:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} p & = & mp_{k+1} & + & np_k \\ q & = & mq_{k+1} & + & nq_k \end{array} \right. ,$$

cujo determinante da matriz dos coeficientes é $p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = (-1)^k$. Logo, m e n devem ser números inteiros. Como $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, n não pode ser zero. Se $m = 0$, então

$$|qx - p| = |n(q_kx - p_k)| = |n||q_kx - p_k| \geq |q_kx - p_k|.$$

Suponhamos, agora, que $m \neq 0$. Como $q < q_{k+1}$ por hipótese, m e n devem ter sinais opostos. Mas, $q_{k+1}x - p_{k+1}$ e $q_k x - p_k$ também têm sinais opostos. Logo,

$$|qx - p| = |m(q_{k+1}x - p_{k+1})| + |n(q_k x - p_k)| \geq |q_k x - p_k|.$$

E assim o resultado está demonstrado. ■

Portanto, do exemplo anterior, podemos observar que $\dfrac{355}{113}$ é a melhor aproximação racional para π com denominador menor do que 33102, isto é, $|113\pi - 355| < |q\pi - p|$ para $q < 33102$.

Consideremos, agora, o problema de encontrar uma aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para um número real x, tal que $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e cujo denominador b satisfaça $b < q_{N+1}$, onde q_{N+1} é o denominador do convergente c_{N+1}, para algum $N \geq 0$. Vejamos alguns resultados preliminares.

Algoritmo de Ostrowski

Embora nossas observações sobre melhor aproximação sejam verdadeiras para números racionais e irracionais, suponhamos, por simplicidade, que x é irracional.

Sabemos que a seqüência $\{q_k\}$ satisfaz

$$1 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 < \cdots .$$

Logo, para qualquer número natural m, há um índice N tal que $q_N \leq m < q_{N+1}$. Escrevendo m da forma $m = \lfloor m/q_N \rfloor q_N + R$, o resto R satisfaz $0 \leq R < q_N$. Se $R > 0$, e como $R < q_N$, então $q_k \leq R < q_{k+1}$, com $k < N$.

Assim, podemos escrever R como

$$R = \lfloor R/q_k \rfloor q_k + R_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq R_1 < q_k.$$

Se $R_1 = 0$, então $m = \lfloor m/q_N \rfloor q_N + \lfloor R/q_k \rfloor q_k$. Caso contrário, repetimos o procedimento anterior até que o resto seja igual a zero.

Este processo de decomposição é conhecido como *algoritmo de Ostrowski* e nos permitirá expressar um inteiro m como uma soma de múltiplos dos elementos q_k para $0 \leq k \leq N$, que chamaremos de representação de Ostrowski de m:

$$m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k. \tag{8.11}$$

Note que a construção de α_{k+1} mostra que eles são únicos e satisfazem $0 \leq \alpha_{k+1} \leq a_{k+1}$, para $k > 1$ e $0 \leq \alpha_1 < a_1$, pois $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$.

Exemplo 8.2 *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+}\,\ldots .$$

Escreva $m = 2000$ como soma de múltiplos dos denominadores q_k dos convergentes da fração contínua acima, utilizando o algoritmo de Ostrowski.

Os primeiros convergentes são

k	0	1	2	3	4
$\frac{p_k}{q_k}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$

.

Como $2000 < q_4 = 33102$ então escrevemos $2000 = 17 \cdot 113 + 79$. Agora, observe que $79 < q_2 = 106$ então escrevemos $79 = 11 \cdot 7 + 2$ e, assim

$$2000 = 17 \cdot 113 + 0 \cdot 106 + 11 \cdot 7 + 2 \cdot 1,$$

ou seja,

$$2000 = 17 \cdot q_3 \quad + 0 \cdot q_2 \quad + 11 \cdot q_1 + 2 \cdot q_0.$$

Vamos, agora, analisar $||mx||$, onde $||x||$ significa a distância ao inteiro mais próximo de x. Como a distância ao inteiro mais próximo não muda por translação inteira, tomando

$$m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k \quad \text{e} \quad A = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k,$$

como $d_k = q_k x - p_k$, temos que

$$||mx|| = ||mx - A|| = \left|\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k x - \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k \right|\right|.$$

Se a última soma (envolvendo os valores d_k) é suficientemente pequena (menor do que 1/2), então a distância ao inteiro mais próximo é o valor absoluto da expressão.

Para analisar o valor de $||mx||$, precisamos ainda do resultado a seguir.

Lema 8.1 *Seja α_{n+1} o primeiro coeficiente $\alpha_{k+1} \neq 0$ em* (8.11)*, tal que $0 \leq n \leq N$. Então,*

$$|(\alpha_{n+1} - 1)d_n - d_{n+1}| < \left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k \right| < |\alpha_{n+1} d_n - d_{n+1}|.$$

Demonstração: De (8.8) sabemos que d_k alterna de sinal. Então, se retirarmos todos os termos $d_{n+2}, d_{n+4}, \ldots$ com o mesmo sinal que d_n e incluirmos os maiores múltiplos possíveis para os termos com sinal contrário, obtemos

$$|\alpha_{n+1} d_n + \alpha_{n+2} d_{n+1} + \cdots + \alpha_{N+1} d_N| > |\alpha_{n+1} d_n + (a_{n+2} - 1) d_{n+1} + a_{n+4} d_{n+3} + \cdots|.$$

Mas, de (8.4), podemos escrever cada termo $a_{k+1} d_k$ como uma diferença. Assim, obtemos

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k \right| > |\alpha_{n+1} d_n - d_{n+1} + (d_{n+2} - d_n) + (d_{n+4} - d_{n+2}) + \cdots| = |(\alpha_{n+1} - 1) d_n - d_{n+1}|,$$

como esperado. Para encontrar o limitante superior, procedemos de maneira similar e obtemos

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k \right| < |\alpha_{n+1} d_n + a_{n+3} d_{n+2} + a_{n+5} d_{n+4} + \cdots|,$$

o que conclui o resultado. ■

Teorema 8.4 *Seja x um número irracional e $m > 1$ um inteiro positivo. Considere a representação de Ostrowski de m dada por* (8.11)*, com $\alpha_{k+1} = 0$ para $0 \leq k < n \leq N$ e $\alpha_{n+1} > 0$. Então,*

1) *se* $n \geq 2$, $\quad ||mx|| = \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$;

2) *se* $\{x\} < 1/2$,

   a) $||mx|| = \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$, *se* $\alpha_1 = 0$ *e* $\alpha_2 > 0$*;*

   b) $||mx|| > |d_1|$, *se* $\alpha_1 > 0$*;*

3) *se* $\{x\} > 1/2$, $\quad \alpha_1 = 0 \quad$ *para qualquer* $\quad m \quad$ *e*

   a) $||mx|| = ||x||$, *se* $\alpha_2 > 1$*;*

   b) $||mx|| > d_2$, $\quad$ *se* $\alpha_2 = 1$.

Demonstração: Para simplificar, denotemos por S a soma $\left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} d_k\right|$.

1) Do Lema 8.1 e de (8.9), obtemos

$$S < |\alpha_{n+1}d_n - d_{n+1}| \leq |a_{n+1}d_n - d_{n+1}| = |-d_{n-1}| \leq |-d_1| < \frac{1}{2}.$$

Assim, $||mx|| = S$.

2) a) Para demonstrar este item, vemos que

$$S < |\alpha_2 d_1 - d_2| \leq |a_2 d_1 - d_2| = |-d_0| = x - a_0 < \frac{1}{2}$$

e, novamente, $||mx|| = S$.

2) b) Como $\alpha_1 < a_1$, temos que

$$|-d_1| < |(\alpha_1 - 1)d_0 - d_1| < S < |\alpha_1 d_0 - d_1| \leq |(a_1 - 1)d_0 - d_1| = |-d_{-1} - d_0| < 1.$$

Mas, $d_0 = \{x\}$ e, assim, $1 - a_1\{x\} < ||mx|| < 1 - \{x\}$, de onde segue o resultado.

3) a) Como $a_1 = 1$, então $\alpha_1 = 0$ e

$$|d_1| < |d_1 - d_2| < S < |\alpha_2 d_1 - d_2| \leq |a_2 d_1 - d_2| = |-d_0| < 1.$$

Assim, $1 - \{x\} < S < \{x\}$, como esperávamos.

3) b) Novamente, $a_1 = 1$ e, então, $\alpha_1 = 0$. Do Lema 8.1,

$$|-d_2| < S < |d_1 - d_2|.$$

Como $|-d_2| = d_2$ e $|d_1 - d_2| = d_2 - d_1$, o resultado é válido se $1 - (d_2 - d_1) > d_2$, o que equivale a $1 + d_1 > 2d_2$.

Note que $x = [a_0; 1, x_2]$ e $x_2 < 2a_2$. Assim, $x < [a_0; 1, 2a_2]$ e $2a_2 > (2a_2 + 1)(x - a_0)$. Como $d_0 = x - a_0$ e $d_1 = (x - a_0) - 1$, obtemos $1 - 2d_0 > (2a_2 - 1)d_1$ e, então

$$1 + d_1 > 2a_2 d_1 + 2d_0 = 2d_2,$$

que demonstra o resultado. ∎

Note que, da demonstração do Teorema 8.4, pode-se concluir que $|mx - A| < 1$, onde $m = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k$ e $A = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k$.

Vamos utilizar esses resultados para encontrar uma aproximação racional $\frac{a}{b}$ para um número real x, com $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e cujo denominador b satisfaz $b < q_{N+1}$, onde q_{N+1} é o denominador do convergente c_{N+1}, para algum $N \geq 0$.

Vimos que existe uma única representação de Ostrowski para b, dada por

$$b = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} q_k$$

e o número A, definido como

$$A = A(b) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{k+1} p_k,$$

pela demonstração do Teorema 8.4, satisfaz

$$|bx - A| < 1.$$

Assim, o número inteiro a definido por

$$a = a(b) = \begin{cases} A, & \text{se } \ |bx - A| \leq 1/2, \\ A + 1, & \text{se } \ bx - A > 1/2, \\ A - 1, & \text{se } \ bx - A < -1/2, \end{cases}$$

satisfaz $|bx - a| \leq 1/2$. Desta maneira encontramos a aproximação racional $\frac{a}{b}$ para um número real x, com $|bx - a| < \frac{1}{2}$ e $b \neq q_k$, para todo $k \geq 0$.

Exemplo 8.3 *Considere a expansão de π em fração contínua simples*

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+}\,\ldots\ .$$

Encontre a melhor aproximação racional $\frac{a}{b}$ para π com $b = 57$.

Os primeiros convergentes são

k	0	1	2	3	4
$\frac{p_k}{q_k}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$

.

Como $b = 57$, pelo algoritmo de Ostrowski obtemos

$$b = 8 \cdot q_1 + 1 \cdot q_0 = 8 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 57$$

e, então,

$$A = 8 \cdot p_1 + 1 \cdot p_0 = 8 \cdot 22 + 1 \cdot 3 = 179,$$

que satisfaz $|b\pi - A| < 1/2$ e, assim, $a = 179$. Logo, a melhor aproximação racional $\dfrac{a}{b}$ para π, com $b = 57$, é $\dfrac{179}{57}$.

8.2 Modelo para construção de calendário

A construção de um calendário anual cotado em dias, que dependem da rotação da Terra em torno de seu eixo, deve determinar, o mais precisamente possível, as estações, que dependem da revolução da Terra em torno do Sol e é conhecido como *ano tropical*. A duração do ano tropical é de aproximadamente 365.24219878125 dias. Note que 0,24219 do dia equivale a 05h 48m 46s.

No ano 46 A.C., Júlio César reformou o calendário romano para uniformizar os diferentes calendários usados pelos territórios ocupados pelos romanos. Introduziu o que hoje é conhecido como calendário juliano, de doze meses, no qual, a cada três anos de 365 dias, seguia-se outro de 366 dias (ano bissexto). Assim, o ano juliano tinha em média 365,25 dias. Para acertar o calendário com a primavera, foram adicionados 67 dias àquele ano. Além disso, o primeiro dia do mês de março de 45 A.C. no calendário romano, passou a ser 1º de janeiro no calendário juliano. Este ano ficou conhecido como ano da confusão.

O calendário juliano usou a aproximação $365\frac{1}{4}$ dias para um ano. Depois de 16 séculos de uso, havia uma grande diferença entre o calendário juliano e movimento real da Terra em torno do Sol. Os fenômenos astronômicos como, por exemplo, a ocorrência do equinócio da primavera, estavam ocorrendo 10 dias após a data prevista. No equinócio, a duração da noite é a mesma que a duração do dia, aproximadamente 12h cada.

Em 1582, o Papa Gregório XIII proclamou uma revisão do calendário baseada na aproximação de 1 ano por $365\frac{97}{400}$ dias. O novo calendário foi implementado de modo a omitir anos bissextos a cada século exceto em séculos múltiplos de 400, ou seja, os anos seculares (com final 00) seriam bissextos só de 4 em 4 séculos. Por exemplo, 1600, 2000, 2400 são bissextos, mas não os são 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 e 2300. Este calendário é conhecido como calendário gregoriano.

Para que o equinócio da primavera, que estava atrasado em relação ao calendário, voltasse a ocorrer em 21 de março, foi publicado um decreto no qual o dia após 04 de outubro de 1582 deveria ser 15 de outubro de 1582. Esse ano ficou com apenas 354 dias.

Países católicos (como Portugal, Espanha, Itália e Polônia) passaram a utilizá-lo imediatamente. Mas, a Inglaterra, por ser protestante, resistiu por quase dois séculos. O Japão o introduziu em 1873, quando se abriu para o Ocidente. China, Bulgária, Rússia, Romênia e Grécia só adotaram o calendário gregoriano no início do século XX.

O ano civil gregoriano ainda é maior que o ano tropical. Mas, a diferença será de mais 1 dia somente depois de 3236 anos. No momento, isso ainda não tem importância prática.

No ano de 1956, a Conferência Internacional de Pesos e Medidas definiu o segundo da efeméride como 1/31556925.9747 do tempo que a Terra necessitou para dar uma volta completa ao redor do Sol, começando às 12h00 de 4 de janeiro de 1900. Isto valeu até que a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1967, definiu o segundo como sendo o número de vezes que um átomo de Césio-133 oscila durante um segundo da efeméride.

Usando o valor de 1/31556925.9747 para o segundo da efeméride, e como um dia tem 86400 segundos, podemos concluir que o ano tropical tem

$$\frac{315569259747}{864000000} = 365.24219878125 \quad \text{dias.}$$

Assim, para a construção de um calendário, é necessário obter uma aproximação apropriada para

$$\begin{aligned} c &= \frac{315569259747}{864000000} - 365 = \frac{7750361}{32000000} = 0.24219878125 \\ &= \frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

Os primeiros convergentes de c são:

k	0	1	2	3	4	5
$\frac{p_k}{q_k}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{31}{128}$	$\frac{163}{673}$

Podemos, então, observar que o calendário juliano é a implementação do primeiro convergente de c. Mas, não há evidências de que foram utilizadas frações contínuas na construção dos calendários juliano ou gregoriano.

Para construir um calendário baseado em um ciclo b diferente do denominador de um convergente de c, precisamos encontrar a quantidade a de anos bissextos que devemos incluir durante o ciclo de modo que $|bc - a|$ seja o menor possível. Para isso utilizamos o mesmo raciocínio do Exemplo 8.3.

No caso do calendário gregoriano, $b = 400$ torna-se

$$b = 3 \cdot q_4 + 0 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 4 \cdot q_1 + 0 \cdot q_0$$

e

$$A = 3 \cdot p_4 + 0 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 4 \cdot p_1 + 0 \cdot p_0 = 3 \cdot 31 + 4 \cdot 1 = 97,$$

que satisfaz $|bc - A| < 1/2$ e, assim, $a = 97$ como esperávamos. O erro resultante é

$$c - \frac{97}{400} \simeq -0.00030122,$$

o que significa um ganho de 3 dias a cada dez mil anos.

Utilizando $b = 300$, encontramos

$$b = 2 \cdot q_4 + 1 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1 + 3 \cdot q_0$$

e

$$A = 2 \cdot p_4 + 1 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_0 = 2 \cdot 31 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 72.$$

Logo, $bc - A \simeq 0.6596 > 1/2$ e, assim, $a = A + 1 = 73$. O erro resultante é

$$c - \frac{73}{300} \simeq -0.00113455,$$

maior do que para $b = 400$.

Tomando $b = 500$, obtemos

$$b = 3 \cdot q_4 + 3 \cdot q_3 + 0 \cdot q_2 + 4 \cdot q_1 + 1 \cdot q_0,$$

$$A = 3 \cdot p_4 + 3 \cdot p_3 + 0 \cdot p_2 + 4 \cdot p_1 + 1 \cdot p_0 = 3 \cdot 31 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 121$$

e $|bc - A| < 1/2$. Logo, $a = 121$. O erro resultante é

$$c - \frac{121}{500} \simeq 0.000198781,$$

que equivale a uma perda de 2 dias em 10 mil anos.

Referências

[1] C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 12, Spring-Verlag, New York, 1991.

[2] G.H. Hardy, E.M. Wright *An introduction to the theory of numbers*, 5th Edition, Oxford Science Publications, Claredon Press, Oxford, 1979.

[3] W.B. Jones, W.J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 11, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.

[4] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publ., New York, 1964.

[5] L. Lorentzen, H. Waadeland, *Continued fractions with applications*, Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North Holland, Amsterdam, 1992.

[6] C.D. Olds, *Continued fractions*, New Mathematical Library Series, Random House and The L.W. Springer Company, New York, 1963.

[7] G.M. Phillips, *Two millennia of Mathematics: from Archimedes to Gauss*, CMS Books in Mathematics Series, Springer, New York, 2000.

[8] A.M. Rockett, P. Szüsz *Continued fractions*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1992.

[9] J.P.O. Santos, *Introdução à teoria dos números*, Coleção Matemática Universitária, 2ª ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[10] D.E. Smith, *History of Mathematics*, vols. I e II, Dover Publ., New York, 1958.

[11] H.S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, The University Series in Higher Mathematics, vol. 1, Van Nostrand, New York, 1948.

Páginas interessantes sobre o assunto

[12] http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html

[13] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html

[14] http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/

[15] http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?module=tool/number/contfrac.en

[16] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/index.html

[17] http://www.observatorio.ufmg.br/pas39.htm

[18] http://www.ip.pt/˜ ip200650/calendario.htm