II Bienal da SBM

25 a 29 de outubro de 2004 Salvador

Universidade Federal da Bahia

Atividades da Oficina 1

Problemas elementares divertidos e desafiadores

Luís Lopes

(25 e 26 de outubro)

Resumo

O propósito desta oficina é discutir e resolver, de forma ativa com os presentes, alguns dos 300 problemas propostos em [1].

Agradecimentos: À SBM, o oferecimento da passagem, e ao amigo Eduardo Morais, a composição deste texto em LaTeX.

"O que irei fazer no céu, depois de minha morte, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?"
CAUCHY

PROBLEMAS

Problema 6) Numa escola há um corredor com 1000 armários numerados de 1 a 1000, inicialmente todos fechados. Mil alunos, numerados de 1 a 1000, passam pelo corredor. O aluno de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k (por exemplo, o aluno de número 4 mexe nos armários de números $4, 8, 12, \ldots$, abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos). Ao final, depois da passagem do milésimo aluno, quais armários ficarão abertos?

Problema 9) Dois homens conversavam num bar e um deles disse:

– Tenho três filhas, a soma de suas idades é igual ao número da casa em frente e o produto é 36.
– Posso determinar as idades de suas filhas apenas com esses dados?
– Não. Dar-lhe-ei um dado fundamental: minha filha mais velha toca piano.

Determine as idades das filhas e o número da casa em frente ao bar.

Problema 20) Sendo 1000! o produto de todos os inteiros de 1 até 1000, com quantos zeros consecutivos termina a representação decimal do número natural gerado por $1000!$?

Problema 30) (PUC-RIO-92) João chega todo dia a Petrópolis às $17:00$ horas e sua mulher, que dirige com velocidade constante, chega todo dia às $17:00$ horas para apanhá-lo e levá-lo para casa. Num determinado dia, João chega às $16:00$ horas e resolve ir andando para casa; encontra sua mulher no caminho e volta de carro com ela, chegando em casa 10 minutos mais cedo.

João andou a pé durante:

(A) 40 min (B) 50 min (C) 60 min (D) 45 min (E) 55 min

Problema 101) Uma senhora, mãe de três filhos, vai visitá-los com ovos frescos que traz em uma cesta. Ao mais velho, ela dá a metade do que possui e mais meio ovo. O filho do meio recebe metade do que restou e mais meio ovo. O filho mais novo ganha metade do que restou e mais meio ovo e a mãe fica sem nada.

Quantos ovos havia na cesta e quantos a mãe deu a cada um?

Problema 198) Num programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas, ganhando o que estiver atrás dela. Atrás de uma das portas há um carro e atrás das outras duas há um bode. O procedimento para a escolha da porta é o seguinte: o convidado escolheria inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma porta, revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada.

Roberto e Rodrigo são dois candidatos que deverão participar do programa esta tarde. Roberto está decidido a mudar de porta quando chegar a sua vez, e Rodrigo está decidido a não mudar de porta.

Um tem mais chances de ganhar o carro do que o outro? Explique.

Problema 251) Sejam $n!$ (lê-se "n fatorial") o produto de todos os números inteiros de 1 até n (n natural maior que 1), $1! = 1$ e $Q = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$.

Para quantos valores de n tem-se Q quadrado perfeito?

Problema 277) Dois amigos apostaram a conta do restaurante da seguinte maneira: um dizia qualquer número do intervalo entre 1 e 10 (ambos inclusive). Em seguida o outro somava a este qualquer nḿero do mesmo intervalo. Depois o primeiro somava ao total outro número, sempre do mesmo intervalo, e assim alternadamente. O primeiro que chegasse exatamente a 100, o valor da conta, ganharia a aposta. Quem poderia vencer com certeza? E qual sua estratégia?

"Afinal de contas, o que é a Matemática senão a solução de quebra-cabeças? E o que é a Ciência senão um esforço sistemático para obter respostas cada vez melhores para os quebra-cabeças impostos pela natureza?"

Martin Gardner

SOLUÇÕES

Problema 6) Ao final, ficarão abertos os armários que foram mexidos um número ímpar de vezes, isto é, os armários cujos números possuem uma quantidade ímpar de divisores positivos.

A quantidade q de divisores positivos de um número N é dada por

$$q = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)$$

onde α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$ são os expoentes dos fatores de N em sua decomposição em fatores primos.

Para que q seja ímpar, é necessário e suficiente que cada um dos fatores anteriores seja também ímpar e, para tanto, deve-se ter α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$ todos pares, o que implica que N é um quadrado perfeito.

Uma outra maneira — talvez mais simples — de ver que os quadrados perfeitos são justamente os números que têm um número ímpar de divisores é observar que, a cada divisor d de um número n corresponde o divisor n/d. Se d for sempre diferente de n/d, então os divisores de n se grupam aos pares. Mas quando n for um quadrado perfeito, digamos $n = a^2$, então $a = n/a$. Neste caso, todos os outros se grupam em dois, e este fica solitário, gerando um número ímpar de divisores.

Problema 9) Listando todos os ternos de números naturais (idades das filhas) cujo produto seja 36 e registrando a soma de cada terno (número da casa em frente), verifica-se que em apenas duas dessas possibilidades obtém-se o mesmo valor, a saber 13, para o número da casa em frente: "1, 6 e 6" e "2, 2 e 9". Somos, então, forçados a admitir que é 13 o número da casa em frente, pois, caso contrário, não haveria necessidade de mais um dado (o tal dado fundamental) e, neste caso, como há uma filha mais velha, as idades são 2, 2 e 9 anos.

Problema 20) O número 1000! termina com 249 zeros. Podemos calcular este número da seguinte maneira: cada zero significa a presença de um fator 2 e um fator 5 em 1000!. Ora, na fatoração de 1000! é óbvio que existem mais fatores 2 que fatores 5. Então, se

$$1000! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times \cdots \times 997^1$$

fica claro que o número de zeros que estamos procurando é c.

Ora, quantos são os fatores 5? Em $N = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ existem 200 múltiplos de 5; 40 de $25 = 5^2$; 8 de $125 = 5^3$; 1 de $625 = 5^4$, para um total de 249.

Problema 30) Seja P o percurso que João andou a pé. Maria e João chegaram 10 min mais cedo porque Maria deixou de fazer P duas vezes (ponto de encontro–rodoviária–ponto de encontro). Então, Maria leva 5 min de carro em P. Como ela deveria chegar às 17 horas à rodoviária, o encontro se deu às $17\,\text{h} - 5\,\text{min} = 16\,\text{h}\ 55\,\text{min}$. Logo, João andou durante 55 minutos.

Problema 101)

1ª solução: (*direta*)

Sejam x - quantidade de ovos na cesta;
A - quantidade de ovos para o filho mais velho;
B - quantidade de ovos para o filho do meio;
C - quantidade de ovos para o filho mais novo.

$$A = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} \qquad \left(\text{sobram: } x - A = \frac{x-1}{2} \text{ ovos}\right)$$

$$B = \frac{(x-1)/2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4} \qquad \left(\text{sobram: } \frac{x-1}{2} - B = \frac{x-3}{4} \text{ ovos}\right)$$

$$C = \frac{(x-3)/4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$$

$$A + B + C = x \Longrightarrow \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} = x \Longrightarrow 7\,(x+1) = 8\,x \therefore x = 7$$

2ª solução: (*inversa*)

Seja x a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar ao filho mais novo. Este ganhou então $x/2 + 1/2$ ovos. Como a mãe ficou sem nenhum, podemos escrever:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow x = 1.$$

Repetindo o raciocínio para o filho do meio, onde x representa agora a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar aos dois filhos mais novos, temos:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Longrightarrow x = 3.$$

Repetindo o raciocínio para o filho mais velho, onde x representa agora a quantidade de ovos que a mãe tinha para dar aos três filhos, temos:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3 \Longrightarrow x = 7.$$

Portanto, a mãe levava 7 ovos; o filho mais novo ganhou 1 ovo, o do meio $3-1=2$ ovos e o mais velho, $7-3=4$ ovos.

Problema 198) Sim, Roberto tem mais chances de ganhar. Se, e somente se, a primeira escolha de Roberto não for a porta do carro, ele ganhará o carro. Logo, ele possui duas chances de ganhar contra uma de não ganhar.

Rodrigo ganhará o carro se, e somente se, escolher a porta do carro. Logo, ele possui uma chance de ganhar contra duas chances de não ganhar o carro.

Problema 251) Para $n = 1$, temos $Q = 1$; para $n = 3$, temos $Q = 1 + 2 + 6 = 9$. Para mostrar que estes valores de Q são os únicos quadrados perfeitos, vemos que, para $n = 4$, $Q = 9 + 24 = 33$; e para $n \geq 5$, todos os valores de Q terminam por 3 pois para $n \geq 5$, $n!$ termina por 0 por ser múltiplo de 10. E como nenhum quadrado termina por 3, somente para $n = 1$ e $n = 3$ tem-se Q quadrado perfeito.

Problema 277) Aquele que conseguir atingir antes de seu adversário a soma 89, chegará a 100 e ganhará o jogo. Mas quem atingir antes de seu adversário a soma 78, assegurará sua chegada à soma 89. Continuando este raciocínio, vemos então que, para assegurar a vitória, basta que sejam atingidas as somas 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 e 89. Logo, o primeiro jogador, utilizando essa estratégia, garantirá sua vitória.

Referências

[1] Silva, J. e L. Lopes (2000), *É divertido resolver problemas*, QED Texte.

[2] Polya, G. (1994), *A arte de resolver problemas*, Interciência.