

II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

25 A 29 DE OUTUBRO DE 2004

OFICINA

PROBLEMAS DE GEOMETRIA EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

PAULO JORGE M. TEIXEIRA

E-MAIL: ganpjmt@vm.uff.br ou pjorgehmtl@terra.com.br

Problemas de Geometria em Análise Combinatória

1. Introdução

A combinatória que vamos aqui desenvolver, são conceitos que permitem resolver alguns tipos de problemas de contagem de subconjuntos de um dado conjunto finito, sem que tenhamos que descrever ou explicitar todos os seus elementos e depois contá-los.

Na verdade, é parte da análise combinatória que se ensina aos alunos de ensino médio, procurando, na medida do possível, não focar naquela "mesmice" que se encontra em grande parte dos livros textos.

O que se pretende neste Minicurso é utilizar as ferramentas e técnicas da Análise Combinatória para resolver diferentes problemas (alguns interessantes) da geometria euclídeana,

Sempre que possível, lançaremos mão de material concreto para confirmar os resultados obtidos e melhorar o entendimento das questões propostas e resolvidas.

É lógico que existem outras técnicas mais sofisticadas para resolver problemas mais complexos, mas que não vamos focar aqui. Além disso, por ser uma parte da matemática que encontra muitas aplicações no nosso dia-a-dia e de fácil entendimento, deveria ser um assunto que todos gostassem. Mas, infelizmente, isso não é verdade !!

Análise Combinatória ainda é um "pavor" tanto para nossos alunos quanto para nós, professores. Tanto é assim que vou propor uma ordem de apresentação um pouco diferente do que habitualmente se encontra nos textos usuais. O conteúdo não muda, mas sim o modo de "domar o leão", que acreditem, não é tão feroz assim como tentam alardear por aí.

2. Princípio Multiplicativo(pm)

"Se uma decisão A pode ser tomada de m modos diferentes e, se para cada um desses m modos possíveis de acontecer a decisão A, uma segunda decisão B puder ser tomada de n modos diferentes, então: o número de modos de se tomar a decisão A, seguida da decisão B, é $m.n$ ".

O enunciado acima, básico para resolver problemas de contagem a nível de ensino médio, é conhecido como **Princípio Multiplicativo** ou **Princípio da Multiplicação** ou **Princípio Fundamental da Contagem**.

Para motivação do Princípio, vamos considerar o exemplo abaixo:

Exemplo: Uma sala possui 5 portas. De quantos modos uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra porta diferente da que havia entrado?

Chamando as portas de P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 vê-se que se a pessoa entrar pela porta P_1 , há 4 portas para sair: P_2, P_3, P_4 ou P_5 . Do mesmo modo, entrando pela porta P_2 , há 4 portas para sair: P_1, P_3, P_4 ou P_5 .

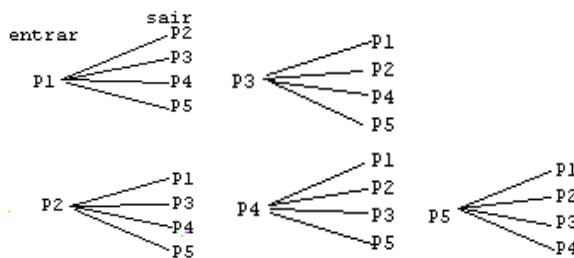
Assim, a decisão A: entrar por uma das portas, pode ser tomada de 5 modos e, depois disso, a decisão B: sair por uma porta diferente daquela que entrou, pode ser tomada de 4 modos. Assim, o número de maneiras de se tomar as decisões A e B é $5 \times 4 = 20$.

Observe que o uso do Princípio Multiplicativo permite obter o número de elementos do conjunto C, conforme abaixo, constituído por todos os pares de portas possíveis para entrar e sair, sem que houvesse necessidade de enumerar seus elementos e, depois, contá-los.

$$C = \{ (P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_1, P_4), (P_1, P_5), (P_2, P_1), (P_2, P_3), (P_2, P_4), (P_2, P_5), (P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_3, P_4), (P_3, P_5), (P_4, P_1), (P_4, P_2), (P_4, P_3), (P_4, P_5), (P_5, P_1), (P_5, P_2), (P_5, P_3), (P_5, P_4) \}$$

Poderíamos também representar a solução como:

entrar \ sair	P1	P2	P3	P4	P5
P1	não	(P1,P2)	(P1,P3)	(P1,P4)	(P1,P5)
P2	(P2,P1)	não	(P2,P3)	(P2,P4)	(P2,P5)
P3	(P3,P1)	(P3,P2)	não	(P3,P4)	(P3,P5)
P4	(P4,P1)	(P4,P2)	(P4,P3)	não	(P4,P5)
P5	(P5,P1)	(P5,P2)	(P5,P3)	(P5,P4)	não



Note que, a impossibilidade de sair pela mesma porta em que havia entrado, é representada pelos pares ordenados da forma (P_i, P_i) , $1 \leq i \leq 5$, e representados na tabela acima por "não". Caso tal imposição não fosse feita, teríamos: $5 \cdot 5 = 25$ modos de entrar e sair da sala.

3. Permutações Simples

Dadas as letras M, A e U, de quantos modos é possível "embaralhá-las"? Ou então "ordená-las"? Ou então "agrupá-las"?

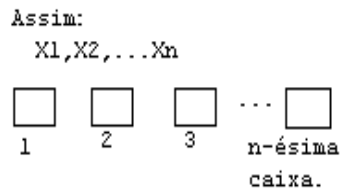
Podemos "arrumá-las" assim: MAU MUA AMU AUM UAM ou UMA. Assim, há 6(seis) ordenações das letras M, A e U.

De um modo geral, qualquer ordenação de n objetos distintos

X_1, X_2, \dots, X_n é chamada de uma permutação simples desses n objetos distintos.

Observe que temos n objetos e queremos saber a quantidade de modos de poder "embaralhá-los" ou "agrupá-los", sem que tenhamos esquecido de nenhum deles. Ou

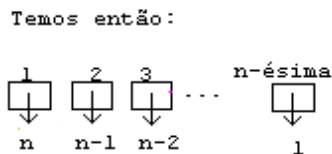
seja, é o mesmo que pensar que possui n objetos e vou colocá-los em exatamente n caixas, cada caixa contendo somente um único objeto.



Logo, há n modos de escolher um objeto para preencher a caixa 1.

Uma vez preenchida a caixa 1, e já tendo utilizado um objeto, sobram $(n - 1)$ objetos para escolher somente um a ser colocado na caixa 2, $(n - 2)$ objetos para escolher somente um a ser colocado na caixa 3, e, assim, sucessivamente, até que para a n -ésima caixa, há um só objeto para ser colocado nessa caixa.

Quando digo que há, por exemplo, $(n-2)$ objetos para serem colocados na caixa 3, na verdade o melhor seria dizer que: dispomos de $(n - 2)$ objetos e queremos colocar somente 1 na caixa 3. Então, o número de modos de escolher, entre esses $(n - 2)$ objetos aquele que ocupará a caixa 3 é $(n - 2)$ modos.



Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de modos de arrumar, ordenadamente, n objetos distintos em n caixas é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

A quantidade de modos de ordenar n objetos distintos é o número de permutações simples desses n objetos distintos e é representado pelo símbolo: P_n . Assim: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$

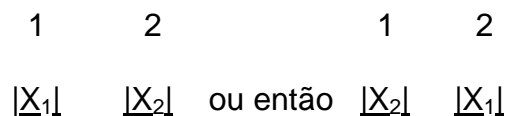
Portanto, não se esqueça:

O número de modos de arrumar ordenadamente n objetos distintos em n caixas, que contenham exatamente um só objeto por caixa, é conhecido como o número de permutações simples desses n objetos distintos X_1, X_2, \dots, X_n e representado por P_n .

Para melhor entendimento deste assunto, vejamos:

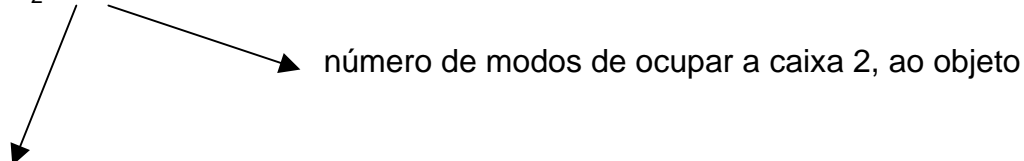
P_2 é o número de modos de ordenar 2 objetos distintos. Temos, então, por exemplo, os objetos X_1 e X_2 e as caixas 1 e 2.

Logo:



Assim:

$$P_2 = 2 \cdot 1 = 2$$



que sobrou: 1

número de modos de escolher um dos dois objetos para ocupar a caixa 1: 2

De modo semelhante, o que seria P_1 ? Ora, é o número de modos de se escolher entre 1(um) objeto disponível, aquele que ocupará a única caixa 1, ou seja: $P_1 = 1$.

Parece bastante elementar ficar enfatizando esse conceito, mas na verdade quero que você entenda o porque de, por exemplo, do que seja P_0 . Ora, P_0 é o número de modos de se escolher entre zero objetos aquele que ocupará nenhuma caixa. Parece bastante estranha essa última frase, mas, na verdade o que quer dizer é que só existe 1(um) único modo de se fazer isso, qual seja: não fazer!!! Não há como realizar tal tarefa. Primeiramente por não dispor de objetos e em segundo lugar, por não dispor de nenhuma caixa. Daí, porque, $P_0=1$, ou seja, um só modo: não ordenar ninguém.

Tentei, dessa forma, eliminar essa grande dúvida que passa na cabeça das pessoas de achar que é "forçar a barra" ou ter que "acreditar" ou mesmo ter de aceitar que $P_0=1$, sem embasamento teórico. Ora, a matemática não é feita de crenças!!! Pelo menos até onde eu saiba!!!

Daí, não aceitar quando leio em algumas referências: define-se $P_0=0! = 1$. Bem, voltemos à análise combinatória:

Para facilidade de nossos cálculos definimos o símbolo $n!$ que lê-se: fatorial de n ou então n fatorial, como P_n . Assim $P_n = n!$.

Ainda reforçando a idéia, lembre-se que n é o número de objetos distintos que se deseja ordenar. Então, por ser uma quantidade de objetos é, portanto, um número natural. Não teria sentido, por exemplo, dizer que gostaríamos de embaralhar $3/4$ ou até -5 objetos e saber o número de modos de fazer isso.

Para efeito de treinamento, lembremos que:

$$P_0=0!=1$$

$$P_1=1!=1$$

$$P_2=2!=2.1$$

$$P_3=3!=3.2.1=6$$

$$P_4=4!=4.3.2.1=24$$

$$P_5=5!=5.4.3.2.1=120 \text{ e } \dots$$

Observe que:

$$\begin{aligned} P_5 &= 5.4.3.2.1 = 5.(4.3.2.1) = 5.4! \\ &= 5.4.(3.2.1) = 5.4.3! \\ &= 5.4.3.(2.1) = 5.4.3.2! \end{aligned}$$

Ou seja: $P_n = n! = n.(n-1)!$ ou, então $P_n = n!(n-1).(n-2)!$. E assim sucessivamente. Isso é muito útil, por exemplo, se quisermos simplificar a fração $\frac{9!}{6!} = \frac{9.8.7.6!}{6!} = 9.8.7.$

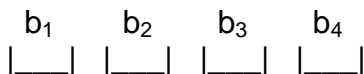
$$\text{Ou então: } 10.9.8 = \frac{10!}{7!}$$

$$\text{ou então: } (n-6).(n-5).(n-4) = (n-4).(n-5).(n-6).\underline{(n-7).(n-8)\dots 3.2.1} = (n-7)!$$

$$\frac{(n-4)!}{(n-7).(n-8)....3.2.1} = \frac{(n-4)!}{(n-7)!}$$

É também útil na resolução de exercícios que aparecem por aí em livros textos. Bem , vamos agora ver alguns exemplos:

Exemplo1. De quantos modos 4 pessoas podem se sentar em quatro bancos, colocados lado a lado?



- O primeiro banco pode ser ocupado por quaisquer das 4 pessoas, ou seja: 4 opções.
- Uma vez que o primeiro banco esteja ocupado, sobram 3 pessoas para uma delas ocupar o banco 2 : 3 opções.
- Para o banco 3 , sobram 2 pessoas, das quais uma delas pode ocupá-lo : 2 opções.
- E para o banco 4, só sobrou à 4ª pessoa ocupá-lo, ou melhor , sobrou o banco, e, se a pessoa que sobrou quiser sentar-se, só há essa alternativa: sentar-se ali mesmo ! Assim : $P_4 = 4.3.2.1 = 24$ modos.

Um dos tipos de problemas mais badalados por aí são aqueles que falam de "embaralhamento" das letras de uma palavra, como aquele que falei no início deste capítulo, com as letras da palavra MAU. Os matemáticos resolveram chamar de **anagrama** a qualquer ordenação de letras de uma determinada palavra. É que, entre as ordenações de MAU, por exemplo, aparecem AMU,AUM,UAM etc, que não parecem ter algum sentido na língua portuguesa ou em outra língua. Daí, qualquer ordenação de letras é dita um **anagrama**.

Então, poderíamos perguntar:

Quantos são os anagramas da palavra MAU ?

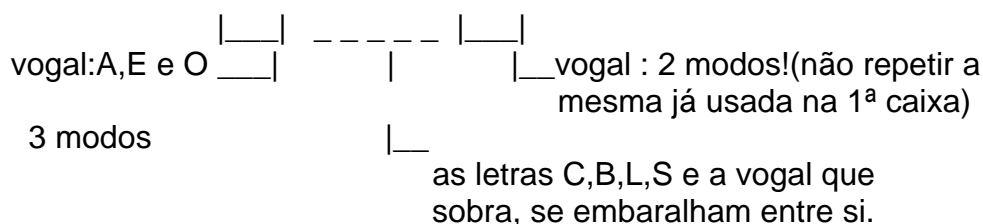
E a resposta é: $P_3 = 3! = 6$ (que são aquelas que já vimos antes).

Mas, um determinado professor, não satisfeito em apresentar exemplos tão elementares a seus alunos , começa a "criar" ou "elaborar" certos probleminhas para seus pupilos, do tipo :

Exemplo 2. Quantos são os anagramas da palavra CABELOS ?

Ora, $P_7 = 7! = 5040$.

-Quantos começam e terminam por vogal?



Assim: $3.P_5.2 = 3.120.2 = 720$.

-Quantos começam por consoante?

$$\begin{array}{|c|} \hline _ \\ \hline \end{array} _ _ _ _ _ _ \quad 4.P_6= 4.6!$$

|_consoantes: C,B,L e S

-Quantos têm as letras C,B,L juntas, no início do anagrama, nessa ordem?

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline C & B & L \\ \hline \end{array} _ _ _ _ _ _$$

Isso é o que chamo de uma "caixa preta", inviolável, que não pode ter a ordem das letras alterada.

Assim, só podemos "embaralhar" as restantes 4 letras: A,E,O,S.

Portanto, ficamos: $P_4= 4!=24$

-Quantos têm as letras C,B,L juntas no início do anagrama em qualquer ordem?

$$\begin{array}{|c|} \hline _ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline _ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline _ \\ \hline \end{array} _ _ _ _ _ _$$

Essas 3 caixas só podem ser ocupadas por quaisquer das letras C,B,L. Daí: $P_3= 3!= 6$

As demais: $P_4= 4! = 24$

Total de ordenações: $P_3. P_4= 6. 24= 144$.

-Quantos têm as letras C,B,L juntas?

Primeiramente fazemos a "caixa preta" se embaralhar com as outras 4 letras. Tem-se então:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{cx. preta} \\ \hline \end{array} _ _ _ _ _ _ \quad \text{Logo: } P_5= 5!$$

Agora, vamos ordenar as 3 letras dentro da "caixa preta" : $P_3= 3!$

Total de ordenações: $P_5.P_3= 120. 6= 720$

-Quantos têm as vogais e as consoantes intercaladas?

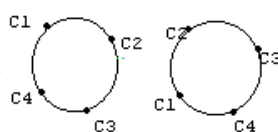
-Quantos têm a letra C no 1º lugar e a letra B no 2º lugar?

-Quantos têm a letra C no 1º lugar ou a letra B no 2º lugar?

-Quantos têm a letra C no 1º lugar ou a letra B no 2º lugar ou a letra L no 3º lugar?

-E outras perguntas que a criatividade permita!

Exemplo 3. De quantos modos 4 crianças podem dar-se as mãos e formar uma roda?



Observe as "rodas" acima. Parecem diferentes não é mesmo?

Mas, para nós que estamos "olhando" de frente: a "mão esquerda" da criança C_1 "está dada" à "mão direita" da criança C_2 e a "mão direita" da criança C_1 "está dada" à

"mão esquerda" da criança C_4 . Portanto, as duas rodas: $C_1 C_4 C_3 C_2$ e $C_2 C_1 C_4 C_3$ são iguais!

Numa roda, o que importa é a posição relativa das crianças entre si e, então, a criança C_1 está à direita de C_2 e à esquerda de C_4 ; a C_2 está à esquerda de C_1 e à direita de C_3 ; a C_3 está à direita de C_4 e à esquerda de C_2 ; a C_4 está à direita de C_1 e à esquerda de C_3 , em ambas as rodas.

Isto quer dizer que se as crianças que formam a 1ª roda se "movimentarem" no sentido horário (grande giro) ou no sentido anti-horário (pequeno giro), farão coincidir a roda 1 com a roda 2. Em outras palavras, a 1ª roda pode ser "virada" na 2ª roda.

Isso já não poderia ser feito com a 3ª roda abaixo:



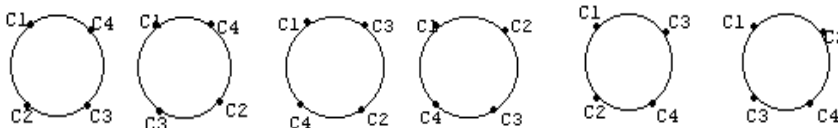
Não há movimento algum na 1ª roda que faça essa roda ser "virada" na 3ª roda. (A criança C_1 está com a "mão direita" "dada" à criança C_4 na roda 1 e com a "mão direita" "dada" à criança C_3 na 3ª roda.

E, obviamente, elas não podem "soltar" as mãos na hora do giro).

Assim, é errado pensar que para se formar uma roda basta escolhermos uma ordem para as crianças. Portanto, é errado pensar que a resposta é $4! = 24$ modos.

Como cada roda pode ser "virada" de 4 modos, ao contarmos 24 modos, como acima, cada roda foi contada 4 vezes. Precisamos, então, retirar esse "excesso de contagem", ou seja, dividir o total por 4 (já que cada roda admite 4 "viradas" iguais, ou seja, representam a mesma roda). Assim, o resultado é: $\frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6$ modos. Que são os seguintes:

$$4 \cdot 4$$



Exemplo4. De quantos modos podemos dividir 6 pessoas em dois grupos de 3 pessoas cada ?

À primeira vista, poder-se-ia pensar que fosse correto fazer assim:

$$\overline{P_1 \ P_2 \ P_3} \quad \overline{P_4 \ P_5 \ P_6}$$

grupo1 grupo 2

Como há $P_6 = 6!$ modos de colocar as 6 pessoas em fila (tomando um grupo com as 3 primeiras pessoas e o outro grupo com as outras 3 pessoas), a resposta pode parecer ser a acima. Mas não é !!

Se pensarmos na divisão das 6 pessoas do seguinte modo $P_1 \ P_2 \ P_3 / P_4 \ P_5 \ P_6$, ela é a mesma divisão das pessoas da forma $P_4 \ P_5 \ P_6 / P_1 \ P_2 \ P_3$.

Os grupos de pessoas que formamos, são os mesmos: um grupo com as pessoas 1, 2 e 3 e outro grupo com as pessoas 4, 5 e 6. O que fizemos foi representar as pessoas de cada grupo em ordens diferentes, porém, contendo essas mesmas

peçoas. Mas não estamos, nesse momento, interessados em ordenar as peçoas em seus respectivos grupos. O que se quer é dividi-las em dois grupos que tenham o mesmo número de peçoas: três. E, mais ainda: o grupo das peçoas {1,2,3} é o mesmo que o grupo {2,1,3}, pois as peçoas que compõem o grupo são as mesmas. O que diferencia um grupo de outro são as peçoas que fazem parte deles, os grupos e não a ordem em que escrevemos seus nomes, ou apelidos.

Além disso, naquela contagem errada que pensávamos ser a correta, de $6! = 120$, as divisões dos grupos, por exemplo, $P_1 P_2 P_3 / P_4 P_5 P_6$ e $P_4 P_5 P_6 / P_1 P_2 P_3$ foram consideradas como distintas (e portanto, faziam parte da contagem) divisões tais como as dos tipos:

$$\begin{aligned} &P_1 P_2 P_3 / P_4 P_5 P_6 \\ &P_2 P_1 P_3 / P_4 P_5 P_6 \\ &P_2 P_1 P_3 / P_5 P_4 P_6, \end{aligned}$$

que somente são diferentes pela ordem em que seus elementos foram apresentados, embora formem os mesmos grupos de peçoas.

Assim, cada divisão foi contada a mais:

- 2(duas) vezes a mais por causa da ordem em que os grupos foram apresentados ($P_1 P_2 P_3 / P_4 P_5 P_6$) é igual a ($P_4 P_5 P_6 / P_1 P_2 P_3$), (se escritos à direita do "traço" de divisão ou à direita do "traço", representam os mesmos grupos).

- $3! = 6$ (seis) vezes a mais por causa da ordem dos elementos no 1º grupo: ($P_1 P_2 P_3 / P_4 P_5 P_6$) é igual a ($P_3 P_1 P_2 / P_4 P_5 P_6$), que é igual a ($P_2 P_1 P_3 / P_4 P_5 P_6$), etc.

- $3! = 6$ (seis) vezes a mais por causa da ordem dos elementos no 2º grupo: ($P_1 P_2 P_3 / P_4 P_5 P_6$) é igual a ($P_1 P_2 P_3 / P_4 P_6 P_5$), que é igual a ($P_1 P_2 P_3 / P_5 P_4 P_6$), etc.

Logo, cada divisão foi contada $2 \cdot 3! \cdot 3!$ vezes a mais. Precisamos, então, "retirar" esse "excesso de contagem", ou seja:

o número de modos de dividir 6 peçoas em dois grupos de 3 peçoas cada é:

$$\frac{6!}{2 \cdot 3! 3!} = \frac{6!}{2 \cdot 3! 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3! 3!} = 10.$$

E novamente entra aqui, aquele espírito criativo do professor em sugerir a seus alunos:

- E se tivéssemos 18 peçoas ? De quantos modos podemos dividi-los em dois grupos de 9 cada ?
- E em três grupos de 6 ?
- E em um grupo de 7 e outro grupo de 11 peçoas ?
- E em grupos de duas peçoas ?
- E em dois grupos de 6 e dois grupos de 3 peçoas cada ?

E aí diria um qualquer aluno: que chatice, hein professor ?

Não tem mais nada o que fazer não ?

Nesse momento acredito que esse aluno já compreendeu bem aquilo que se está querendo dele. Pelo menos esse é o sentimento.

Exemplo 5. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 4, 5, 6 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Pergunta-se:

- que lugar ocupa o número 6145 ?

total de números começando por 1: $\underline{1} _ _ _ P_3 = 3! = 6$

total de números começando por 4: $\underline{4} _ _ _ P_3 = 3! = 6$

total de números começando por 5: $\underline{5} _ _ _ P_3 = 3! = 6$

O número 6145 é o menor número começado por 6.

Assim, o número 6145 está na 19ª posição em ordem crescente.

- Qual o número que ocupa a 10ª posição ?

total de números começando por 1: $P_3 = 6$

total de números começando por $\underline{41} _ _ P_2 = 2! = 2$

Assim, o maior número começando por 41, que é o número 4165, está na 8ª posição.

E, agora, começando por $\underline{45} _ _ ?$

Temos o número 4516 que está na 9ª posição e, finalmente, o número 4561 que está na 10ª posição.

- Qual a soma de todos os números formados com esses 4 algarismos distintos?

Queremos obter a soma de todos os números formados, que, como já vimos, dá um total de $P_4 = 4! = 24$ números, ou, equivalentemente, queremos obter o somatório de 24 parcelas. E o que cada uma dessas parcelas têm em comum ?

Por exemplo:

	1456	
	+ 1465	
24 parcelas	+ 1564	
	+ 1546	
	+ .	
	.	
	.	
	+ 6541	---- último número formado, em ordem crescente, que está na 24ª posição, ou melhor, na 24ª parcela da soma que queremos efetuar.

Em qualquer coluna, cada algarismo aparece tantas vezes quantas forem as permutações dos outros 3 algarismos, ou seja: $P_3 = 3! = 6$ vezes.

Então, em cada coluna, ou melhor, em cada ordem (unidades simples, dezenas simples, centenas simples ou unidades de milhar), vamos somar:

- o algarismo 1 (um), 6 vezes;
- o algarismo 4 (quatro), 6 vezes;
- o algarismo 5 (cinco), 6 vezes e
- o algarismo 6 (seis), 6 vezes.

Ou então:

$$(1+1+1+1+1+1) + (4+4+4+4+4+4) + (5+5+5+5+5+5) + (6+6+6+6+6+6) = 6 \cdot (1+4+5+6) = 6 \cdot (16) = 96$$

Assim, na ordem das unidades simples temos: 96;

na ordem das dezenas simples temos: 96 dezenas = 960 unidades simples;

na ordem das centenas simples temos: 96 centenas = 9600 unidades simples;

na ordem das unidades de milhar temos: 96 unidades de milhar = 96000 unidades simples.

Logo, em quantidade de unidades, tem-se um total de:

$$\begin{array}{r} 96 \\ 960 \\ 9600 \\ + \underline{96000} \end{array}$$

106656 (soma total de todos os números obtidos pela permutação dos algarismos 1,4,5 e 6 entre si).

- Dentre todos os números assim formados, qual o algarismo que ocupa o 70º lugar quando se escreve cada número a seguir de outro em ordem crescente ?

Aqui vamos fazer uma parada para lembrar que, quando escrevemos, por exemplo, o número 4128736, o primeiro algarismo escrito foi o 4, o segundo algarismo escrito foi o 1, o terceiro foi o 2 e, assim, sucessivamente.

Então, se queremos saber qual foi o 70º algarismo escrito quando permutamos os algarismos 1, 4, 5 e 6 e colocamos os números assim formados em ordem crescente, verificamos que: sendo $P_3 = 6$ o total de números que começam pelo algarismo 1, (1 _ _ _), já escrevemos, portanto, $6 \cdot 4 = 24$ algarismos ao terminar de escrever o maior dos números iniciados por 1, que é o número 1654..

Se o total de números que começam pelo algarismo 4 (4 _ _ _), também é 6, escrevemos mais $6 \cdot 4 = 24$ algarismos. Já temos, então, um total de 48 algarismos escritos.

Se tomássemos todos os números começados por 5, teríamos mais 24 algarismos e isso daria um total de 72 algarismos escritos, ultrapassando o 70º algarismo.

Temos, então, de proceder com calma.

Começando por 51 _ _ 2 números => 8 algarismos escritos

Começando por 54 _ _ 2 números => 8 algarismos escritos. Até aqui, tem-se: $48 + 8 + 8 = 64$ algarismos escritos.

Começando por 56 _ _ , o menor número escrito é 5614 => + 4 algarismos escritos. Total: $64 + 4 = 68$ algarismos escritos.

O próximo número a ser escrito é 5641 e, como começamos escrevendo um número da esquerda para a direita, o 70º algarismo escrito será o segundo algarismo escrito para esse número, que é o algarismo 6.

Exercícios

1. Considere uma circunferência de raio unitário e dividida em 4(quatro) partes iguais, representando um mapa com 4 (quatro) países.
Pergunta-se:
 - 1.1. Com duas cores diferentes podemos pintar esse mapa?
 - 1.2. E com 3(três) cores ?
 - 1.3. De quantos modos diferentes isso pode ser feito?
 - 1.4. De quantos modos esse mapa pode ser colorido (considerando cada país com uma única cor e países que possuam uma linha fronteira em comum não podendo ter a mesma cor), se possuímos m cores diferentes?
 - 1.5. Qual o menor valor de m em que é possível colorir esse mapa?
 - 1.6. E de quantos modos isso pode ser feito?

2. Considere um cubo que tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar, gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

3. De quantos modos se pode pintar um cubo, usando seis cores diferentes, sendo cada face pintada com uma cor?

4. Idem ao anterior:
 - 4.1. pintar um prisma pentagonal regular, usando sete cores;
 - 4.2. “ “ “ hexagonal regular, “ oito “ ;
 - 4.3. “ uma pirâmide triangular regular, usando quatro cores;
 - 4.4. “ “ “ quadrangular regular, usando cinco cores;
 - 4.5. “ “ “ pentagonal “ “ seis “ ;
 - 4.6. “ “ “ hexagonal “ “ sete “ ;
 - 4.7. “ um tetraedro regular, usando quatro cores;
 - 4.8. “ “ octaedro regular, “ oito cores;
 - 4.9. “ “ dodecaedro regular, usando doze cores;
 - 4.10. “ “ icosaedro regular, usando vinte cores;

5. Sobre uma circunferência existem n pontos distintos. Quantos polígonos, não necessariamente convexos, podemos construir tendo para vértices esses n pontos ?

3.2. Permutações Circulares

Chama-se a uma permutação circular de n objetos distintos a toda arrumação desses objetos, em torno de um círculo, de modo que os objetos estejam dispostos em exatamente n lugares, igualmente espaçados.

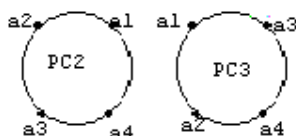
Representamos o número total de permutações de n objetos distintos por $(PC)_n$.

Aqui, duas permutações circulares são ditas idênticas quando a posição relativa de cada objeto em relação aos demais é a mesma em ambas as permutações, ou seja, se quaisquer uma das permutações sofrer uma rotação de ângulo convenientemente determinado e seu sentido fizer com que ambas coincidam, dizemos que essas permutações são equivalentes.

Por exemplo, considere a permutação circular PC_1 abaixo:



Se fizermos uma rotação de 90 graus no sentido anti-horário de PC_1 e obtivermos PC_2 , como indicado abaixo, diz-se que as permutações PC_1 e PC_2 são equivalentes, ou seja, representam a disposição dos objetos a_1, a_2, a_3 e a_4 no círculo. O mesmo não ocorre com a permutação circular PC_3 também indicado abaixo. As permutações PC_1 e PC_3 não são equivalentes, bem como as permutações PC_2 e PC_3 .



Também podemos confirmar as informações dadas acima se, olhando para os círculos no sentido anti-horário, notarmos que:

- Em PC_1 : a_1 precede a_2 , que precede a_3 , que precede a_4 , que precede a_1 .
- Em PC_2 : a_1 precede a_2 , que precede a_3 , que precede a_4 , que precede a_1 .
- Em PC_3 : a_1 precede a_2 , que precede a_4 , que precede a_3 , que precede a_1 .

Daí porque, as permutações PC_1 e PC_2 são equivalentes: A POSIÇÃO RELATIVA DOS OBJETOS É A MESMA.

Portanto, como o que importa é a posição relativa dos objetos, se dispomos de n objetos distintos para serem colocados em torno de um círculo, após dividir o círculo em exatamente n lugares, igualmente espaçados, tem-se:

- há 1(um) modo de colocar o primeiro objeto no círculo, pois, em qualquer lugar que escolhamos para colocá-lo, ele será o único objeto no círculo.
- há 1(um) modo de colocar o segundo objeto: ele será colocado no lugar imediatamente após o primeiro. Entenda-se imediatamente pois não há ninguém no círculo. Assim, em qualquer lugar, será imediatamente após o primeiro.
- há 2 (dois) modos de colocar o terceiro objeto: imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo. Se preferir, entre o primeiro e o segundo, ora pela direita, ora pela esquerda.
- há 3(três) modos de colocar o quarto objeto: imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo ou imediatamente após o terceiro.
- há $(n - 1)$ modos de colocar o n -ésimo e último objeto.
Logo, pelo Princípio Multiplicativo tem-se:

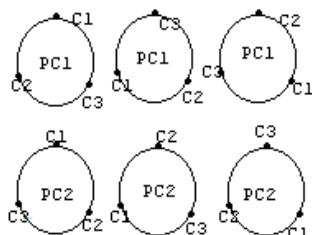
$$(PC)_n = 1.1.2.3.....(n-1) =(n-1)!$$

Exemplo 1. Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 3 crianças?

Como a roda de ciranda gira (pois as crianças se movimentam. A idade delas as faz serem irrequietas), o que importa não é o lugar de cada criança na roda (mesmo porque as crianças não ficam paradas) e sim, a posição relativa das crianças entre si.

Logo, a resposta é: $(PC)_3 = (3-1)! = 2! = 2$

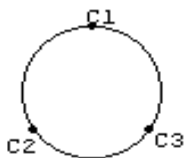
Vejam as respostas:



Naturalmente cada uma das 3 rodas de cada fila, representam a mesma roda de ciranda. Pense que cada roda da mesma fila representa uma “fotografia” da roda de ciranda, vista de cima, em instantes diferentes.

Exemplo 2. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 crianças, de modo que, duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Com as 3(três) outras crianças podemos formar $(PC)_3 = 2! = 2$ rodas (por exemplo, as duas representadas acima). Vamos tomar uma delas:



Há, agora, 3(três) modos de colocar uma das crianças que não podem ficar juntas, quais sejam:

-entre C_1 e C_2 , ou entre C_2 e C_3 , ou então entre C_3 e C_1 .

Uma vez escolhido um dos 3(três) modos acima, há, agora, 2(dois) modos de colocar a outra criança na roda (obviamente sem colocá-la junto da criança anterior).

A resposta é, então: $2! \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Exercícios

- 1) Uma pirâmide quadrangular regular deve ser colorida, cada face com uma cor, com cinco cores diferentes. De quantos modos isso pode ser feito?
- 2) De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular usando seis cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

- 3) Quantos dados diferentes existem, se a soma das faces opostas deve ser 7?
- 4) De quantos modos se pode pintar uma pirâmide triangular regular, usando quatro cores;
- 4.2. De quantos modos se pode pintar uma pirâmide quadrangular regular, usando cinco cores;
- 4.5. De quantos modos se pode pintar uma pirâmide pentagonal regular, usando seis cores?
- 4.6. De quantos modos se pode pintar uma pirâmide hexagonal regular, usando sete cores?

4. Combinações Simples

Dado o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, quantos subconjuntos do conjunto A , com m elementos, existe (onde $0 \leq m \leq 4$) ?.

Certamente cada um de nós, um dia, lá pelos idos do primário (hoje conhecido como 1ª fase do ensino fundamental), já resolvemos um problema desse tipo. Tem-se:

- número de subconjuntos com 0 elementos: 1 ---{ }
- número de subconjunto com 1 elemento: 4 ---{1},{2},{3},{4}.
- número de subconjuntos com 2 elementos: 6 ---{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4},{3,4}
- número de subconjuntos com 3 elementos: 4 ---{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4}.
- número de subconjunto com 4 elementos: 1 ---{1,2,3,4}.

Um problema parecido como o acima seria perguntar: numa sala que possui 4 lâmpadas, de quantos modos podemos iluminar essa sala?
(a sala só estará no escuro se nenhuma lâmpada estiver acesa)

Ora, para que a sala fique iluminada (e conseqüentemente não fique no escuro), podemos realizar uma das seguintes ações: acender 1 só lâmpada, ou então 2(duas) lâmpadas dentre as 4(quatro), ou então 3(três) lâmpadas dentre as 4(quatro), ou então as 4(quatro) lâmpadas simultaneamente.

Ou seja: só não podemos deixar a sala apagada, ou matematicamente falando: não podemos tomar subconjuntos com 0 elementos.

A resposta é, então: $4+6+4+1=15$, que corresponde ao número de subconjuntos acima descritos (exceto o vazio) e trocando-se os algarismos 1, 2, 3 e 4, respectivamente por: lâmpada 1 (L1), lâmpada 2 (L2), lâmpada 3 (L3) e lâmpada 4 (L4).

Naturalmente que o problema poderia ser resolvido como: $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$, onde 2^4 é o número total de subconjuntos de um conjunto de 4 elementos, ou, por outro lado, é o somatório dos elementos da 4ª linha do Triângulo de Pascal (considerando que $C_0^0=1$ está na linha zero. Mais adiante veremos isso em detalhes).

Cada subconjunto com m elementos dentre os n elementos de um dado conjunto é chamado de uma **COMBINAÇÃO SIMPLES DE CLASSE m DOS n OBJETOS (ou elementos) X_1, X_2, \dots, X_n** .

Indicamos por $C_{m,n}$ ou então por C_n^m ou então por $\binom{n}{m}$, que lê-se: número de combinações de n objetos distintos tomados m a m, ou então: número de combinações de n objetos distintos escolhidos m a m.

O símbolo $\binom{n}{m}$ lê-se: binomial de n sobre m.

Assim, o número de modos de se escolher m objetos distintos entre n_objetos distintos disponíveis, é $C_{m,n}$.

Voltando ao exemplo anterior, tem-se: n = 4 lâmpadas.

$$C_{4,1} = 4 \quad C_{4,3} = 4 \quad C_{4,2} = 6 \quad C_{4,4} = 1 \quad \text{e} \quad , C_{4,0} = 1 (\text{sala não acesa}).$$

Vamos analisar detalhadamente o cálculo $C_{4,2} = 6$:

-a escolha do primeiro elemento da combinação pode ser feita de 4 modos: L_1, L_2, L_3 ou L_4 .

-a escolha do segundo elemento da combinação pode ser feita de 3 modos. Calma !!!!

A resposta parece ser : $4.3 = 12$, mas é lógico que já sabemos que é 6. Isto porque, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{L_1, L_4\}$, verificamos que a combinação $\{L_4, L_1\}$ é idêntica à anterior e foi contada como se fosse diferente. Do mesmo modo: $\{L_1, L_2, L_3\}$, $\{L_1, L_3, L_2\}$, $\{L_2, L_3, L_1\}$, $\{L_2, L_1, L_3\}$, $\{L_3, L_1, L_2\}$ e $\{L_3, L_2, L_1\}$ são idênticas.

De fato, quando foi dito que há 4 modos de escolher o primeiro elemento da combinação, é porque consideramos as escolhas L_1 e a seguir L_2 como diferente da escolha L_2 e a seguir L_1 , e portanto estamos contando $\{L_1, L_2\}$ como diferente de $\{L_2, L_1\}$, o que não é verdade!

Resumindo: na resposta 12, estamos contando uma vez cada combinação, para cada ordem de escrever os seus elementos.

Como em cada combinação os elementos podem ser escritos de

$P_2 = 2! = 2$ maneiras, cada combinação foi contada 2 vezes mais. Precisamos, então, retirar esse "excesso de contagem" , razão porque o cálculo de $C_{4,2}$ é: $C_{4,2} = \frac{4.3}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$$P_2 = 2!$$

$$\text{Do mesmo modo: } C_{4,3} = \frac{4.3.2}{3!} = \frac{4.3.2}{6} = 4 ; C_{4,1} = \frac{4}{1} = 4 ;$$

$$C_{4,4} = \frac{4.3.2.1}{4!} = \frac{4.3.2.1}{24} = 1$$

$$\text{E, o mais interessante: } C_{4,0} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

E como se lê $C_{4,0}$?

Ora, é o número de modos de se escolher 0(zero) objetos distintos entre 4(quatro) objetos distintos disponíveis.

E a resposta é: 1, ou seja: só há 1(um) modo de se fazer isso: **NÃO ESCOLHER NINGUÉM, POIS É ISSO QUE SE QUER.**

O mesmo que: o número de modos de acender 0(zero) lâmpadas entre as 4(quatro) lâmpadas da sala, ou seja, não acender nenhuma das lâmpadas. É essa a única opção de escolha !.

De um modo geral tem-se n objetos distintos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ e as m posições $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$.

$$\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3} \quad \dots \quad \overline{P_{m-1}} \quad \overline{P_m}$$

- o número de modos de escolher um objeto para a posição P_1 é: n .
- o número de modos de escolher um objeto, entre os $(n-1)$ disponíveis, para a posição P_2 é: $n-1$
- o número de modos de escolher um objeto, entre os $(n-2)$ disponíveis, para a posição P_3 é $n-2$

E assim sucessivamente, até:

- o número de modos de escolher um objeto, entre os $[n - (m - 1)] = n - m + 1$ disponíveis para a posição P_m é: $n - m + 1$.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, as m posições podem ser ocupadas de $n.(n - 1).(n - 2) \dots (n - m + 1)$ modos distintos.

Mas, como em cada combinação os elementos podem ser escritos de $P_m = m!$ maneiras, cada combinação foi contada $m!$ vezes mais.

Assim temos: $C_{n,m} = \frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n - m + 1)}{m!}$, $0 < m < n$

e também: $C_{n,0} = 1$; $n \geq 0$.

Se multiplicarmos ambos os termos da fração acima por $(n-m)!$ temos :

$$C_{n,m} = \frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-m+1).(n-m)!}{n!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, 0 \leq m \leq n.$$

De $C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ obtém-se:

$$C_{n,n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]} = \frac{n!}{(n-m)!(m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Portanto: $C_{n,m} = C_{n,n-m}$ que são conhecidas como **COMBINAÇÕES COMPLEMENTARES**.

Sempre que $n - m < m \Leftrightarrow n < 2m \Leftrightarrow m > \frac{n}{2}$.

O cálculo de $C_{n,m}$ pode ser facilitada pela combinação complementar.

Por Exemplo: $C_{100,98} = C_{100,2} = \frac{100!}{98! 2!} = \frac{100.99.98!}{98! 2!} = 4950$.

Exercícios

- 1) Marcam-se 5 pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta s paralela à r . Quantos triângulos existem com vértices em 3 (três) desses 13 pontos?
- 2) Quantos triângulos distintos podemos formar dispendo de 11 pontos num plano, 5 dos quais estão numa mesma reta?
- 3) Quantos triângulos são determinados por 8 pontos num plano, se não há três pontos colineares?
- 4) São dados os pontos A, B, C, D, E , e F sobre uma reta r e os pontos A, M, N, P e Q sobre uma reta s distinta de r . Quantos triângulos podem ser formados unindo-se esses pontos?
- 5) Tem-se 5 pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta s paralela a r . Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 (quatro) desses 13 pontos existem?
- 6) Quantos paralelogramos são determinados por um conjunto de 8 retas paralelas interceptando um outro conjunto de 5 retas paralelas?
- 7) Seja P o conjunto dos pontos de p retas ($p \geq 2$), paralelas duas a duas, de um plano. Seja Q o conjunto dos pontos de q retas ($q \geq 2$), paralelas duas a duas, do mesmo plano, concorrentes com as p primeiras. Calcule o número total de paralelogramos de vértices pertencentes ao conjunto $P \cap Q$ e de lados contados no conjunto $P \cup Q$.
- 8) Considere-se no espaço 50 pontos “em posição geral”, isto é, não existe reta que passe por 3 deles. Então, o número de triângulos com 3 vértices distintos que tais pontos determinam é:
- 9) Dados 20 pontos do espaço, dos quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos?
- 10) Considere n pontos distintos P_1, P_2, \dots, P_n , três quaisquer não sendo colineares. Com esses n pontos, quantos polígonos de p lados podem ser construídos?
- 11) Quantas diagonais possui um quadrado?
- 12) Quantas diagonais possui:
 - 12.1) um pentágono?
 - 12.2) um hexágono?
 - 12.3) um polígono de n lados?
- 13) Quantas diagonais possui:
 - 13.1) um cubo?
 - 13.2) um prisma pentagonal regular?
 - 13.3) um prisma hexagonal regular?
 - 13.4) um prisma cuja base é um polígono de n lados?
 - 13.5) uma pirâmide quadrangular regular?
 - 13.6) uma pirâmide pentagonal regular?
 - 13.7) uma pirâmide hexagonal regular?
 - 13.8) um tetraedro regular?
 - 13.9) um octaedro regular?
 - 13.10) um dodecaedro regular?
 - 13.11) um icosaedro regular?
- 14) Tem-se 13 pontos cuja maioria pertence a uma reta r e os restantes se situam sobre uma paralela a r . Com esses pontos como vértices, constroem-se todos os

- triângulos e quadriláteros convexos possíveis. A razão do número de quadriláteros para o número de triângulos é $14/11$. Quantos dos pontos pertencem a r ?
- 15) Dados n pontos de um plano, dos quais não há 3 em linha reta, qual o número máximo de interseção das retas formadas por esses pontos, excluindo-se desses números os n pontos dados?
- 16) Considere n ($n > 2$) pontos em um plano, entre os quais não há 3 (três) pontos colineares.
- 16.1 Quantas são as retas que contêm dois desses pontos?
- 16.2 Qual é o número máximo de pontos de interseção dessas retas?
- 17) São dados n pontos no plano de tal modo que entre as retas por eles determinados não há duas retas paralelas nem três retas concorrentes. Quantos são os pontos de interseção dessas retas que são distintos dos pontos dados?
- 18) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1 . Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C ?
- 19) Dados n pontos coplanares, dos quais p ($p < n$) são colineares, pede-se:
- 18.1 O número de triângulos cujos vértices são escolhidos entre esses pontos.
- 18.2 O número de quadriláteros cujos vértices são escolhidos entre esses pontos.
- 18.3 O número de pentágonos cujos vértices são escolhidos entre esses pontos?
- 20) Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1 e que não há 3 pontos em C colineares. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C ?
- 21) Considere um polígono convexo de n lados e suponha que não há duas de suas diagonais que sejam paralelas nem três que concorram em um mesmo ponto que não seja um vértice.
- 21.1 Quantas são os pontos de interseção dessas diagonais?
- 21.2 Quantos desses pontos de interseção são interiores ao polígono?
- 21.3 Quantos são exteriores?

5. Triângulo de Pascal

Os números binomiais que acabamos de verificar como calcular podem ser dispostos através de um quadro abaixo, conhecido como TRIÂNGULO DE PASCAL.

$$\begin{array}{ll}
 \binom{0}{0} & C_{0,0} \\
 \binom{1}{0} \binom{1}{1} & C_{1,0} \cdot C_{1,1} \\
 \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & C_{2,0} \cdot C_{2,1} \cdot C_{2,2} \\
 \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} & C_{3,0} \cdot C_{3,1} \cdot C_{3,2} \cdot C_{3,3} \\
 \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} & C_{4,0} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,4} \\
 \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} & C_{5,0} \cdot C_{5,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{5,3} \cdot C_{5,4} \cdot C_{5,5} \\
 \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6} & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Se substituirmos os números binomiais ou coeficientes binomiais acima pelos seus respectivos valores, obtemos:

1 linha 0
 1 1 linha 1
 1 2 1 linha 2
 1 3 3 1 linha 3
 1 4 6 4 1 linha 4
 1 5 10 10 5 1 linha 5

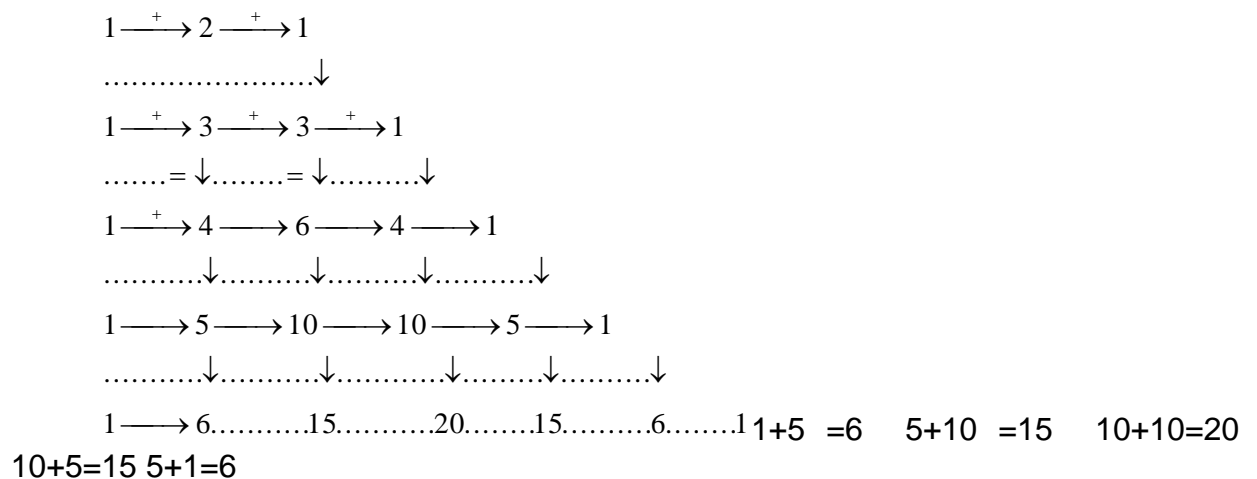
Prosseguindo no Triângulo de Pascal anteriormente iniciado, temos:

1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1
coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5	coluna 6	coluna 7	coluna 8

Assim, se contarmos as linhas e as colunas do Triângulo começando em zero, o

elemento da linha n e coluna p é calculado como $C_{n,p} \approx \binom{n}{p} \approx C_n^p$

É possível construirmos rapidamente o Triângulo de Pascal através de uma propriedade dos números binomiais conhecida como **RELAÇÃO DE STIFELL**, a saber:



$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$$

Somando-se dois elementos consecutivos de uma mesma linha do Triângulo de Pascal, obtemos como resultado, o elemento situado abaixo do elemento que representa a 2ª parcela.

Note-se que os elementos situados na coluna 0 (zero) são sempre iguais a 1, pois $C_{n,0} = 1$.

De modo idêntico, os elementos situados na última coluna de cada correspondente linha também são sempre iguais a 1, pois

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

Como já vimos antes, combinações complementares são iguais, ou seja: $C_{n,m} = C_{n,n-m}$.

Isto pode ser visualizado no Triângulo de Pascal pelo fato de:

O elemento $C_{n,m}$ está na linha n avançado de m colunas em relação ao início da linha.

O elemento $C_{n,n-m}$ está na linha n atrasado de m colunas em relação ao fim da linha.

Esses elementos estão na linha n , situados em posições **equidistantes em relação os extremos** e são iguais.

Veja, por exemplo:

a linha 4: 1 4 6 4 1
 |-----|
 |-----|

a linha 5: 1 5 10 10 5 1
 |-----|
 |-----|
 |-----|

a linha 6: 1 6 15 20 15 6 1
 |-----|
 |-----|
 |-----|

OBSERVAÇÃO:

Vamos agora dar uma justificativa para a Relação de Stifel através de um exemplo:

Considere um grupo formado por 1 (um) torcedor do Vitória e 5 (cinco) torcedores do Bahia.

Então, esse grupo possui $1+5= 6$ pessoas.

O número de modos de selecionar nesse grupo, um "subgrupo" formado por $4 = 3+1$ pessoas é: $C_{6,4} = C_{5+1,3+1}$

Assim:

(1) O número de modos de selecionar um "subgrupo" formado pelo torcedor do Vitória e por 3 torcedores do Bahia é:

$$1 \times C_{5,3} = C_{5,3}$$

|__selecionar o torcedor do Vitória

(2) O número de modos de selecionar um "subgrupo" formado de $4= 3+1$ pessoas, formado só por torcedores do Bahia, é:

$$C_{5,4} = C_{5, 3+1}$$

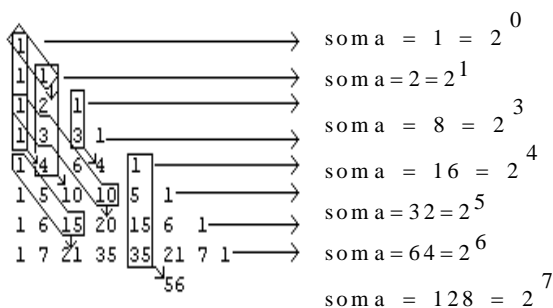
O "subgrupo" (1) é formado de tal modo que o torcedor do Vitória participa, e o subgrupo (2) é aquele em que o torcedor do Vitória não participa.

Como o número total de subgrupos é a soma do número de subgrupos dos quais o torcedor do Vitória participa com o número de subgrupos dos quais o torcedor do Vitória não participa, temos:

Torcedor Vitória participa_ Torcedor Vitória não participa
 $C_{5,3} + C_{5,3+1} = C_{5+1,3+1}$ -----Selecionar um subgrupo com 4
 pessoas.
 $10 \xrightarrow{+} 5$
 \downarrow
 $\dots\dots\dots 15 = C_{6,4}$

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$$

Dado o Triângulo de Pascal, podemos "extrair" resultados bastante interessantes e úteis para a resolução de exercícios, a saber:



Teorema das Linhas

A soma dos elementos de uma mesma linha n é 2^n , ou seja: $C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = 2^n$.

Teorema das Colunas

A soma dos elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal (começando a soma sempre pelo primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está na linha seguinte ao último elemento da parcela (da linha em que ele está) e na coluna seguinte ao da coluna do elemento último da soma.

Exemplo:

está na 7ª linha e 4ª coluna
 $1+5+15+35 = 56$
 está na 8ª linha e 5ª coluna

Assim:

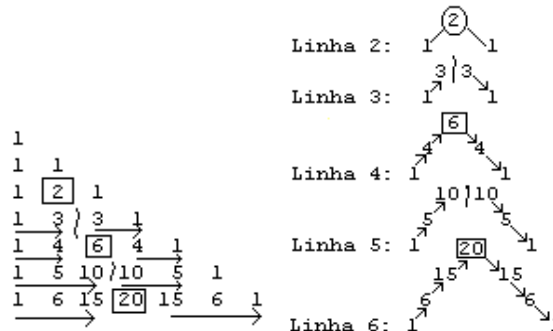
$$C_{m,m} + C_{m+1,m} + C_{m+2,m} + \dots + C_{m+n,m} = C_{m+n+1, m+1}$$

Teorema das Diagonais

A soma dos elementos de uma "diagonal" do Triângulo de Pascal (começando sempre no primeiro elemento da diagonal, ou seja: $C_{p,0}$) é igual ao elemento que está situado na linha seguinte à linha do último elemento da parcela e na coluna do último elemento da parcela, ou seja: é o elemento que está imediatamente abaixo do último elemento da parcela.

Assim:

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + C_{n+2,2} + \dots + C_{n+m,m} = C_{n+m+1,m}$$



Note que:

Na primeira metade de cada linha do Triângulo de Pascal, os elementos estão em ordem crescente (cada termo é menor que o termo seguinte) e na segunda metade de cada linha, os elementos estão em ordem decrescente (cada termo é maior que o termo seguinte).

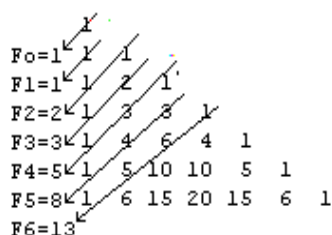
Isso pode ser descrito como:

Teorema:

$$C_{n,p} < C_{n,p+1}; \text{ se } p < \frac{n+1}{2}$$

$$C_{n,p} > C_{n,p+1}; \text{ se } p > \frac{n+1}{2}$$

Outro fato interessante:



A soma dos elementos da "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal, como mostrado acima, é definido como o: número de Fibonacci F_n .

Note que: $F_0 + F_1 = F_2$

$$F_2 + F_3 = F_4$$

$$F_4 + F_5 = F_6$$

De um modo geral:

$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$$

6. O Binômio de Newton

Teorema: Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo, então:.

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

Fórmula do Binômio ou Teorema de Newton.

Note que: $a^0 x^n \dots a^1 x^{n-1} \dots a^2 x^{n-2} \dots a^3 x^{n-3} \dots a^n x^0$

Estamos ordenando os termos segundo as potências decrescentes de x . Também poderíamos escrever segundo as potências crescentes de x , a saber:

$$a^n x^0 \dots a^{n-1} x^1 \dots a^{n-2} x^2 \dots a^{n-3} x^3 \dots a^0 x^n$$

Em cada termo do produto $a^y x^z$ a soma das potências y e z é sempre igual a n .

Ou seja:

$$0+n=n ; 1+n-1=n ; 2+n-2=n ; \dots ; n+0=n.$$

"Enquanto o grau de a cresce, o grau de x decresce, ordenando os termos segundo as potências decrescentes de x ".

Os coeficientes dos termos são os números binomiais $\binom{n}{0} \dots \binom{n}{1} \dots \binom{n}{2} \dots \binom{n}{3} \dots \binom{n}{n}$ que estão na linha n do Triângulo de Pascal.

Logo, no desenvolvimento de $(x+a)^n$, tem-se $n+1$ termos, correspondentemente aos $n+1$ números binomiais acima.

Escrevendo os termos do desenvolvimento de $(x+a)^n$ ordenados segundo as potências decrescentes de x , como fizemos inicialmente, o termo de ordem $k+1$ é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot x^{n-k}$$

A fórmula acima é conhecida como a fórmula do Termo Geral do Binômio.

Exemplo:

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0} a^0 x^0 = 1$$

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} a^0 x^1 + \binom{1}{1} a^1 x^0 = x + a$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} a^0 x^2 + \binom{2}{1} a^1 x^1 + \binom{2}{2} a^2 x^0 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} a^0 x^3 + \binom{3}{1} a^1 x^2 + \binom{3}{2} a^2 x^1 + \binom{3}{3} a^3 x^0 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0} a^0 x^4 + \binom{4}{1} a^1 x^3 + \binom{4}{2} a^2 x^2 + \binom{4}{3} a^3 x^1 + \binom{4}{4} a^4 x^0 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = \text{Coeficientes da linha 4 do triangulo de Pascal}$$

$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & 1 & & & & \\ \left(\frac{1}{x}\right)^0 & x^4 & + 4\left(\frac{1}{x}\right)^1 & x^3 & + 6\left(\frac{1}{x}\right)^2 & x^2 & + 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 & x^1 & + 1\left(\frac{1}{x}\right)^4 & x^0 \end{array}$$

| _ vai decrescendo o seu grau
| _ vai crescendo o seu grau

$$\text{Dai: } \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 + 6 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot x^1 + 1 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot 1 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

O termo que não possui a variável x é conhecido como termo independente. Nesse caso, a potência de x é igual a 0.

Poderíamos ter encontrado esse mesmo termo independente utilizando a fórmula do termo geral, a saber:

Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ qual o termo independente de x?

Devemos ter:

$$T_{k+1} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot x^{4-k} = \dots x^0$$

| _ coeficiente procurado

Desenvolvendo o lado esquerdo tem-se:

$$\binom{4}{k} \cdot x^{-k} \cdot x^{4-k} = \binom{4}{k} x^{-k+4-k} = \dots x^0$$

Igualando os expoentes da variável x, tem-se:

$$\begin{aligned} -k + 4 - k &= 0 \quad \therefore \quad -2k + 4 = 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Logo, o termo é o 3º (terceiro), segundo as potências decrescentes de x, a saber:

$$T_{k+1} = T_{2+1} = T_3 = \binom{4}{3} = 6$$

- Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$?

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^k \cdot (x^3)^{9-k} = \dots x^2$$

$$\binom{9}{k} (-1)^k \cdot x^{-2k} \cdot x^{27-3k} = \dots x^2$$

$$\binom{9}{k} (-1)^k \cdot x^{-2k+27-3k} = \dots x^2$$

Daí : $-2k + 27 - 3k = 2 \quad \therefore \quad -5k = 2 - 27 \quad \therefore \quad -5k = -25 \quad \therefore \quad k = 5$

Logo:

$$T_{5+1} = T_6 = \binom{9}{5} (-1)^5 \cdot x^2 = -126x^2$$

O coeficiente pedido é -126.

OBSERVAÇÃO:

Uma prova do Teorema das linhas pode ser dado por:

Na fórmula do Binômio de Newton, quando fizermos $x = a = 1$ tem-se:

$$(x + a)^n = (1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Exemplos:

1) Desenvolver $(2x^2 - y)^5$

linha 5 do Triângulo de Pascal: 1 5 10 10 5 1

$$\begin{aligned} (2x^2 - y)^5 &= 1 \cdot (-y)^0 (2x^2)^5 + 5 \cdot (-y)^1 \cdot (2x^2)^4 + 10 \cdot (-y)^2 \cdot (2x^2)^3 + 10 \cdot (-y)^3 \cdot (2x^2)^2 + 5 \cdot (-y)^4 \cdot (2x^2) + 1 \cdot (-y)^5 \cdot (2x^2)^0 \\ &= 2^5 (x^2)^5 + 5(-y) \cdot 2^4 (x^2)^4 + 10 \cdot y^2 \cdot 2^3 (x^2)^3 + 10 \cdot (-y^3) 2^2 (x^2)^2 + 5 \cdot y^4 \cdot (2) \cdot (x^2)^1 + (-1)^5 \cdot y^5 \cdot 2^0 \cdot (x^2)^0 \\ &= 32x^{10} - 80x^8y + 80x^6y^2 - 40x^4y^3 + 10x^2y^4 - y^5 \end{aligned}$$

$$(x - 2)^2 = 1 \cdot (-2)^0 \cdot x^2 + 2 \cdot (-2)^1 \cdot x^1 + 1 \cdot (-2)^2 \cdot x^0 = x^2 - 4x + 4$$

$$(x - 2)^3 = 1 \cdot (-2)^0 \cdot x^3 + 3 \cdot (-2)^1 \cdot x^2 + 3 \cdot (-2)^2 x + 1 \cdot (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$(x - 2)^4 = 1 \cdot (-2)^0 \cdot x^4 + 4 \cdot (-2)^1 \cdot x^3 + 6 \cdot (-2)^2 \cdot x^2 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot x^1 + 1 \cdot (-2)^4 \cdot x^0 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

$$(x - 2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

Note os sinais: Potência 2 no binômio: + - +

Potência 3 no binômio: + - + -

Potência 4 no binômio: + - + - +

Potência 5 no binômio: + - + - + -

2 - Determine o termo médio do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x^2} + x^2/2\right)^8$

Há 9(nove) termos, pois a potência é 8.

O termo médio é, então, o 5º termo.

Daí:

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4} \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^4 = 70 \cdot \frac{x^8}{2^4} \cdot \frac{2^4}{x^8} = 70.$$

3 - Determine os termos médios do desenvolvimento de $\left(2x^3y - \frac{1}{3}\right)^7$

Há 8 termos. Os médios são o 4º e 5º termos.

$$T_4 = T_{3+1} = \binom{7}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (2x^3y)^4 = 35 \cdot \left(\frac{-1}{27}\right) \cdot 16 \cdot x^{12} \cdot y^4 = \frac{-560}{27} x^{12} y^4$$

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{7}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (2x^3y)^3 = 35 \cdot \left(\frac{1}{81}\right) \cdot 8 \cdot x^9 \cdot y^3 = \frac{280}{81} x^9 y^3$$

Agradeço as críticas e sugestões através dos endereços eletrônicos:

pjorgehmtl@terra.com.br ou ganpjmt@vm.uff.br

Obrigado pela atenção.