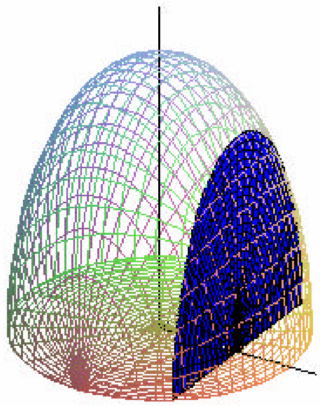
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LABORATÓRIO DE ENSINO DEMATEMÁTICA



OFICINA
CONSTRUÇÃO DE MODELOS DE SÓLIDOS COM SEÇÕES PLANAS PARALELAS DE ÁREA CONHECIDA

Docentes:
Ednalva Vergasta Andrade
Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Maria Christina Fernandes Cardoso
Maria das Graças Passos de Sousa

Artista Plástica:
Fabiana Laranjeira J.de Santana

Outubro de 2004

Índice

- Introdução 2
- Volume de sólido com seções planas paralelas de área conhecida 3
- Roteiro para construção de modelos de sólidos 8
- Construção de modelo de sólido 9

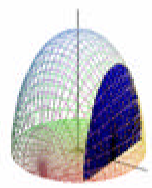
  Base disco e seções triângulos equiláteros 9

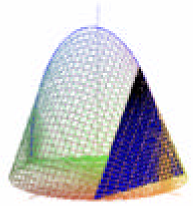
  Base elíptica e seções semi – discos com diâmetro apoiado na base 13

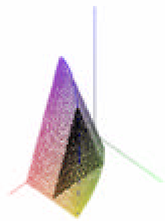
  Seções elipses 17

  Base região limitada por parábola e reta e seções triângulos isósceles 21

  Base disco e seções semi – elipses com eixo menor apoiado na base 25







Introdução

É importante utilizar modelos concretos como recurso didático no estudo de cálculo de volume de sólidos.

Essa oficina propõe construir modelos que facilitam a visualização geométrica de sólidos com seções planas paralelas de área conhecida, bem como o entendimento teórico e prático do cálculo do volume desses sólidos usando integral definida.

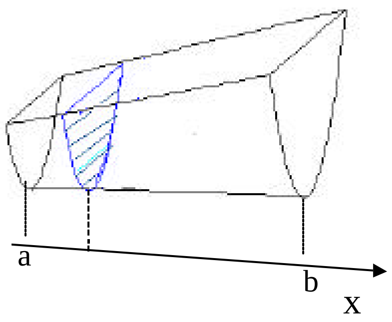
Antes de descrever o processo de construção vamos lembrar um pouco a teoria de integral. Em seguida apresentaremos os traçados das curvas que serão utilizadas para construir os cilindros que representam as seções planas usadas na montagem dos sólidos. Na construção desses cilindros vamos usar isopor com espessura média de 0,5 centímetros. É importante chamar atenção da espessura do material utilizado, pois a mesma interfere no traçado dessas curvas como veremos no decorrer da oficina.

Também são apresentados os comandos do software Maple utilizados no traçado das curvas.

Volume de sólido com seções planas paralelas de área conhecida

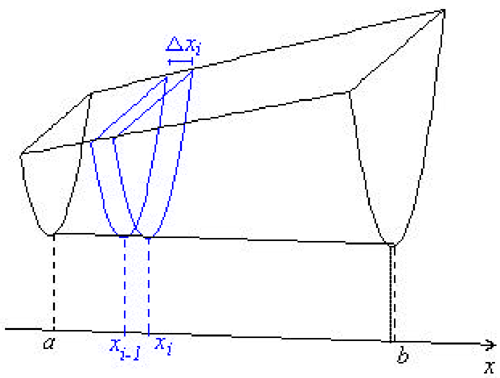
Vejamos como calcular o volume de um sólido S para o qual conhecemos a área de qualquer seção plana perpendicular a uma reta fixa, por exemplo, o eixo OX.

Seção plana perpendicular ao eixo Ox



A área da seção é uma função de x, A(x).

Vamos dividir o intervalo [a, b] em n subintervalos do tipo $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1,2...,n; de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Para cada $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, consideremos o cilindro reto de altura Δx_i unidades e base a seção plana de área $A(c_i)$.
A geratriz do cilindro é paralela ao eixo OX e a diretriz é representada pelo contorno da seção plana do sólido S, obtida na interseção do mesmo com o plano $x = c_i$.
O volume do i-ésimo cilindro é dado por $V_i = A(c_i).\Delta x_i$ unidades cúbicas. Como temos n cilindros retos, a soma dos volumes destes cilindros é dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)? x_i$$

O volume do sólido S pode ser calculado por

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i A(c_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx$$

- Se as seções planas são perpendiculares ao eixo OY, o volume V de S é dado por

$$V = \int_a^b A(y)\,\mathrm{dy}$$

  sendo A(y) uma função que representa a área de cada seção perpendicular ao eixo OY.

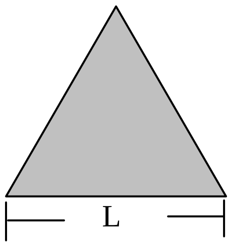
- Se as seções planas são perpendiculares ao eixo OZ, o volume V de S é dado por

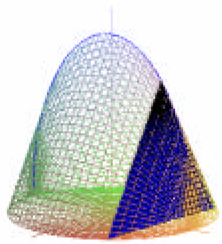
$$V = \int_a^b A(z)\,\mathrm{dz}$$

  sendo A(z) uma função que representa a área de cada seção perpendicular ao eixo OZ.

Exemplos

1) Seja S o sólido de base no disco $B = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 25\}$ cujas seções por planos perpendiculares ao eixo Ox triângulos eqüiláteros.



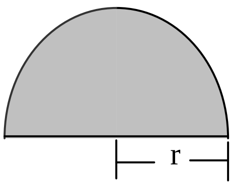


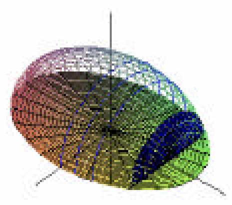
$$L = 2y = 2\sqrt{25 - x^2}$$

$$A(x) = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(25 - x^2)$$

$$V(S) = \int_{-5}^{5} A(x)dx = 2\int_0^5 \sqrt{3}(25 - x^2)dx = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ u.v.}$$

2) Seja S o sólido de base $B = \{(x, y) \in IR^2 / \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \leq 1\}$ e cada seção por plano perpendicular ao eixo OY é um semidisco com diâmetro apoiado em B .





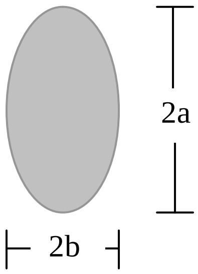
$$r = x = \frac{2}{3}\sqrt{36 - y^2}$$

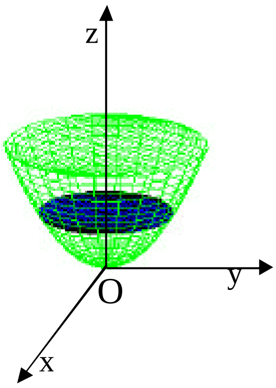
$$A(y) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2\pi}{3}(36 - y^2)$$

$$V(S) = \int_{-6}^{6} A(y)dy = 2\int_0^6 \frac{2\pi}{3}(36 - y^2)dy = 192\,\pi \text{ u.v.}$$

3) Seja S o sólido limitado pelas superfícies $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ e $z = 6.$

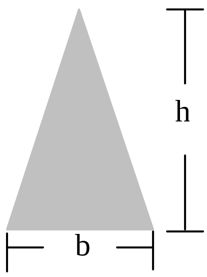
As seções de S são elipses da forma $\frac{x^2}{4z} + \frac{y^2}{9z} = 1$ para $z > 0$.

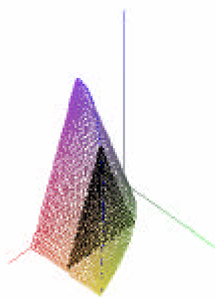




$$a = 3\sqrt{z} \text{ e } b = 2\sqrt{z}, \qquad A(z) = pab = p6z \quad \text{e} \quad V(S) = \int_0^6 6pzdz = 108p \text{ u.v.}$$

4) Seja S o sólido de base $B = \{(x, y) \in IR^2 / 0 \le x \le 8 \text{ e } 0 \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{2x}\ \}$ cujas seções por planos perpendiculares ao eixo OY são triângulos isósceles com base em B e altura medindo 3/2 da base.

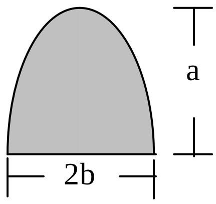


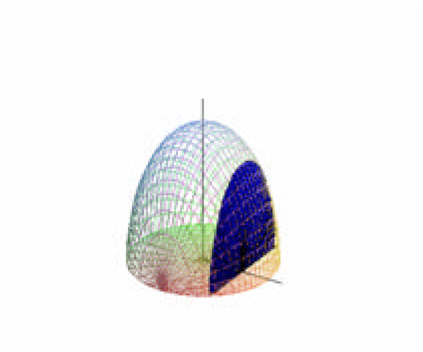


$$b = 8 - \frac{2y^2}{9} = \frac{72 - 2y^2}{9}, \qquad h = \frac{36 - y^2}{3}, \qquad A(y) = \frac{(36 - y^2)^2}{27}$$

$$V(S) = \int_0^6 A(y)dy = \int_0^6 \frac{(36 - y^2)^2}{27} dy = \frac{768}{5} \text{ u.v.}$$

5) Seja S o sólido de base no disco $B = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 25\}$ cujas seções por planos perpendiculares ao eixo Ox são semi - elipses com eixo menor apoiado na base e eixo maior medindo o dobro do menor.





$$b = y = \sqrt{25 - x^2}\,, \qquad a = 2b = 2\sqrt{25 - x^2}\,,\ A(x) = \frac{\pi ab}{2} = \pi(25 - x^2)$$

$$V(S) = \int_{-5}^{5} A(x)dx = 2\pi \int_{0}^{5} (25 - x^2)dx = \frac{500\,\pi}{3} \text{ u.v.}$$

Roteiro para construção de modelos de sólidos

1) Escolha do material das seções

Na construção dos modelos utilizamos placas de isopor com espessura de 0,5 centímetros.

2) Traçado das curvas que limitam as seções planas

Utilizamos o software Maple nesses traçados.

3) Construção dos cilindros

Recortamos em isopor cilindros retos cujas bases são seções planas .

4) Montagem do sólido

Colamos os cilindros recortados obedecendo a ordem das seções.

5) Arte final

O acabamento é feito com tinta acrílica para artesanato.

Material utilizado

1) Isopor com espessura de 0,5 centímetros.
2) Cola de isopor.
3) Cortador de isopor.
4) Pincel.
5) Tinta acrílica para artesanato
6) Papel A4,180g/m^2.

Construção de modelos de sólidos

A seguir apresentamos os comandos do Maple utilizados para os traçados da base e das seções planas, na construção dos modelos correspondentes aos exemplos citados anteriormente.

Em todos os traçados colocamos a unidade de computador coincidindo com um centímetro.

O traçado da circunferência de raio 5 foi obtido pelo comando

plot([5*cos(t),5*sin(t),t=0..2*Pi]);

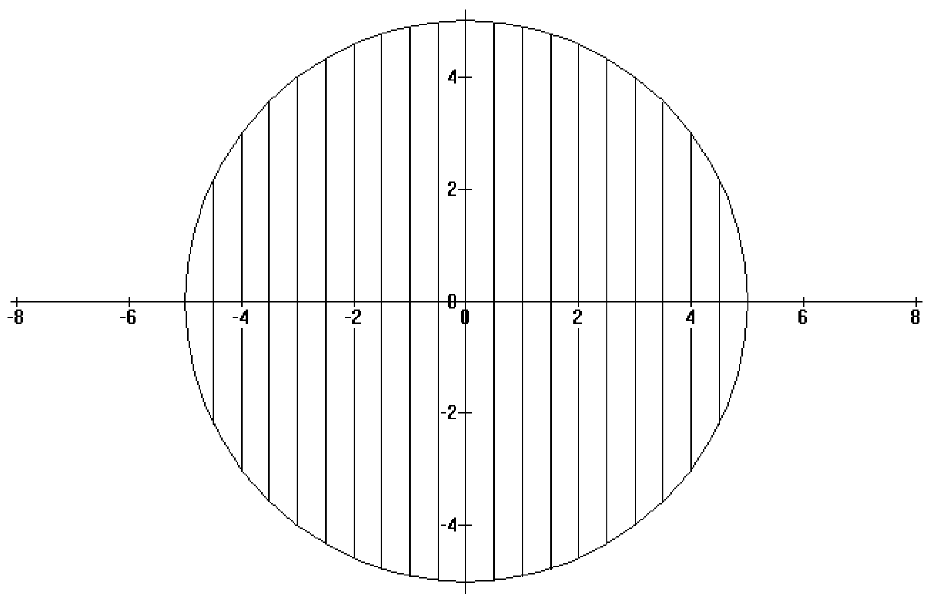
Comandos do Maple para traçado do disco de raio medindo 5 centímetros, que representa a base do sólido do exemplo 1.

Para cada n, n = -4,5;-4;-3,5;..4,5, o traçado do segmento de reta para orientar a colagem dos cilindros retos cortados em material de 0,5cm de espessura foi obtido pelo comando:

plot([n,t,t=-sqrt(25-n^2)..sqrt(25-n^2)]);

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> a:=plot([5*cos(t),5*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> a1:=plot([0.5,t,t=-sqrt(25-(0.5)^2)..sqrt(25-(0.5)^2)],scaling=constrained):
> a2:=plot([1,t,t=-sqrt(25-(1)^2)..sqrt(25-(1)^2)],scaling=constrained):
> a3:=plot([1.5,t,t=-sqrt(25-(1.5)^2)..sqrt(25-(1.5)^2)],scaling=constrained):
> a4:=plot([2,t,t=-sqrt(25-(2)^2)..sqrt(25-(2)^2)],scaling=constrained):
> a5:=plot([2.5,t,t=-sqrt(25-(2.5)^2)..sqrt(25-(2.5)^2)],scaling=constrained):
> a6:=plot([3,t,t=-sqrt(25-(3)^2)..sqrt(25-(3)^2)],scaling=contrained):
> a7:=plot([3.5,t,t=-sqrt(25-(3.5)^2)..sqrt(25-(3.5)^2)],scaling=constrained):
> a8:=plot([4,t,t=-sqrt(25-(4)^2)..sqrt(25-(4)^2)],scaling=constrained):
> a9:=plot([4.5,t,t=-sqrt(25-(4.5)^2)..sqrt(25-(4.5)^2)],scaling=constrained):
> a10:=plot([-0.5,t,t=-sqrt(25-(0.5)^2)..sqrt(25-(0.5)^2)],scaling=constrained):
> a11:=plot([-1,t,t=-sqrt(25-(1)^2)..sqrt(25-(1)^2)],scaling=constrained):
> a12:=plot([-1.5,t,t=-sqrt(25-(1.5)^2)..sqrt(25-(1.5)^2)],scaling=constrained):
> a13:=plot([-2,t,t=-sqrt(25-(2)^2)..sqrt(25-(2)^2)],scaling=constrained):
> a14:=plot([-2.5,t,t=-sqrt(25-(2.5)^2)..sqrt(25-(2.5)^2)],scaling=constrained):
> a15:=plot([-3,t,t=-sqrt(25-(3)^2)..sqrt(25-(3)^2)],scaling=constrained):
> a16:=plot([-3.5,t,t=-sqrt(25-(3.5)^2)..sqrt(25-(3.5)^2)],scaling=constrained):
> a17:=plot([-4,t,t=-sqrt(25-(4)^2)..sqrt(25-(4)^2)],scaling=constrained):
> a18:=plot([-4.5,t,t=-sqrt(25-(4.5)^2)..sqrt(25-(4.5)^2)],scaling=constrained):
> display([uni,a,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14 ,a15,a16,a17,a18]);
```

Base: disco de raio medindo 5 centímetros



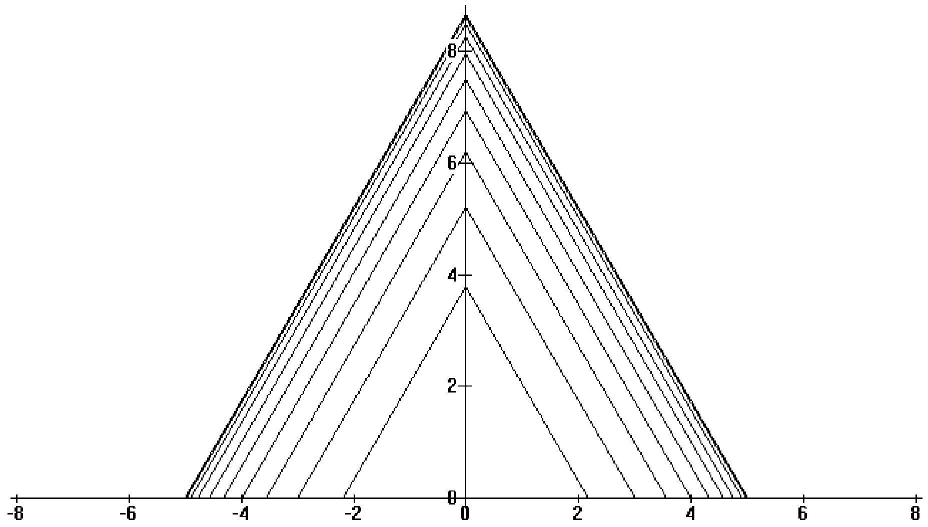
Comandos do Maple para traçado dos triângulos equiláteros que representam as seções planas do modelo do exemplo 1.

O traçado do triângulo correspondente à seção do plano x = n com o sólido foi obtido pelo comando

```
polygonplot([[sqrt(25-n^2),0],[0, sqrt(3*(25-n^2))],[- sqrt(25-n^2),0]]);
```

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> S:=polygonplot([[5,0],[0,5*sqrt(3)],[-5,0]]):
> S1:=polygonplot([[sqrt(25-0.5^2),0],[0,sqrt(3*(25-0.5^2))],[- sqrt(25-0.5^2),0]]):
> S2:=polygonplot([[sqrt(25-1^2),0],[0,sqrt(3*(25-1^2))],[-sqrt(25-1^2),0]]):
> S3:=polygonplot([[sqrt(25-1.5^2),0],[0,sqrt(3*(25-1.5^2))],[-sqrt(25-1.5^2),0]]):
> S4:=polygonplot([[sqrt(25-2^2),0],[0,sqrt(3*(25-2^2))],[-sqrt(25-2^2),0]]):
> S5:=polygonplot([[sqrt(25-2.5^2),0],[0,sqrt(3*(25-2.5^2))],[-sqrt(25-2.5^2),0]]):
> S6:=polygonplot([[sqrt(25-3^2),0],[0,sqrt(3*(25-3^2))],[-sqrt(25-3^2),0]]):
> S7:=polygonplot([[sqrt(25-3.5^2),0],[0,sqrt(3*(25-3.5^2))],[- sqrt(25-3.5^2),0]]):
> S8:=polygonplot([[sqrt(25-4^2),0],[0,sqrt(3*(25-4^2))],[-sqrt(25-4^2),0]]):
> S9:=polygonplot([[sqrt(25-4.5^2),0],[0,sqrt(3*(25-4.5^2))],[- sqrt(25-4.5^2),0]]):
> display([uni,S,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9]);
```

Traçado dos triângulos equiláteros que representam as seções planas paralelas do sólido do exemplo1.



Comandos do Maple para traçado da elipse de semi - eixos medindo 4 e 6 centímetros, que representa a base do exemplo 2.

O traçado da elipse de semi – eixos medindo 4 e 6 centímetros foi obtido pelo comando

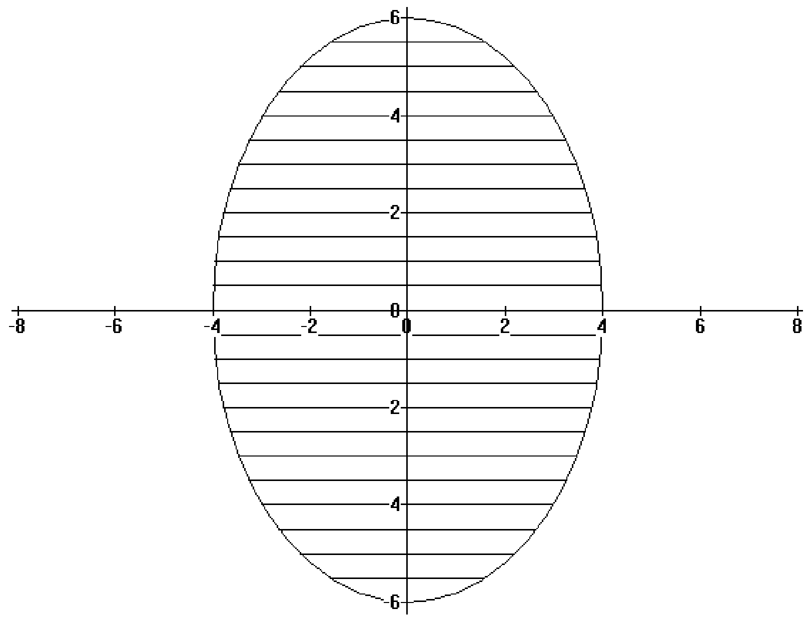
plot([4*cos(t),6*sin(t),t=0..2*Pi]);

Para cada n, n = -5,5;-4;-3,5;-3;...5,5, o traçado do segmento de reta para orientar a colagem dos cilindros retos cortados em material de 0,5cm de espessura foi obtido pelo comando:

plot([t,n,t= -(2/3)*sqrt(36-n^2)..(2/3)*sqrt(36-n^2)]);

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> a:=plot([4*cos(t),6*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> b1:=plot([t,0.5,t=-(2/3)*sqrt(36-0.5^2)..(2/3)*sqrt(36-0.5^2)],scaling=constrained):
> b2:=plot([t,1,t=-(2/3)*sqrt(36-1^2)..(2/3)*sqrt(36-1^2)],scaling=constrained):
> b3:=plot([t,1.5,t=-(2/3)*sqrt(36-1.5^2)..(2/3)*sqrt(36-1.5^2)],scaling=constrained):
> b4:=plot([t,2,t=-(2/3)*sqrt(36-2^2)..(2/3)*sqrt(36-2^2)],scaling=constrained):
> b5:=plot([t,2.5,t=-(2/3)*sqrt(36-2.5^2)..(2/3)*sqrt(36-2.5^2) ],scaling=constrained):
> b6:=plot([t,3,t=-(2/3)*sqrt(36-3^2)..(2/3)*sqrt(36-3^2)],scaling=constrained):
> b7:=plot([t,3.5,t=-(2/3)*sqrt(36-3.5^2)..(2/3)*sqrt(36-3.5^2)],scaling=constrained):
> b8:=plot([t,4,t=-(2/3)*sqrt(36-4^2)..(2/3)*sqrt(36-4^2)],scaling=constrained):
> b9:=plot([t,4.5,t=-(2/3)*sqrt(36-4.5^2)..(2/3)*sqrt(36-4.5^2)],scaling=constrained):
> b10:=plot([t,-0.5,t=-(2/3)*sqrt(36-0.5^2)..(2/3)*sqrt(36-0.5^2)],scaling=constrained):
> b11:=plot([t,-1,t=-(2/3)*sqrt(36-1^2)..(2/3)*sqrt(36-1^2)],scaling=constrained):
> b12:=plot([t,-1.5,t=-(2/3)*sqrt(36-1.5^2)..(2/3)*sqrt(36-1.5^2)],scaling=constrained):
> b13:=plot([t,-2,t=-(2/3)*sqrt(36-2^2)..(2/3)*sqrt(36-2^2)],scaling=constrained):
> b14:=plot([t,-2.5,t=-(2/3)*sqrt(36-2.5^2)..(2/3)*sqrt(36-2.5^2)],scaling=constrained):
> b15:=plot([t,-3,t=-(2/3)*sqrt(36-3^2)..(2/3)*sqrt(36-3^2)],scaling=constrained):
> b16:=plot([t,-3.5,t=-(2/3)*sqrt(36-3.5^2)..(2/3)*sqrt(36-3.5^ 2)],scaling=constrained):
> b17:=plot([t,-4,t=-(2/3)*sqrt(36-4^2)..(2/3)*sqrt(36-4^2)],scaling=constrained):
> b18:=plot([t,-4.5,t=-(2/3)*sqrt(36-4.5^2)..(2/3)*sqrt(36-4.5^2)],scaling=constrained):
> b19:=plot([t,-5,t=-(2/3)*sqrt(36-5^2)..(2/3)*sqrt(36-5^2)],scaling=constrained):
> b20:=plot([t,-5.5,t=-(2/3)*sqrt(36-5.5^2)..(2/3)*sqrt(36-5.5^ 2)],scaling=constrained):
> b21:=plot([t,5,t=-(2/3)*sqrt(36-5^2)..(2/3)*sqrt(36-5^2)],scaling=constrained):
> b22:=plot([t,5.5,t=-(2/3)*sqrt(36-5.5^2)..(2/3)*sqrt(36-5.5^2)],scaling=constrained):
>display([uni,a,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,b13,b14,b15,b16,b17,b18,b19,b20
,b21,b22]);
```

Base: Elipse de semi – eixos medindo 4 e 6 centímetros.



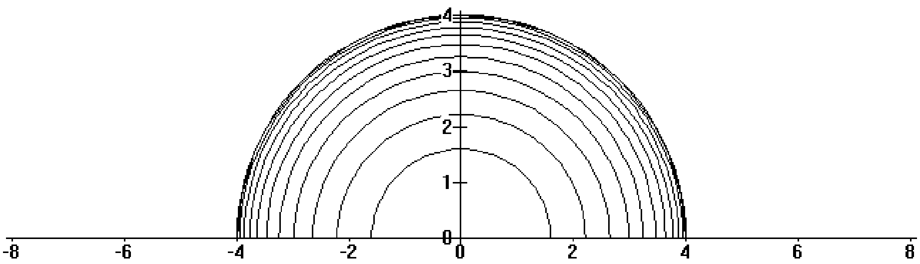
Comandos do Maple para traçado dos semi-discos que representam as seções planas paralelas do sólido do exemplo 2.

O traçado do semi - disco correspondente à seção do plano y = n com o sólido foi obtido pelo comando

```
plot([(2/3)*sqrt(36-n^2)*cos(t), (2/3)*sqrt(36-n^2)*sin(t),t=0..Pi]);
```

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> S:=plot([4*cos(t),4*sin(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
>S1:=plot([(2/3)*sqrt(36-0.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-
0.5^2)*sin(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
>S2:=plot([(2/3)*sqrt(36-1^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-
1^2)*sin(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S3:=plot([(2/3)*sqrt(36-1.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-1.5^2)*si
> n(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S4:=plot([(2/3)*sqrt(36-2^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-2^2)*sin(t)
> ,t=0..Pi],scaling=constrained):
> S5:=plot([(2/3)*sqrt(36-2.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-2.5^2)*si
> n(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S6:=plot([(2/3)*sqrt(36-3^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-3^2)*sin(t)
> ,t=0..Pi],scaling=constrained):
> S7:=plot([(2/3)*sqrt(36-3.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-3.5^2)*si
> n(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S8:=plot([(2/3)*sqrt(36-4^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-4^2)*sin(t)
> ,t=0..Pi],scaling=constrained):
> S9:=plot([(2/3)*sqrt(36-4.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-4.5^2)*si
> n(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S10:=plot([(2/3)*sqrt(36-5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-5^2)*sin(t
> ),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S11:=plot([(2/3)*sqrt(36-5.5^2)*cos(t),(2/3)*sqrt(36-5.5^2)*s
> in(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
>display([uni,S,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10,S11]);
```

Traçado dos semi - discos que representam as seções planas paralelas do sólido do exemplo 2.

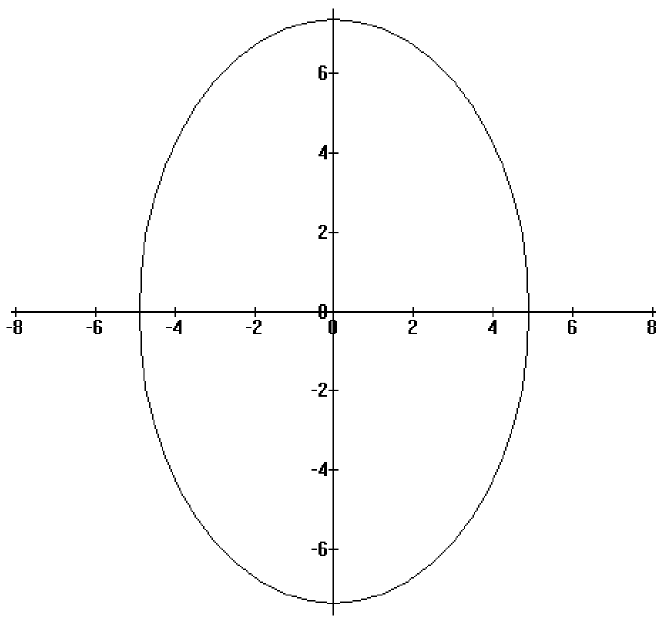


Comandos do Maple para traçado da elipse que representam a base do sólido limitado pelo paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ e pelo plano z=6.

O traçado da elipse de semi – eixos medindo 2 e 3 centímetros foi obtido pelo comando

```
plot([2*sqrt(6)*sin(t),3*sqrt(6)*cos(t),t=0..2*Pi]);
```

Elipse que representa a base do sólido do exemplo 3.



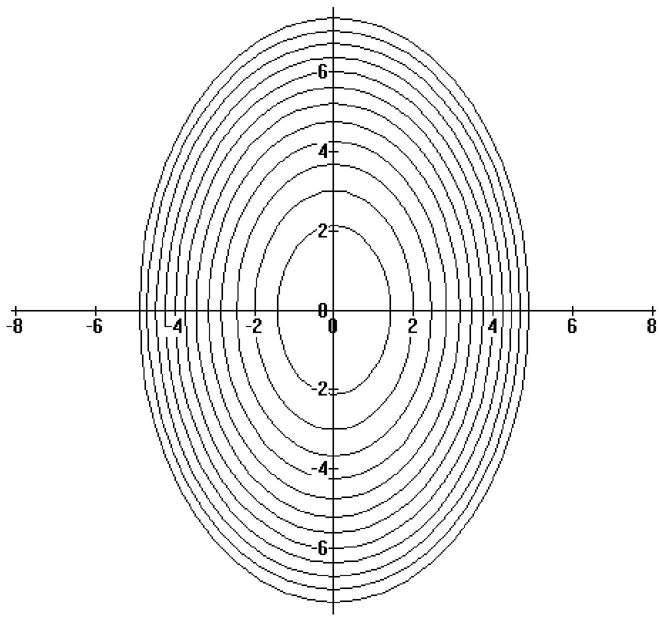
Comandos do Maple para traçado das elipses que representam as seções do sólido limitado pelo paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ **e pelo plano z=6.**

O traçado da elipse correspondente à seção do plano z = n com o sólido foi obtido pelo comando

plot([2*sqrt(n)*sin(t), 3*sqrt(n)*cos(t),t=0..2*Pi]);

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> S:=plot([2*sqrt(0.5)*sin(t),3*sqrt(0.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S1:=plot([2*sqrt(1)*sin(t),3*sqrt(1)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S2:=plot([2*sqrt(1.5)*sin(t),3*sqrt(1.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S3:=plot([2*sqrt(2)*sin(t),3*sqrt(2)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S4:=plot([2*sqrt(2.5)*sin(t),3*sqrt(2.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S5:=plot([2*sqrt(3)*sin(t),3*sqrt(3)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S6:=plot([2*sqrt(3.5)*sin(t),3*sqrt(3.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S7:=plot([2*sqrt(4)*sin(t),3*sqrt(4)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
>S8:=plot([2*sqrt(4.5)*sin(t),3*sqrt(4.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S9:=plot([2*sqrt(5)*sin(t),3*sqrt(5)*cos(t),t=0..2*Pi],scalin g=constrained):
> S10:=plot([2*sqrt(5.5)*sin(t),3*sqrt(5.5)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> S11:=plot([2*sqrt(6)*sin(t),3*sqrt(6)*cos(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
>display([uni,S,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10,S11]);
```

Traçado das elipses que representam as seções planas paralelas do sólido do exemplo 3.



Comandos do Maple para traçado da base do sólido do exemplo 4.

O traçado da base do exemplo 4 foi obtido pelos comandos

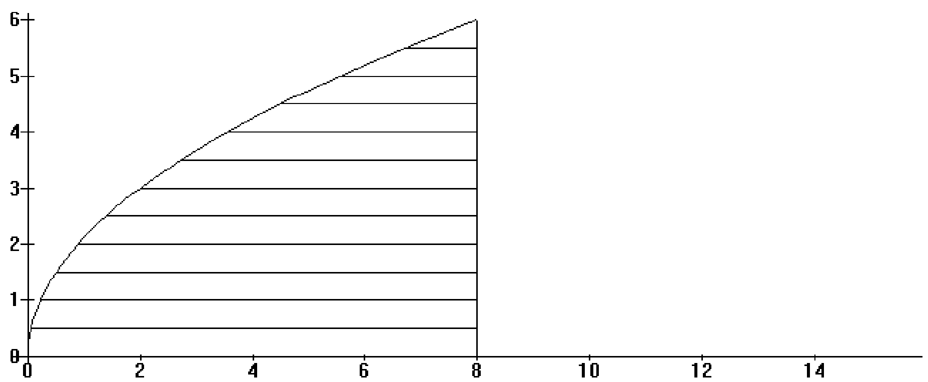
```
c:=plot([8,t,t=0..6],scaling=constrained):
c1:=plot([2*t^2/9,t,t=0..6],scaling=constrained):
display([c,c1]);
```

Para cada n, n = 0,5;1;1,5....5,5 o traçado do segmento de reta para orientar a colagem dos cilindros retos cortados em material de 0,5cm de espessura foi obtido pelo comando

```
plot ([t,n,t =(2*n^2)/9..8]);
```

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..15.6],scaling=constrained):
> c:=plot([8,t,t=0..6],scaling=constrained):
> c1:=plot([2*t^2/9,t,t=0..6],scaling=constrained):
> L:=plot([t,0.5,t=2*0.5^2/9..8],scaling=constrained):
> L1:=plot([t,1,t=2*1^2/9..8],scaling=constrained):
> L2:=plot([t,1.5,t=2*1.5^2/9..8],scaling=constrained):
> L3:=plot([t,2,t=2*2^2/9..8],scaling=constrained):
> L4:=plot([t,2.5,t=2*2.5^2/9..8],scaling=constrained):
> L5:=plot([t,3,t=2*3^2/9..8],scaling=constrained):
> L6:=plot([t,3.5,t=2*3.5^2/9..8],scaling=constrained):
> L7:=plot([t,4,t=2*4^2/9..8],scaling=constrained):
> L8:=plot([t,4.5,t=2*4.5^2/9..8],scaling=constrained):
> L9:=plot([t,5,t=2*5^2/9..8],scaling=constrained):
> L10:=plot([t,5.5,t=2*5.5^2/9..8],scaling=constrained):
> display([uni,c,c1,L,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10]);
```

Base do sólido do exemplo 4.



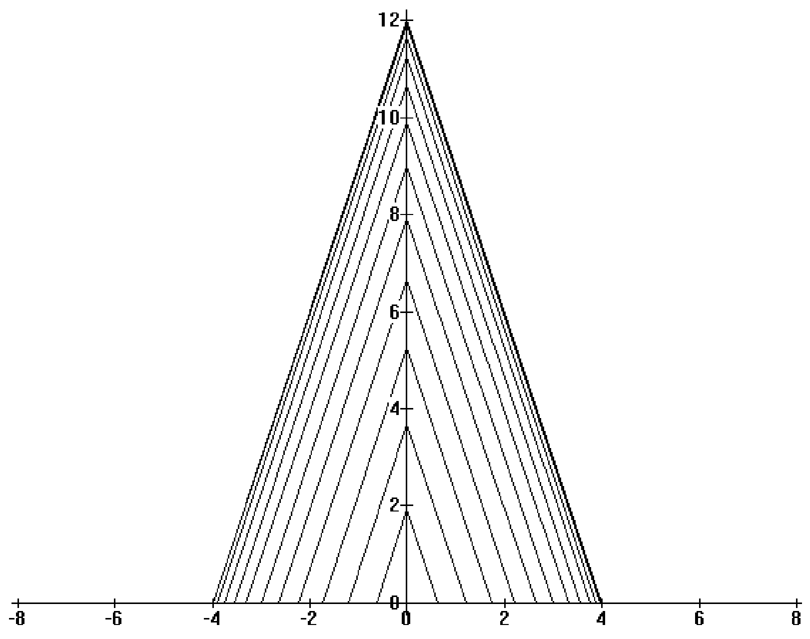
Comandos do Maple para traçado das seções planas do sólido do exemplo 4

O traçado do triângulo correspondente à seção do plano y = n com o sólido foi obtido pelo comando

```
polygonplot([[-(36-n^2)/9,0],[0,(36-n^2)/3],[(36-n^2)/9,0]]);
```

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> S:=polygonplot([[4,0],[0,12],[-4,0]]):
> S1:=polygonplot([[-(36-0.5^2)/9,0],[0,(36-0.5^2)/3],[(36-0.5^ 2)/9,0]]):
> S2:=polygonplot([[-(36-1^2)/9,0],[0,(36-1^2)/3],[(36-1^2)/9,0 ]]):
> S3:=polygonplot([[-(36-1.5^2)/9,0],[0,(36-1.5^2)/3],[(36-1.5^ 2)/9,0]]):
> S4:=polygonplo t([[-(36-2^2)/9,0],[0,(36-2^2)/3],[(36-2^2)/9,0]]):
> S5:=polygonplot([[-(36-2.5^2)/9,0],[0,(36-2.5^2)/3],[(36-2.5^2)/9,0]]):
> S6:=polygonplot([[-(36-3^2)/9,0],[0,(36-3^2)/3],[(36-3^2)/9,0]]):
> S7:=polygonplot([[-(36-3.5^2)/9,0],[0,(36-3.5^2)/3],[(36-3.5^ 2)/9,0]]):
> S8:=polygonplot([[-(36-4^2)/9,0],[0,(36-4^2)/3],[(36-4^2)/9,0 ]]):
> S9:=polygonplot([[-(36-4.5^2)/9,0],[0,(36-4.5^2)/3],[(36-4.5^ 2)/9,0]]):
> S10:=polygonplot([[-(36-5^2)/9,0],[0,(36-5^2)/3],[(36-5^2)/9,0]]):
> S11:=polygonplot([[-(36-5.5^2)/9,0],[0,(36-5.5^2)/3],[(36-5.5 ^2)/9,0]]):
>display([uni,S,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10,S11]);
```

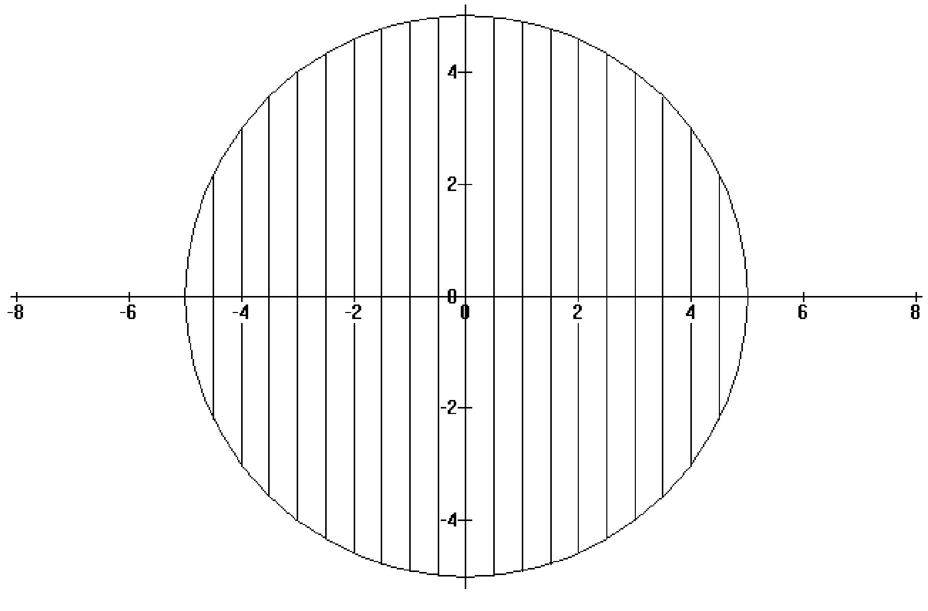
Triângulos que representam as seções planas do sólido do exemplo 4.



Comandos do Maple para traçado do disco de raio medindo 5 centímetros, que representa a base do exemplo 5.

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> a:=plot([5*cos(t),5*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained):
> a1:=plot([0.5,t,t=-sqrt(25-(0.5)^2)..sqrt(25-(0.5)^2)],scaling=constrained):
> a2:=plot([1,t,t=-sqrt(25-(1)^2)..sqrt(25-(1)^2)],scaling=constrained):
> a3:=plot([1.5,t,t=-sqrt(25-(1.5)^2)..sqrt(25-(1.5)^2)],scaling=constrained):
> a4:=plot([2,t,t=-sqrt(25-(2)^2)..sqrt(25-(2)^2)],scaling=constrained):
> a5:=plot([2.5,t,t=-sqrt(25-(2.5)^2)..sqrt(25-(2.5)^2)],scaling=constrained):
> a6:=plot([3,t,t=-sqrt(25-(3)^2)..sqrt(25-(3)^2)],scaling=constrained):
> a7:=plot([3.5,t,t=-sqrt(25-(3.5)^2)..sqrt(25-(3.5)^2)],scaling=constrained):
> a8:=plot([4,t,t=-sqrt(25-(4)^2)..sqrt(25-(4)^2)],scaling=constrained):
> a9:=plot([4.5,t,t=-sqrt(25-(4.5)^2)..sqrt(25-(4.5)^2)],scaling=constrained):
> a10:=plot([-0.5,t,t=-sqrt(25-(0.5)^2)..sqrt(25-(0.5)^2)],scaling=constrained):
> a11:=plot([-1,t,t=-sqrt(25-(1)^2)..sqrt(25-(1)^2)],scaling=constrained):
> a12:=plot([-1.5,t,t=-sqrt(25-(1.5)^2)..sqrt(25-(1.5)^2)],scaling=constrained):
> a13:=plot([-2,t,t=-sqrt(25-(2)^2)..sqrt(25-(2)^2)],scaling=constrained):
> a14:=plot([-2.5,t,t=-sqrt(25-(2.5)^2)..sqrt(25-(2.5)^2)],scaling=constrained):
> a15:=plot([-3,t,t=-sqrt(25-(3)^2)..sqrt(25-(3)^2)],scaling=constrained):
> a16:=plot([-3.5,t,t=-sqrt(25-(3.5)^2)..sqrt(25-(3.5)^2)],scaling=constrained):
> a17:=plot([-4,t,t=-sqrt(25-(4)^2)..sqrt(25-(4)^2)],scaling=constrained):
> a18:=plot([-4.5,t,t=-sqrt(25-(4.5)^2)..sqrt(25-(4.5)^2)],scaling=constrained):
> display([uni,a,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14 ,a15,a16,a17,a18]);
```

Base: disco de raio medindo 5 centímetros



Comandos do Maple para traçado das semi-elipses que representam as seções planas do sólido do exemplo 5.

O traçado da semi - elipse correspondente à seção do plano x = n com o sólido foi obtido pelo comando

```
plot([sqrt(25-n^2)*cos(t), 2*sqrt(25-n^2)*sin(t),t=0..Pi]);
```

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-7.8..7.8],scaling=constrained):
> S:=plot([5*cos(t),10*sin(t),t=0..Pi],scaling=constrained):
> S1:=plot([sqrt(25-(0.5)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(0.5)^2)*sin(t),t =0..Pi],scaling=constrained):
> S2:=plot([sqrt(25-(1)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(1)^2)*sin(t),t=0.. Pi],scaling=constrained):
> S3:=plot([sqrt(25-(1.5)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(1.5)^2)*sin(t),t =0..Pi],scaling=constrained):
> S4:=plot([sqrt(25-(2)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(2)^2)*sin(t),t=0.. Pi],scaling=constrained):
> S5:=plot([sqrt(25-(2.5)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(2.5)^2)*sin(t),t =0..Pi],scaling=constrained):
> S6:=plot([sqrt(25-(3)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(3)^2)*sin(t),t=0.. Pi],scaling=constrained):
> S7:=plot([sqrt(25-(3.5)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(3.5)^2)*sin(t),t =0..Pi],scaling=constrained):
> S8:=plot([sqrt(25-(4)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(4)^2)*sin(t),t=0.. Pi],scaling=constrained):
> S9:=plot([sqrt(25-(4.5)^2)*cos(t),2*sqrt(25-(4.5)^2)*sin(t),t =0..Pi],scaling=constrained):
>display([uni,S,S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9]);
```

Traçado das semi - elispes que representam as seções planas do sólido do exemplo 5.