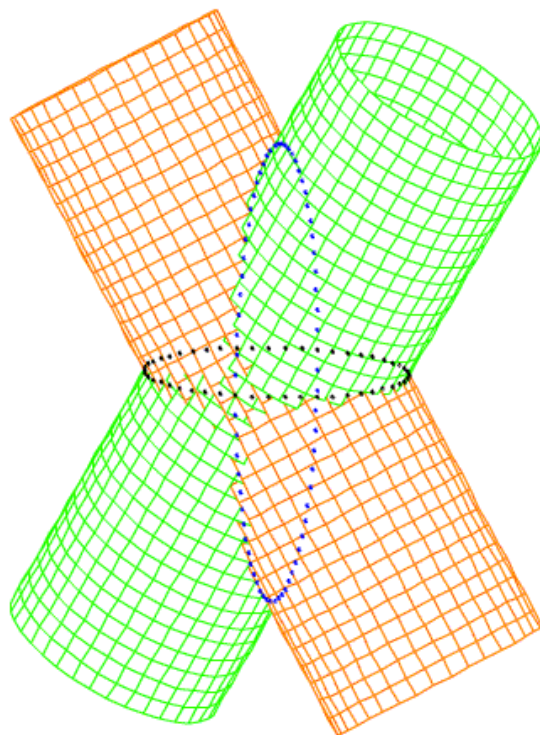




II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Oficina: Isometrias do plano e construção de modelos concretos com superfícies cilíndricas circulares e parabólicas



Elinalva Vergasta de Vasconcelos
Graça Luzia Dominguez Santos
Verlane Andrade Cabral

INDICE

Introdução	3
Isometrias com o plano.....	4
Modelo com cilindros circulares.....	5
Modelo com cilindros parabólicos	11
Comandos do Maple.....	29
Apêndice	36



II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

25 a 29 de outubro de 2004

OFICINA: Isometrias do plano e construção de modelos concretos com superfícies cilíndricas circulares e parabólicas.

INTRODUÇÃO

Uma superfície cilíndrica S é localmente isométrica ao plano. Isso permite construir um modelo concreto que represente parte de S , modelando, sem distorcer, um material considerado plano como papel, cartolina, acetato ou outro material similar.

Baseando-se na curva diretriz e considerando que S é gerada por retas paralelas, o modelo fica fácil de ser construído. Entretanto, se utilizarmos duas ou mais superfícies que se intersectam, aparecem algumas dificuldades na construção.

Apresentaremos um método de construção de alguns modelos concretos que envolvem mais de uma superfície cilíndrica, utilizando as isometrias com o plano. Serão vistos exemplos com superfícies cilíndricas circulares e parabólicas. Os modelos construídos têm utilização nas aulas de cálculo que envolvem integrais múltiplas e volumes de sólidos por seções paralelas.

No apêndice, serão dados algumas definições e resultados básicos para compreensão do texto. Maiores detalhes teóricos podem ser encontrados em [1] ou [2].

Neste texto, quando nos referirmos a superfície tanto pode significar superfície parametrizada quanto o seu traço no espaço tridimensional.

ISOMETRIAS COM O PLANO

Para que duas superfícies parametrizadas X e \bar{X} sejam isométricas, devemos ter X e \bar{X} definidas em um aberto U do \mathbb{R}^2 , injetivas, de modo que os coeficientes da primeira forma quadrática de X e \bar{X} coincidam.

Consideremos uma parametrização de parte do plano, $\bar{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{X}(u,v) = (u,v,0)$. Em cada ponto $(u,v) \in U$, os coeficientes da primeira forma quadrática de \bar{X} são $\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = 1$, $\bar{F} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = 0$ e $\bar{G} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = 1$.

Seja uma curva $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$ injetiva, parametrizada pelo comprimento de arco. A aplicação $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $X(u,v) = (x(u), y(u), v)$ é uma parametrização da superfície cilíndrica S que tem α como diretriz e geratriz paralela ao eixo Oz . Desse modo, X e \bar{X} são isométricas.

De fato,

$$X_u = (x'(u), y'(u), 0) \text{ e } X_v = (0, 0, 1) \Rightarrow E = (x'(u))^2 + (y'(u))^2 = 1, F = 0 \text{ e } G = 1.$$

Se a curva diretriz não for parametrizada pelo comprimento de arco, devemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco. Dessa forma, obtemos parametrizações X e \bar{X} que são isométricas.

Uma vez que os modelos concretos serão obtidos de material físico, consideraremos as parametrizações definidas em um conjunto fechado V , sendo V contido em U .

A seguir faremos uma descrição detalhada de cada um dos modelos concretos que construiremos apresentando as parametrizações das superfícies cilíndricas e parametrizações no plano das curvas de interseção.

MODELOS COM CILINDROS CIRCULARES

Modelo1: Cilindros circulares de raio 1, eixos formando um ângulo de 90^0 (figura 1)

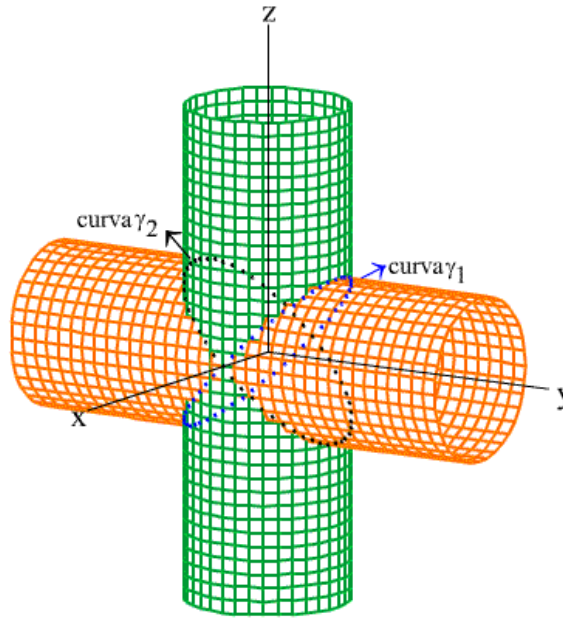


figura 1

Consideremos os cilindros $S_1: x^2 + y^2 = 1$ e $S_2: x^2 + z^2 = 1$

Parametrizações das superfícies cilíndricas:

- A circunferência $C_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ é uma diretriz de S_1 e $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$ é uma

parametrização de C_1 parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, obtemos a parametrização

$X: U \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ de S_1 que é isométrica ao plano \bar{X} .

- A circunferência $C_2: \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ é uma diretriz de S_2 e $\alpha(u) = (\cos(u), 0, \sin(u))$ é uma

parametrização de C_2 parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, obtemos a parametrização

$Y: U \rightarrow \mathbb{R}^3, Y(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos(\bar{u}), \bar{v}, \sin(\bar{u}))$, $U \subset \mathbb{R}^2$ de S_2 que é isométrica ao plano \bar{X} .

Como já havíamos mencionado definiremos as parametrizações no conjunto fechado $V \subset U$. Neste

caso, escolhemos $V = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \times [-3, 3]$

Curvas de Interseção

$$X(u,v) = Y(\bar{u}, \bar{v}) \Rightarrow (\cos(u), \sin(u), v) = (\cos(\bar{u}), \bar{v}, \sin(\bar{u})) \Rightarrow$$

$$\cos(u) = \cos(\bar{u}) \Rightarrow u = \bar{u} + 2k\pi \text{ ou } u = -\bar{u} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow u = \bar{u} \text{ ou } u = -\bar{u}$$

e

$$v = \sin(\bar{u}) \Rightarrow v = \sin(u) \text{ ou } v = -\sin(u)$$

Logo, as parametrizações das curvas de interseção *no plano* são:

$$a: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, a(u) = (u, \sin(u)) \text{ e } b: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, b(u) = (u, -\sin(u))$$

No espaço, temos

$$\gamma_1(u) = Xoa(u) = X(u, \sin(u)) = (\cos(u), \sin(u), \sin(u))$$

$$\gamma_2(u) = Xob(u) = X(u, -\sin(u)) = (\cos(u), \sin(u), -\sin(u))$$

As curvas γ_1 e γ_2 estão esboçadas na figura 1.

Para construir os cilindros planificados, sendo $V = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times [-3, 3]$, temos,

$$c(u) = (u, 3), d(u) = (u, -3), u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$e(v) = (-\pi/2, v), f(v) = (3\pi/2, v), v \in [-3, 3]$$

Na figura 2, esboçamos no plano as curvas **a, b, c, d, e e f**.

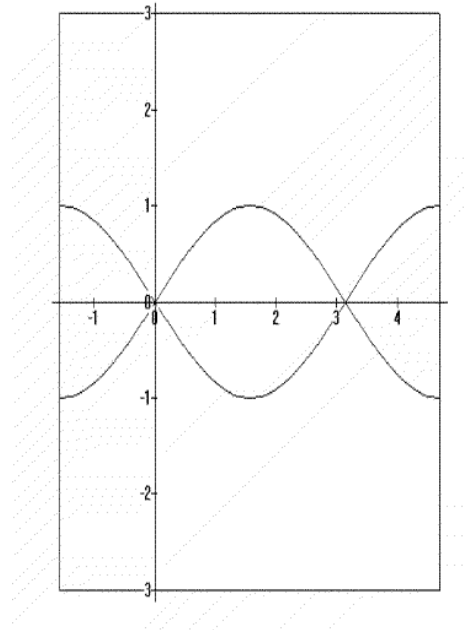


figura 2

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Um dos problemas clássicos da aplicação de integral dupla é o cálculo do volume do sólido limitado pelos cilindros $S_1: x^2 + y^2 = 1$ e $S_2: x^2 + z^2 = 1$. Com a construção do modelo fica visível o sólido e também que as seções paralelas perpendiculares ao eixo Ox são quadrados. Assim, o volume do sólido limitado pelos cilindros S_1 e S_2 pode ser encontrado:

utilizando integral dupla da função $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$, com domínio de integração $V = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$$\text{Vol} = 2 \iint_V \sqrt{1-x^2} \, dA = 2 \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \, dy \right) dx = \frac{16}{3} \text{ u.v}$$

ou

considerando as seções paralelas e as áreas das seções $A(x) = (2\sqrt{1-x^2})(2\sqrt{1-x^2}) = 4(1-x^2)$

$$\text{Vol} = \int_{-1}^1 A(x) dx = \int_{-1}^1 4(1-x^2) dx = \frac{16}{3} \text{ u.v}$$

Modelo 2: Cilindros circulares de raio 1, eixos formando um ângulo de 60^0 (figura 3)

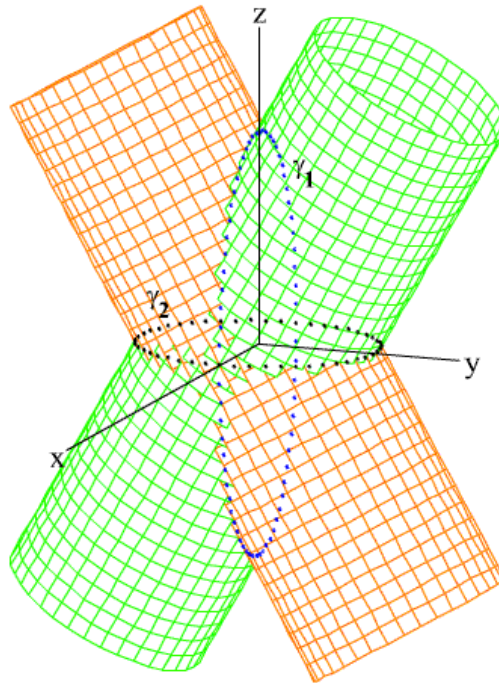


figura 3

Parametrizações das superfícies cilíndricas

Como o ângulo entre os cilindros é de 60^0 , vamos girar em torno do eixo Ox o cilindro S: $x^2 + y^2 = 1$, de $\alpha = 30^0$ e $\alpha = -30^0$.

Considere a parametrização $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, do cilindro S e a rotação $\text{Rota}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\text{Rota} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(\text{Rota}) \circ X(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \cos(\alpha)\sin(u) - v\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(u) + v\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Assim obtemos $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $Z: U \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$Y(u,v) = (\cos(u), \cos(\alpha) \sin(u) - v \sin(\alpha), \sin(\alpha) \sin(u) + v \cos(\alpha)),$$

$$Z(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos(\bar{u}), \cos(\alpha) \sin(\bar{u}) + \bar{v} \sin(\alpha), -\sin(\alpha) \sin(\bar{u}) + \bar{v} \cos(\alpha)),$$

que são parametrizações de superfícies obtidas de S com rotações de α e $-\alpha$.

Como Rota_α é uma rotação, Y e o plano \bar{X} são isométricas e Z e o plano \bar{X} são isométricas.

Curvas de Interseção

$$Y(u,v) = Z(\bar{u}, \bar{v}) \Rightarrow u = -\bar{u} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}, u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Daí,

$$u = -\bar{u} \Rightarrow v = \cotg(\alpha) \sin(u) \quad \text{e}$$

$$u = \bar{u} \Rightarrow v = -\text{tg}(\alpha) \sin(u)$$

Para $\alpha = 30^\circ$, as parametrizações das curvas de interseção *no plano* são:

$$a(u) = (u, \sqrt{3} \sin(u)) \quad \text{e} \quad b(u) = (u, -\sqrt{3}/3 \sin(u)); \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

No espaço, temos

$$\gamma_1(u) = Y \circ a(u) = Y(u, \sqrt{3} \sin(u)) = (\cos(u), 0, 2 \sin(u))$$

$$\gamma_2(u) = Y \circ b(u) = Y(u, -(\sqrt{3}/3) \sin(u)) = (\cos(u), (2\sqrt{3}/3) \sin(u), 0)$$

As curvas γ_1 e γ_2 estão esboçadas na figura 2.

Para construção do modelo, vamos construir os cilindros planificados.

Por questão de praticidade na apresentação do modelo, ou seja, para que o modelo fique apoiado no plano vamos intersectar os cilindros com os planos $z = -3$ e $z = 3$. Logo,

$$\sin(\alpha) \sin(u) + v \cos(\alpha) = 3 \Rightarrow v = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(u)$$

$$\sin(\alpha) \sin(u) + v \cos(\alpha) = -3 \Rightarrow v = -2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(u)$$

Assim,

$$c(u) = (u, 2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(u))$$

$$d(u) = (u, -2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(u)); \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Os valores máximos das ordenadas de c(u) e d(u) para $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ são:

$$c_{\max} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(3\pi/2) \quad \text{e} \quad d_{\max} = -2\sqrt{3} - \sqrt{3}/3 \sin(3\pi/2)$$

Daí,

$e(v) = (-\pi/2, v)$ e $f(v) = (3\pi/2, v)$; $v \in [d_{\max}, c_{\max}]$

Na figura 4, esboçamos no plano as curvas **a, b, c, d, e** e **f**.

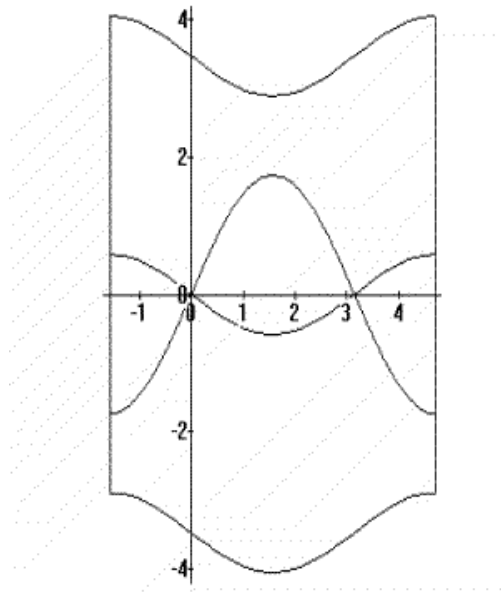


figura 4

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Utilizando o modelo fica fácil observar que as seções paralelas perpendiculares ao eixo Ox do sólido de interseção determinado pelos cilindros são losangos. Seccionando este sólido pelo plano xOy, obtemos duas partes do sólido cujas seções paralelas são triângulos equiláteros, com base na elipse de equação $x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$. As áreas dessas seções planas são dadas por:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(4 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1-x^2} \right)^2 = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} (1-x^2)$$

Daí,

$$\text{Vol} = 2 \int_{-1}^1 A(x) dx = 2 \int_{-1}^1 4 \frac{\sqrt{3}}{3} (1-x^2) dx = 32 \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ u.v}$$

MODELOS COM CILINDROS PARABÓLICOS

Modelo 3: Modelo representando os sólidos situados no primeiro octante e limitados por $x = 0$,

$$x = 20, y = 0, z = 16 - \frac{y^2}{9}, x = \frac{5}{3}y \text{ e } z = 0. \text{ (figura 5)}$$

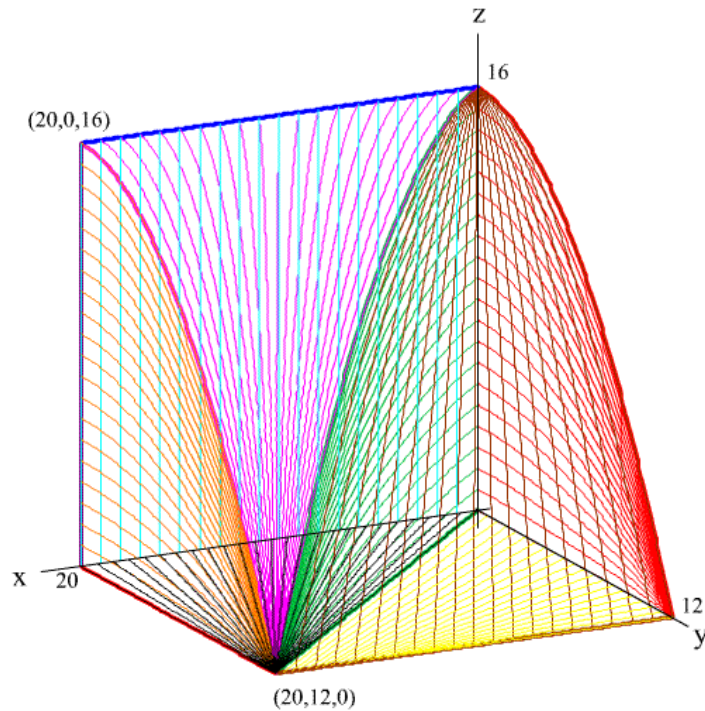


figura 5

Parametrizações das superfícies cilíndricas:

- *Parametrização do plano $x = \frac{5}{3}y$*

A curva diretriz, $\gamma : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (5t/3, t, 0)$ do plano $x = \frac{5}{3}y$, não está parametrizada pelo comprimento de arco.

Parametrizando a curva diretriz pelo comprimento de arco, obtemos:

$$\alpha : [0, 4\sqrt{34}] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \alpha(u) = (5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), 0) , \text{ sendo}$$

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 25/9} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 25/9} dy = 4\sqrt{34} .$$

Assim, $X(u,v) = (5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), v)$ e X e $\bar{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (definida na introdução) são isométricas.

- *Parametrização do cilindro* $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

A curva diretriz $\gamma_1 : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \gamma_1(t) = (0, t, 16 - t^2/9)$, do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$, não está parametrizada pelo comprimento de arco. Parametrizando a curva diretriz pelo comprimento de arco, obtemos:

$\alpha_1 : [0, u_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \alpha_1(u) = (0, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$, sendo

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \quad \text{e} \quad u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy.$$

Assim, $Y(u, v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$ e Y e o plano \bar{X} são isométricas.

Vamos primeiro construir a parte I) do modelo.

Parte I) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x = 0$, $z = 16 - \frac{y^2}{9}$,

$x = \frac{5}{3}y$ e $z = 0$. (Figura 6)

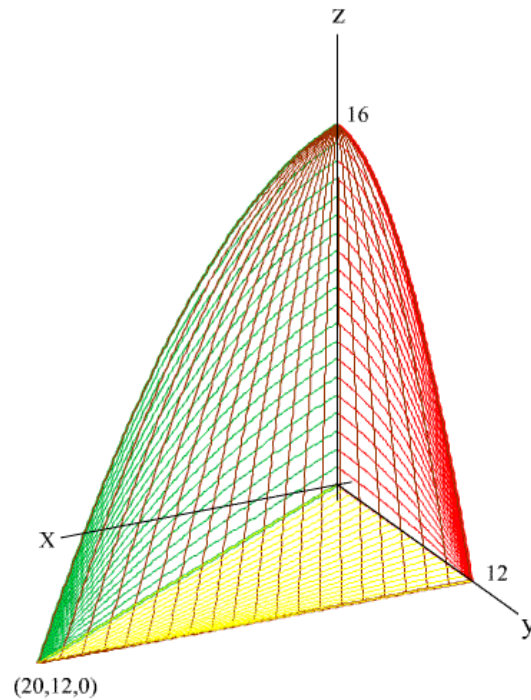


figura 6

1) Parte do plano $x = 0$.

$$x = 0 \text{ e } z = 16 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = (t, 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$$

Na figura 7, esboçamos no plano a curva **a**.

2) Parte do plano $z = 0$.

$$z = 0 \text{ e } x = \frac{5}{3}y \Rightarrow \mathbf{b}(t) = (5t/3, t); t \in [0, 12]$$

$$z = 0 \text{ e } z = 16 - y^2/9 \Rightarrow z = 0 \text{ e } y = 12 \Rightarrow \mathbf{c}(t) = (t, 12); t \in [0, 20]$$

Na figura 8, esboçamos no plano as curvas **b** e **c**.

3) Parte do plano $x = \frac{5}{3}y$

A curva $C: \begin{cases} x = 5t/3 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12]$ é a interseção do plano $x = \frac{5}{3}y$ e do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$. Uma

parametrização do plano $x = \frac{5}{3}y$ é $X(u, v) = (5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), v)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 25/9} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 25/9} dy = 4\sqrt{34}$$

Planificando C sobre o plano $x = 5y/3$ temos:

$$(5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), v) = (5t/3, t, 16 - t^2/9).$$

Assim, $v(t) = 16 - t^2/9$ e $d_1(t) = (u(t), v(t))$.

Trocando as coordenadas de $d_1(t)$ a fim de manter a mesma unidade na impressão, temos:

$$\mathbf{d}(t) = (16 - t^2/9, u(t)); t \in [0, 12]$$

Na figura 9, esboçamos no plano a curva **d**.

4) Parte do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

A curva $C: \begin{cases} x = 5t/3 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12]$ é a interseção do plano $x = \frac{5}{3}y$ e do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$.

Uma parametrização do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$ é $Y(u, v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2/9)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1+4y^2} / 81 dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1+4y^2} / 81 dy.$$

Planificando C sobre o cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$ temos,

$$(v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9) = (5t/3, t, 16 - t^2 / 9).$$

Assim $v(t) = 5t/3$ e $e(t) = (u(t), 5t/3); t \in [0, 12]$.

Para completar a planificação desta parte temos também $f(t) = (u_{\max}, t); t \in [0, 20]$.

Na figura 10, esboçamos no plano as curvas e e f.

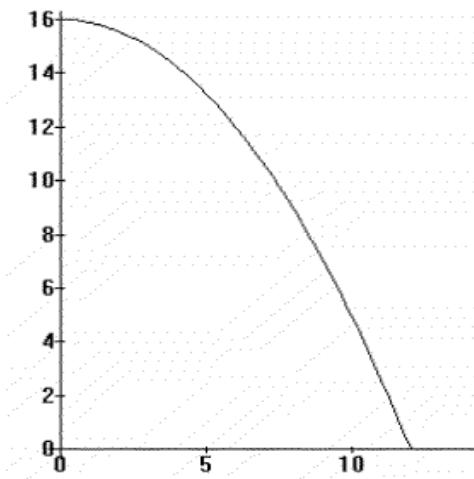


figura7

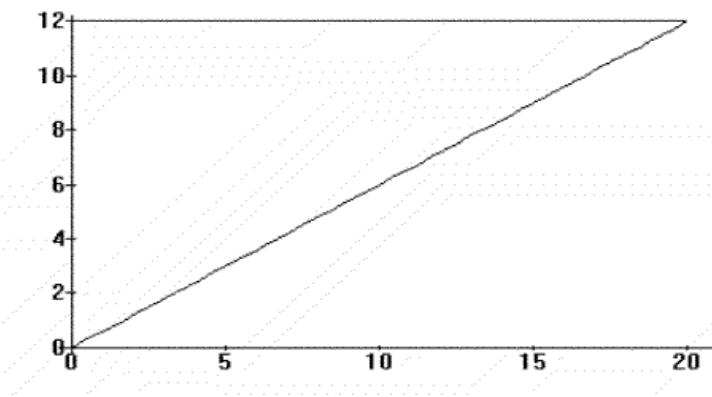


figura 8

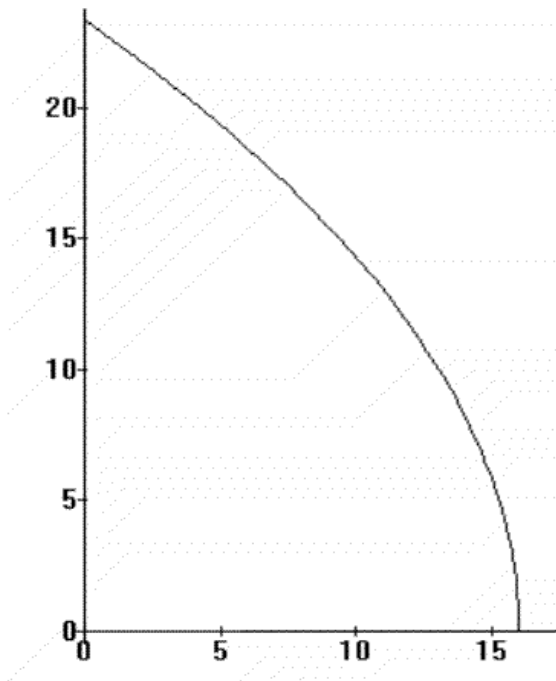


figura 9

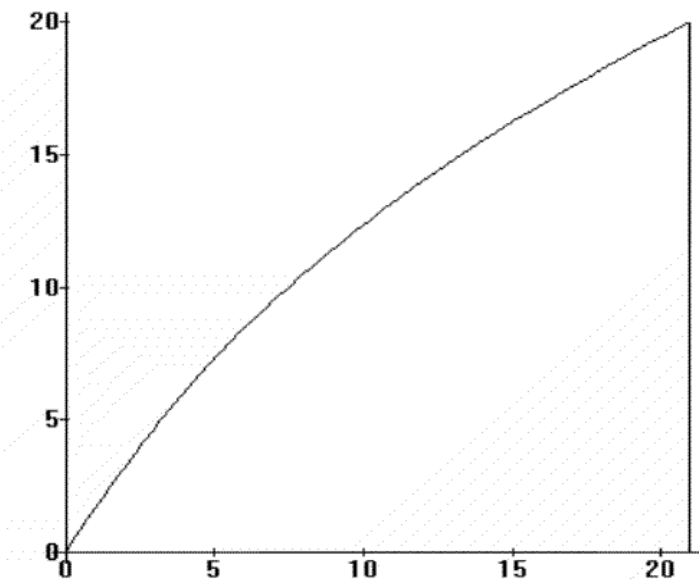


figura 10

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Utilizando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região triangular

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{5y}{3}, 0 \leq y \leq 12\}$$

obtemos

$$\text{Vol } 1 = \iint_{V_1} (16 - \frac{y^2}{9}) dA = \int_0^{12} \int_0^{5y/3} (16 - y^2/9) dx dy = 960 \text{ u.v}$$

Vamos construir, agora, a parte II) do modelo.

Parte II) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x = 20$, $y = 0$,

$z = 16 - \frac{y^2}{9}$, $x = \frac{5}{3}y$ e $z = 0$. (Figura 11)

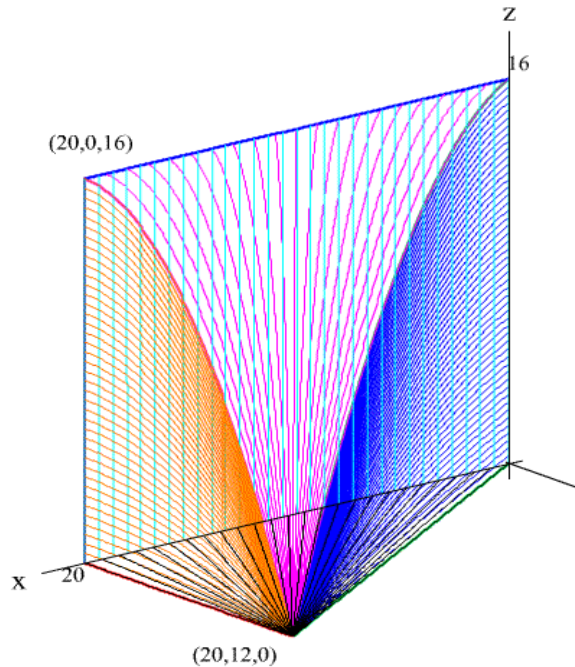


figura 11

1) Parte do plano $x = 20$.

$$x = 20 \text{ e } z = 16 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow g(t) = (20, 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$$

Na figura 12, esboçamos no plano a curva **g**.

2) Parte do plano $z = 0$.

$$z = 0 \text{ e } x = \frac{5}{3}y \Rightarrow h(t) = (5t/3, t); t \in [0, 12]$$

$$z = 0 \text{ e } x = 20 \Rightarrow i(t) = (20, t); t \in [0, 12]$$

Na figura 13, esboçamos no plano as curvas **h** e **i**.

Observe que a curva **h** coincide com a curva **b** obtida no item 3) parte I).

3) Parte do plano $x = \frac{5}{3}y$

$$\text{A curva } C : \begin{cases} x = 5t/3 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção do plano } x = \frac{5}{3}y \text{ e do cilindro } z = 16 - \frac{y^2}{9}.$$

Uma parametrização do plano $x = \frac{5}{3}y$ é $X(u, v) = (5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), v)$, sendo

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 25/9} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 25/9} dy = 4\sqrt{34}.$$

Planificando C sobre o plano $x = 5y/3$ temos:

$$(5s^{-1}(u)/3, s^{-1}(u), v) = (5t/3, t, 16 - t^2/9)$$

Assim, $v(t) = 16 - t^2/9$ e $j_1(t) = (u(t), v(t))$.

Trocando as coordenadas de $j_1(t)$ a fim de manter a mesma unidade na impressão, temos:

$$j(t) = (16 - t^2/9, u(t)); t \in [0, 12]$$

Na figura 14, esboçamos no plano a curva **j**.

Observe que a curva **j** coincide com a curva **d** obtida no item 3) parte I).

4) Parte do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

$$\text{A curva } C : \begin{cases} x = 5t/3 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção do plano } x = \frac{5}{3}y \text{ e do cilindro } z = 16 - \frac{y^2}{9}.$$

Uma parametrização do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$ é $Y(u,v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$, sendo

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2 / 81} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2 / 81} dy$$

Planificando C sobre o cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$ temos,

$$(v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9) = (5t/3, t, 16 - t^2 / 9).$$

Assim, $v(t) = 5t/3$ e $l(t) = (u(t), 5t/3)$; $t \in [0, 12]$

Observe que a curva **l** coincide com curva e obtida no item 4) parte I).

Para completar a planificação desta parte temos também $m(t) = (t, 20)$; $t \in [0, u_{\max}]$

Na figura 15, esboçamos no plano as curvas **l** e **m**.

5) Parte do plano $y = 0$

$$y = 0 \text{ e } x = 20 \Rightarrow n(t) = (20, t); t \in [0, 16]$$

$$y = 0 \text{ e } z = 16 \Rightarrow o(t) = (t, 16); t \in [0, 20]$$

Na figura 16, esboçamos no plano as curvas **n** e **o**.

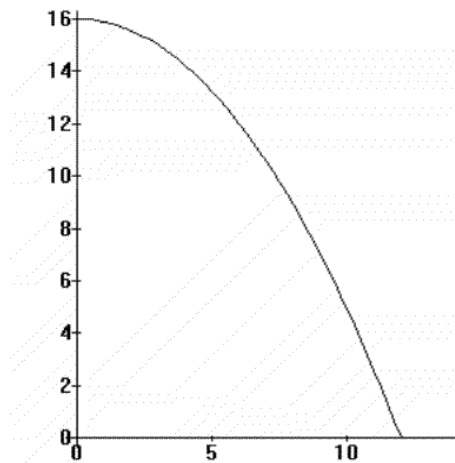


figura 12

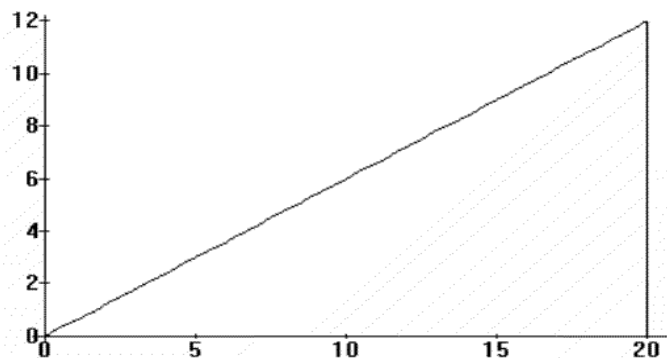


figura 13

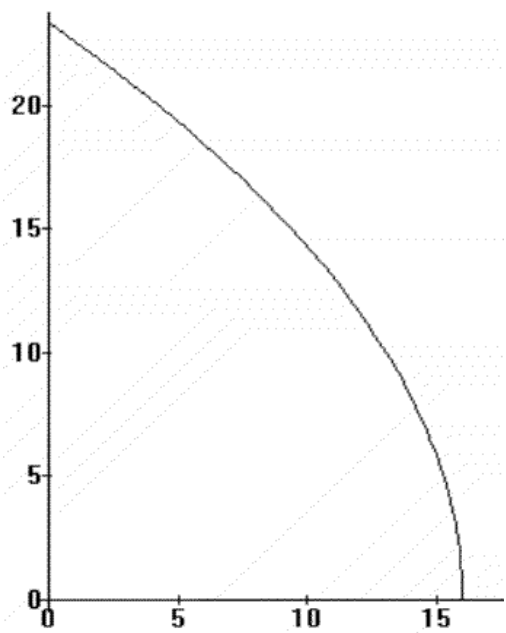


figura 14

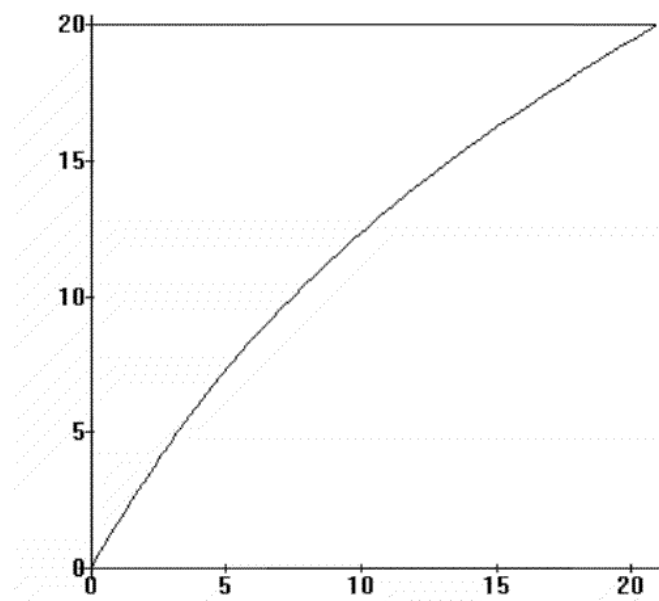


figura 15

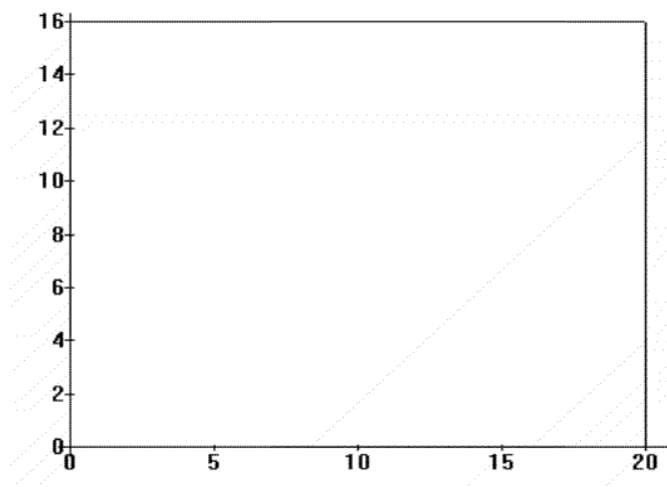


figura 16

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Utilizando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região triangular

$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{5y}{3} \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 12\}$$

obtemos

$$\text{Vol } 2 = \iint_{V_2} (16 - \frac{y^2}{9}) dA = \int_0^{12} \int_{5y/3}^{20} (16 - y^2/9) dx dy = 1600 \text{ u.v}$$

O volume total do sólido pode ser obtido pela soma dos volumes dos sólidos parte I e parte II ou usando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região retangular

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 12\}$$

assim,

$$\text{Volume total} = \text{Vol } 1 + \text{Vol } 2 = \int_0^{12} \int_0^{20} (16 - y^2/9) dx dy = 2560 \text{ u.v}$$

Modelo 4: Modelo representando os sólido situados no primeiro octante e limitados por $x = 0$,

$$x = 20, y = 0, z = 16 - \frac{y^2}{9}, x = \frac{y^2}{9} \text{ e } z = 0. \text{ (Figura 17)}$$

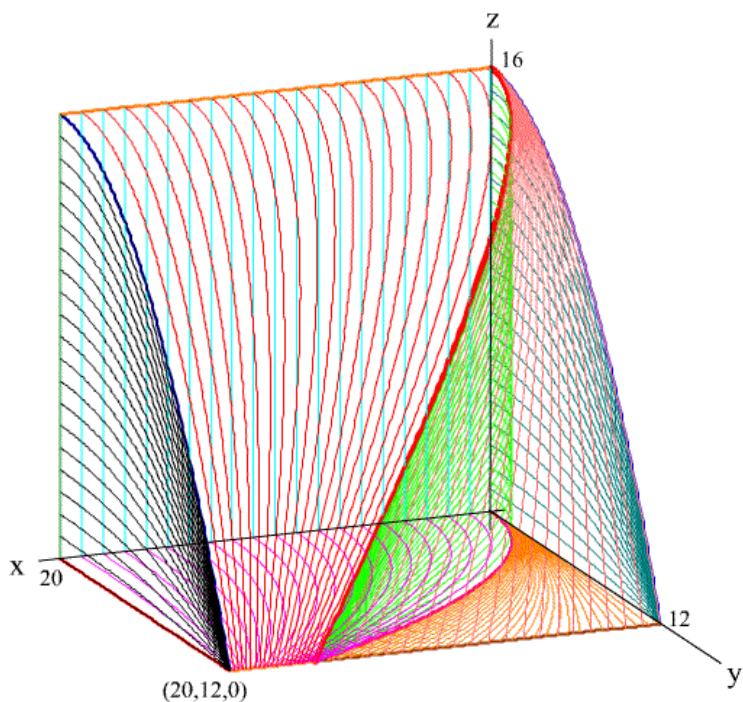


figura 17

Parametrizações das superfícies cilíndricas:

- *Parametrização do cilindro* $x = \frac{y^2}{9}$

A curva diretriz , $\gamma : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (t^2/9, t, 0)$ do cilindro $x = \frac{y^2}{9}$, não está parametrizada pelo comprimento de arco. Parametrizando a curva diretriz pelo comprimento de arco, obtemos:

$$\alpha : [0, u_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \alpha(u) = ((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), 0), \text{ sendo}$$

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy$$

Assim, $X(u,v) = ((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), v)$ e X e o plano \bar{X} são isométricas.

- *Parametrização do cilindro* $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

A curva diretriz $\gamma_1 : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \gamma_1(t) = (0, t, 16 - t^2/9)$ não está parametrizada pelo comprimento de arco. Parametrizando a curva diretriz pelo comprimento de arco, obtemos:

$\alpha_1 : [0, u_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \alpha_1(u) = (0, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$, sendo

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \quad \text{e} \quad u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy$$

Assim, $Y(u, v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$ e Y e o plano \bar{X} são isométricas.

Vamos construir a parte I) do modelo.

Parte I) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x = 0$, $z = 16 - \frac{y^2}{9}$,

$x = y^2/9$ e $z = 0$. (Figura 18)

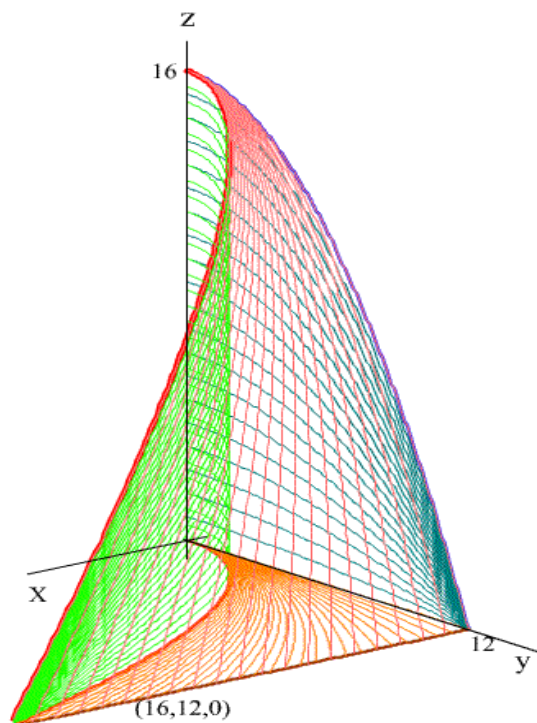


figura 18

1) Parte do plano $x = 0$.

$$x = 0 \text{ e } z = 16 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow a(t) = (t, 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$$

Na figura 19, esboçamos no plano a curva **a**

2) Parte do plano $z = 0$.

$$z = 0 \text{ e } x = \frac{y^2}{9} \Rightarrow b(t) = (t^2/9, t); t \in [0, 12]$$

$$z = 0 \text{ e } y = 12 \Rightarrow c(t) = (t, 12); t \in [0, 12]$$

Na figura 20, esboçamos no plano as curvas **b** e **c**.

3) Parte do cilindro $x = \frac{y^2}{9}$

$$\text{A curva } C: \begin{cases} x = t^2/9 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção dos cilindros } x = y^2/9 \text{ e } z = 16 - y^2/9.$$

Uma parametrização do cilindro $x = \frac{y^2}{9}$ é $X(u, v) = ((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), v)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy.$$

Planificando C sobre o cilindro $x = \frac{y^2}{9}$ temos:

$$((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), v) = (t^2/9, t, 16 - t^2/9)$$

Assim, $v(t) = 16 - t^2/9$ e $d(t) = (u(t), 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$.

Na figura 21, esboçamos no plano a curva **d**.

4) Parte do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

$$\text{A curva } C: \begin{cases} x = t^2/9 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção dos cilindros } x = y^2/9 \text{ e } z = 16 - y^2/9.$$

Uma parametrização do cilindro $z = 16 - y^2/9$ é $Y(u, v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2/9)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \quad \text{e} \quad u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy$$

Planificando C sobre o cilindro $16 - y^2/9$, temos

$$(v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2/9) = (t^2/9, t, 16 - t^2/9).$$

Assim, $v(t) = t^2/9$ e $e(t) = (u(t), t^2/9)$; $t \in [0, 12]$.

Para completar a planificação desta parte temos também $f(t) = (u_{\max}, t)$; $t \in [0, 16]$.

Na figura 22, esboçamos no plano as curvas e e f.

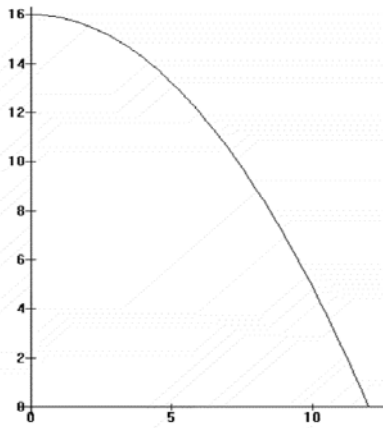


figura 19

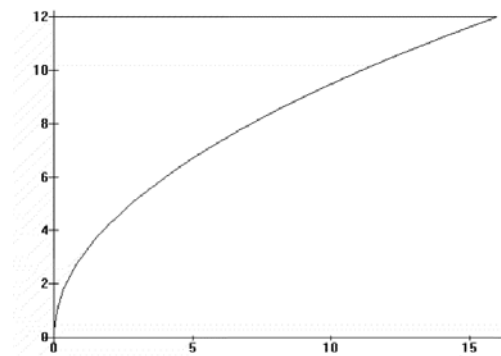


figura 20

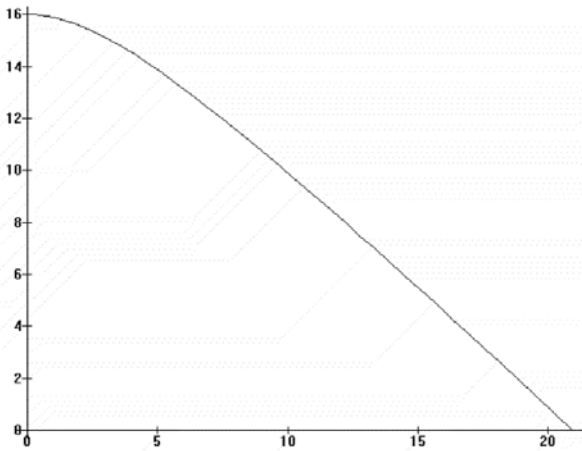


figura 21

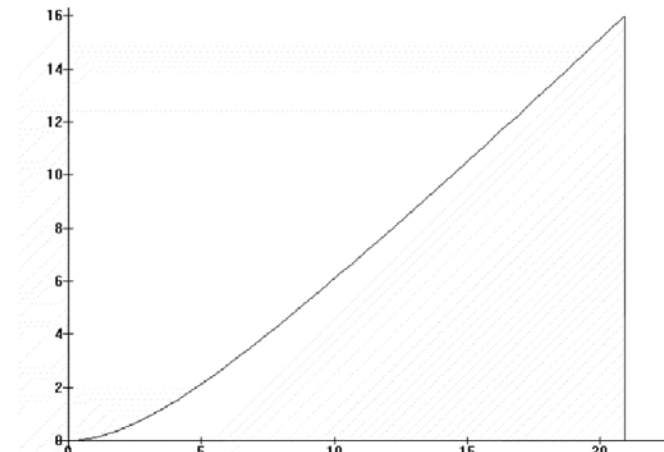


figura 22

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Utilizando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{y^2}{9}, 0 \leq y \leq 12\}$$

obtemos

$$\text{Vol } 1 = \iint_{V_1} \left(16 - \frac{y^2}{9}\right) dA = \int_0^{12} \int_0^{y^2/9} \left(16 - \frac{y^2}{9}\right) dx dy = 409,6 \text{ u.v}$$

Vamos construir, agora, a parte II) do modelo.

Parte II) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x = 20$, $y = 0$,

$z = 16 - \frac{y^2}{9}$, $x = \frac{y^2}{9}$ e $z = 0$. (figura 23)

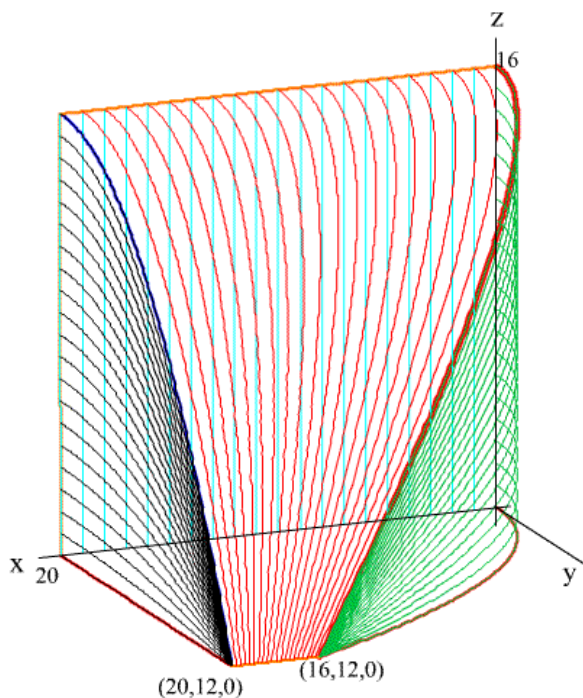


figura 23

1) Parte do plano $x = 20$.

$$x = 20 \text{ e } z = 16 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow g(t) = (t, 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$$

Na figura 24, esboçamos no plano a curva **g**.

2) Parte do plano $z = 0$.

$$z = 0 \text{ e } x = \frac{y^2}{9} \Rightarrow h(t) = (t^2/9, t); t \in [0, 12]$$

$$z = 0 \text{ e } y = 12 \Rightarrow i(t) = (t, 12); t \in [16, 20]$$

$$z = 0 \text{ e } x = 20 \Rightarrow j(t) = (20, t); t \in [0, 12]$$

Na figura 25, esboçamos no plano as curvas **h**, **i** e **j**.

Observe que a curva **h** coincide com a curva **b** obtida no item 4) parte I).

3) Parte do cilindro $x = \frac{y^2}{9}$

$$\text{A curva } C: \begin{cases} x = t^2/9 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção dos cilindros } x = y^2/9 \text{ e } z = 16 - y^2/9.$$

Uma parametrização do cilindro $x = \frac{y^2}{9}$ é $X(u, v) = ((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), v)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2/81} dy \text{ e } u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2/81} dy$$

Planificando **C** sobre o cilindro $x = \frac{y^2}{9}$ temos:

$$((s^{-1}(u))^2/9, s^{-1}(u), v) = (t^2/9, t, 16 - t^2/9)$$

Assim, $v(t) = 16 - t^2/9$ e $l(t) = (u(t), 16 - t^2/9); t \in [0, 12]$.

Observe que a curva **l** coincide com a curva **d** obtida no item 3) parte I).

Na figura 26, esboçamos no plano a curva **l**.

4) Parte do cilindro $z = 16 - \frac{y^2}{9}$

$$\text{A curva } C: \begin{cases} x = t^2/9 \\ y = t \\ z = 16 - t^2/9 \end{cases}; t \in [0, 12] \text{ é a interseção dos cilindros } x = y^2/9 \text{ e } z = 16 - y^2/9.$$

Uma parametrização do cilindro $16 - y^2/9$ é $Y(u,v) = (v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9)$, onde

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4y^2 / 81} dy \quad \text{e} \quad u_{\max} = \int_0^{12} \sqrt{1 + 4y^2 / 81} dy$$

Planificando C sobre o cilindro $16 - y^2/9$, temos

$$(v, s^{-1}(u), 16 - (s^{-1}(u))^2 / 9) = (t^2 / 9, t, 16 - t^2 / 9).$$

Assim, $v(t) = t^2 / 9$ e $m(t) = (u(t), t^2 / 9)$; $t \in [0, 12]$.

Observe que a curva m coincide com a curva e obtida no item 3) parte I).

Para completar a planificação desta parte, temos também $n(t) = (t, 20)$; $t \in [0, u_{\max}]$ e

$$o(t) = (u_{\max}, t); \quad t \in [16, 20]$$

Na figura 27, esboçamos no plano as curvas n e o .

5))Parte do plano $y = 0$

$$y = 0 \text{ e } x = 20 \Rightarrow p(t) = (20, t); \quad t \in [0, 16]$$

$$y = 0 \text{ e } z = 16 \Rightarrow q(t) = (t, 16); \quad t \in [0, 20]$$

Na figura 28, esboçamos no plano as curvas p e q .

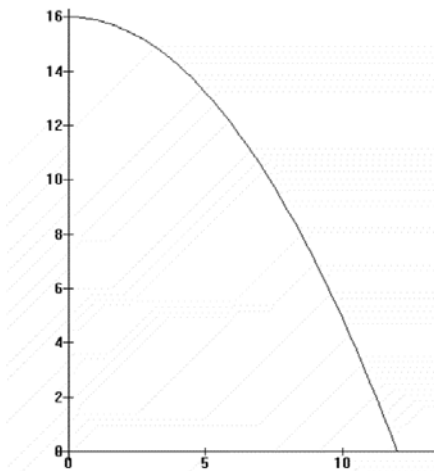


figura 24

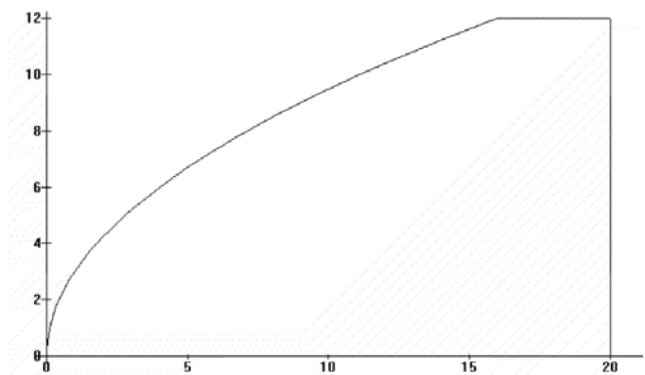


figura 25

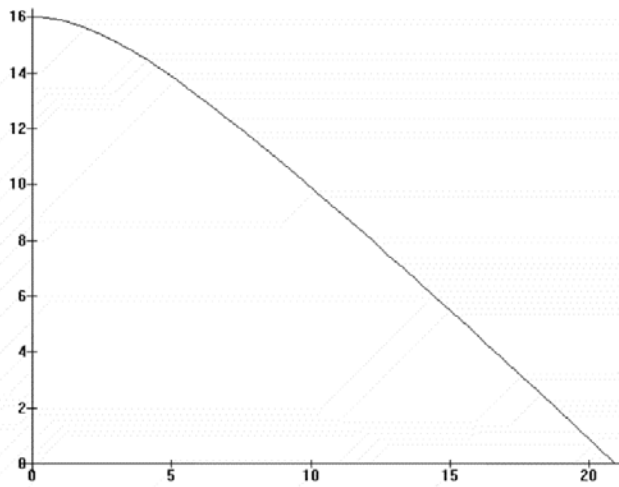


figura 26

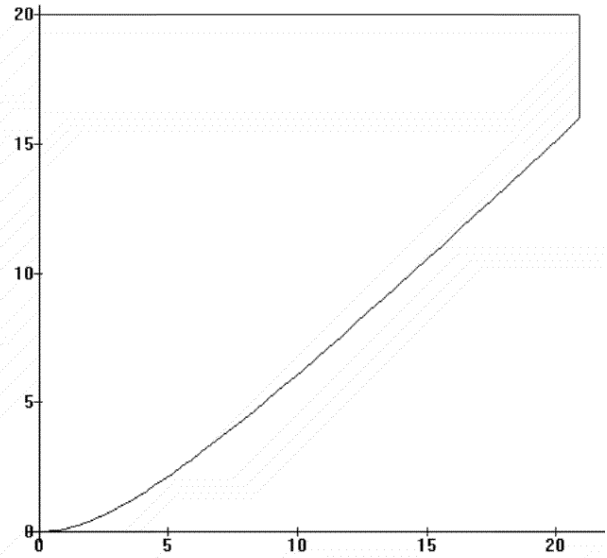


figura 27

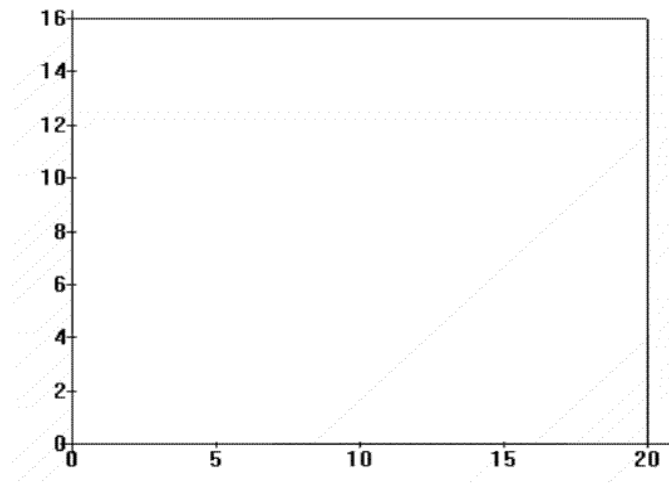


figura 28

Aplicações em Cálculo Diferencial e Integral

Utilizando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região

$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{y^2}{9} \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 12\}$$

obtemos

$$\text{Vol } 2 = \iint_{V_2} \left(16 - \frac{y^2}{9}\right) dA = \int_0^{12} \int_{y^2/9}^{20} (16 - y^2/9) dx dy = 2150,4 \text{ u.v}$$

O volume total do sólido pode ser obtido pela soma dos volumes dos sólidos parte I e parte II

ou usando integral dupla da função $z = f(x,y) = 16 - \frac{y^2}{9}$ na região retangular

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 12\}$$

assim,

$$\text{Vol total} = \text{Vol } 1 + \text{Vol } 2 = \int_0^{12} \int_0^{20} (16 - y^2/9) dx dy = 2560 \text{ u.v}$$

COMANDOS DO MAPLE

MODELOS COM CILINDROS CIRCULARES

Modelo 1: Cilindros circulares de raio 1, eixos formando um ângulo de 90 graus

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-1.56..4.68]):
> a:=plot([t,sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> b:=plot([t,-sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> c:=plot([t,3,t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> d:=plot([t,-3,t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> e:=plot([-Pi/2,t,t=-3..3]):
> f:=plot([3*Pi/2,t,t=-3..3]):
> display([uni,a,b,c,d,e,f],scaling=constrained);
```

Modelo 2: Cilindros circulares de raio 1, eixos formando um ângulo de 60 graus

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=-1.56..4.68]):
> a:=plot([t,sqrt(3)*sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> b:=plot([t,-sqrt(3)/3*sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> c:=plot([t,2*sqrt(3)-sqrt(3)/3*sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> d:=plot([t,-2*sqrt(3)-sqrt(3)/3*sin(t),t=-Pi/2..3*Pi/2]):
> cmax:=2*sqrt(3)-sqrt(3)/3*sin(3*Pi/2);
```

$$cmax := \frac{7}{3} \sqrt{3}$$

```
> dmax:=-2*sqrt(3)-sqrt(3)/3*sin(3*Pi/2);
```

$$dmax := -\frac{5}{3} \sqrt{3}$$

```
> f:=plot([3*Pi/2,t,t=dmax..cmax]):
> display([uni,a,b,c,d,e,f],scaling=constrained);
```

MODELOS COM CILINDROS PARABÓLICOS

Modelo 3: Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=0$, $x=20$, $y=0$, $z=16-(y^2)/9$, $x=5y/3$ e $z=0$

Parte I) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=0$, $z=16-(y^2)/9$, $x=5y/3$ e $z=0$

> 1) Parte do plano $x=0$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> a:=plot([t,16-(t^2)/9,t=0..12]):

> display([uni,a],scaling=constrained);

> 2) Parte do plano $z=0$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> b:=plot([5*t/3,t,t=0..12]):

> c:=plot([t,12,t=0..20]):

> display([uni,b,c],scaling=constrained);

> 3) Parte do plano $x=5y/3$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> u(t):= int(sqrt(1+25/9),y=0..t);

$$u(t) := \frac{1}{3}\sqrt{34}t$$

> d:=plot([16-t^2/9,u(t),t=0..12]):

> display([uni,d],scaling=constrained);

> 4) Parte do cilindro $z=16-y^2/9$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

```

> u(t):=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..t);
u(t) :=  $\frac{1}{18}\sqrt{81+4t^2}t + \frac{9}{4}\ln(2t + \sqrt{81+4t^2}) - \frac{9}{4}\ln(9)$ 
umax:=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..12);
umax :=  $2\sqrt{73} + \frac{9}{4}\ln(24 + 3\sqrt{73}) - \frac{9}{4}\ln(9)$ 
> e:=plot([u(t), 5*t/3,t=0..12]);
> f:=plot([umax,t,t=0..20]);
> display([uni,e,f],scaling=constrained);

```

Parte II) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=20$, $y=0$, $z=16-(y^2)/9$, $x=5y/3$ e $z=0$

```

> 1) Parte do plano x=20
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]);
> g:=plot([t,16-(t^2)/9,t=0..12]);
> display([uni,g],scaling=constrained);

```

```

> 2) Parte do plano z=0
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]);
> h:=plot([5*t/3,t,t=0..12]);
> i:=plot([20,t,t=0..12]);
> display([uni,h,i],scaling=constrained);

```

```

> 3) Parte do plano x=5y/3
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]);
> u(t):= int(sqrt(1+25/9),y=0..t);

```

$$u(t) := \frac{1}{3}\sqrt{34}t$$

```

> j:=plot([16-t^2/9,u(t),t=0..12]);

```

> display([uni,j],scaling=constrained);

> 4) Parte do cilindro $z=16-y^2/9$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> u(t):=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..t);

$$u(t) := \frac{1}{18}\sqrt{81+4t^2}t + \frac{9}{4}\ln(2t + \sqrt{81+4t^2}) - \frac{9}{4}\ln(9)$$

> umax:=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..12);

$$umax := 2\sqrt{73} + \frac{9}{4}\ln(24 + 3\sqrt{73}) - \frac{9}{4}\ln(9)$$

> l:=plot([u(t), 5*t/3,t=0..12]):

> m:=plot([t,20,t=0..umax]):

> display([uni,l,m],scaling=constrained);

> 5) Parte do plano $y=0$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> n:=plot([20, t,t=0..16]):

> o:=plot([t,16,t=0..20]):

> display([uni,n,o],scaling=constrained);

>

Modelo 4: Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=0$, $x=20$, $y=0$, $z=16-(y^2)/9$, $x=y^2/9$ e $z=0$

> **Parte I)** Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=0$, $z=16-(y^2)/9$, $x=y^2/9$ e $z=0$

> 1) Parte do plano $x=0$

> with(plots):

> uni:=plot([t,0,t=0..22]):

> a:=plot([t,16-(t^2)/9,t=0..12]):

> display([uni,a],scaling=constrained);


```

> 2) Parte do plano z=0
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> b:=plot([t^2/9,t=0..12]):
> c:=plot([t,12,t=0..16]):
> display([uni,b,c],scaling=constrained);

```

```

> 3) Parte do cilindro x=y^2/9
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> u(t):=int(sqrt(1+(4*y^2)/81),y=0..t);
u(t) :=  $\frac{1}{18}\sqrt{81+4t^2}t + \frac{9}{4}\ln(2t + \sqrt{81+4t^2}) - \frac{9}{4}\ln(9)$ 
> d:=plot([u(t), 16-t^2/9,t=0..12]):
> display([uni,d],scaling=constrained);

```

```

> 4) Parte do cilindro z=16-y^2/9
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> u(t):=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..t);
u(t) :=  $\frac{1}{18}\sqrt{81+4t^2}t + \frac{9}{4}\ln(2t + \sqrt{81+4t^2}) - \frac{9}{4}\ln(9)$ 
> umax:=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..12);
umax :=  $2\sqrt{73} + \frac{9}{4}\ln(24 + 3\sqrt{73}) - \frac{9}{4}\ln(9)$ 
> e:=plot([u(t),t^2/9 ,t=0..12]):
> f:=plot([umax,t,t=0..16]):
> display([uni,e,f],scaling=constrained);

```

Parte II) Modelo representando o sólido situado no primeiro octante e limitado por $x=20$, $z=16-(y^2)/9$, $x=y^2/9$, $y=0$ e $z=0$

```

> 1) Parte do plano x=20

```

```

> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> g:=plot([t,16-(t^2)/9,t=0..12]):
> display([uni,g],scaling=constrained);

```

> 2) Parte do plano $z=0$

```

> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> h:=plot([t^2/9,t,t=0..12]):
> i:=plot([t,12,t=16..20]):
> j:=plot([20,t,t=0..12]):
> display([uni,h,i,j],scaling=constrained);

```

> 3) Parte do cilindro $x=y^2/9$

```

> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> u(t):=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..t);

```

$$u(t) := \frac{1}{18} \sqrt{81 + 4t^2} t + \frac{9}{4} \ln(2t + \sqrt{81 + 4t^2}) - \frac{9}{4} \ln(9)$$

```

> l:=plot([u(t),16-t^2/9,t=0..12]):
> display([uni,l],scaling=constrained);

```

> 4) Parte do cilindro $z=16-y^2/9$

```

> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> u(t):=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..t);

```

$$u(t) := \frac{1}{18} \sqrt{81 + 4t^2} t + \frac{9}{4} \ln(2t + \sqrt{81 + 4t^2}) - \frac{9}{4} \ln(9)$$

```

> umax:=int(sqrt(1+4*y^2/81),y=0..12);

```

$$umax := 2\sqrt{73} + \frac{9}{4} \ln(24 + 3\sqrt{73}) - \frac{9}{4} \ln(9)$$

```

> m:=plot([u(t),t^2/9,t=0..12]):
> n:=plot([t,20,t=0..umax]):

```

```
> o:=plot([umax,t,t=16..20]):
> display([uni,m,n,o],scaling=constrained);
```

> 5) Parte do plano $y=0$

```
> with(plots):
> uni:=plot([t,0,t=0..22]):
> p:=plot([20, t,t=0..16]):
> q:=plot([t,16,t=0..20]):
> display([uni,p,q],scaling=constrained);
```

Volumes dos sólidos correspondentes aos modelos 3 e 4

Modelo 3

```
> with(plots):
> V1:= int(int(16-((y^2)/9),x=0..(5*y)/3),y=0..12);
      V1 := 960
> V2:= int(int(16-((y^2)/9),x=(5*y)/3..20),y=0..12);
      V2 := 1600
```

Modelo 4

```
> with(plots):
> V1:= int(int(16-((y^2)/9),x=0..(y^2)/9),y=0..12);
      V1 := 2048/5
> V2:=int(int(16-((y^2)/9),x=(y^2)/9..20),y=0..12);
      V2 := 10752/5
```

> Volume Total dos modelos 3 e 4

```
> with(plots):
> V.total:= int(int(16-((y^2)/9),x=0..20),y=0..12);
      Vtotal := 2560
```

APÊNDICE

- Definição: A aplicação $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ é denominada de função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 .
- Definição: Uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular ($\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$) é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ o comprimento de arco da curva α de t_0 , a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.
- Teorema: Uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e só se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$
- Proposição: Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s: I \rightarrow s(I)$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então, existe a função inversa s^{-1} de s , definida no intervalo $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.
- Definição: Uma superfície parametrizada regular, ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 , tal que:
 - a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
 - b) Para todo $q = (u,v) \in U$ a diferencial de X em $q, dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.
- Definição: O plano tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em q , que denotamos por $T_q X$.
- Definição: Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, para qualquer $q \in U$ a aplicação $I_q: T_q X \rightarrow \mathbb{R}; I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$ é denominada a primeira forma quadrática de X em q . $E(q) = \langle X_u, X_u \rangle(q)$, $F(q) = \langle X_u, X_v \rangle(q)$, e $G(q) = \langle X_v, X_v \rangle$ são denominados coeficientes da primeira forma quadrática.

- Definição: Sejam $X(u,v)$ e $\bar{X}(u,v)$, $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ superfícies simples, isto é, X e \bar{X} são injetivas. Dizemos que X e \bar{X} são isométricas, se para todo $(u,v) \in U$ os coeficientes da primeira forma quadrática de X e \bar{X} coincidem.

Neste caso, $X: U \rightarrow X(U) = S$ e $\bar{X}: U \rightarrow \bar{X}(U) = \bar{S}$ são bijetoras, e $\phi: \bar{X} \circ X^{-1}: S \rightarrow \bar{S}$ é bijetora e é chamada de isometria. Então ϕ preserva “distância” entre os pontos correspondentes nos traços das superfícies.

Bibliografia:

[1] Carmo, M. do – *Diferencial Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[2] Teneblat, Ketí – *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora UNB, 1990.